

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

Eduardo Messias de Moraes

**Ajustes dos Parâmetros Cosmológicos de um
Modelo de Unificação de Matéria Escura e
Energia Escura**

Poços de Caldas/MG

2016

Eduardo Messias de Moraes

Ajustes dos Parâmetros Cosmológicos de um Modelo de Unificação de Matéria Escura e Energia Escura

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração em Física de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

Co-orientador: Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros

Poços de Caldas/MG

2016

M827a de Morais, Eduardo Messias.

Ajustes dos parâmetros cosmológicos de um modelo de unificação de matéria escura e energia escura / Eduardo Messias de Morais. – Poços de Caldas, 2016.

196 f. –

Orientador: Rodrigo Rocha Cuzinato.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, MG, 2016.

Bibliografia.

1. Cosmologia. 2. Energia escura (Astronomia). 3. Matéria escura (Astronomia). I. Cuzinato, Rodrigo Rocha. II. Título.

CDD: 523.1126

Eduardo Messias de Moraes

Ajustes dos Parâmetros Cosmológicos de um Modelo de Unificação de Matéria Escura e Energia Escura

A Banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física de Partículas e Campos.

Aprovada em: 12/05/2016

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Instituição: IFT-UNESP

Assinatura: _____



Prof. Dr. Gustavo do Amaral Valdiviesso

Instituição: UNIFAL-MG

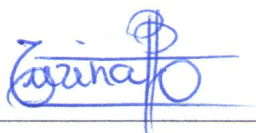
Assinatura: _____



Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura: _____



Este trabalho é dedicado a meu pai José Messias e minha mãe Maria de Lourdes, que mesmo diante das dificuldades impostas pela vida, jamais negaram apoio em minha busca pelo conhecimento. Dedico-o também a Carol, minha querida companheira, pelo apoio, ajuda e compreensão durante essa turbulenta fase de nossa vida. Não posso esquecer também de meus familiares e amigos pelo carinho e pela compreensão em cada uma de minhas ausências.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros votos de agradecimento à minha namorada, Carol, pelo carinho, companheirismo, compreensão e apoio em minhas horas de dedicação a essa dissertação. Por ser a minha fonte de esperança em tempos turbulentos, o meu sorriso em tempos de tristeza, minha luz em tempos sombrios e a minha calma em meio ao desespero.

À meus pais, Maria e José, cuja a história vida me inspira a cada dia. Pelo apoio incondicional, e pelos aconselhamentos que me enchem de esperança e possibilitam a busca pela realização de meus sonhos.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinato por sua amizade, humildade e paciência. Pelas oportunidades que me foram concedidas e pela confiança depositada em meu trabalho ao longo dos últimos quatro anos. Pela motivação e incentivo, que despertaram em mim profunda afinidade pela ciência.

Ao Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros, pela dedicação empregada na construção desse trabalho. Por disponibilizar parte de seu tempo para nossas reuniões semanais. Pelo curso de cosmologia perturbativa ministrado em novembro de 2014, estritamente necessário para a escrituração do Cap. 6 dessa dissertação.

Ao Prof. Dr. Gustavo do Amaral Valdivieso e Prof. Dr. Fernando Gonçalves Gardim, membros da banca de qualificação, cujos comentários e conselhos influenciaram diretamente a qualidade do trabalho.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Física, em especial:

- Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Mello;
- Prof. Dr. Daniel Juliano Pamplona da Silva;
- Prof. Dr. Fernando Gonçalves Gardim;
- Prof. Dr. Gustavo do Amaral Valdivieso;
- Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinato;

por contribuírem ativamente na minha formação.

Aos colegas:

- Clicia Naldoni de Souza;
- Lucas Oliveira Quintino;
- Marllos Eustáquio Fonseca Fernandes,

pela ajuda durante o estudo das disciplinas do programa.
À Capes, pelo apoio financeiro.

O mundo não é feito somente de raios de sol e arco-íris, é um lugar duro e maldoso e não importa o quanto você ache que é forte, ele sempre vai te deixar de joelhos e te deixar assim permanentemente se você permitir. Nem você nem ninguém vai bater tão forte como a vida. Mas isso não é sobre o quão forte você bate, é sobre o quão forte você aguenta ser golpeado e seguir adiante.

Rocky Balboa

RESUMO

Propomos um modelo fenomenológico unificado para matéria escura e energia escura, baseado em uma equação de estado com parâmetro w escrito em termos de arco-tangente. Os parâmetros livres do modelo são três constantes: Ω_{b0} , α e β . O parâmetro α dita a taxa de transição entre o período de domínio da matéria e o período de expansão acelerada. A razão β/a fornece o redshift de equivalência entre os dois regimes. Os parâmetros cosmológicos são fixados pelos dados observacionais de nucleossíntese primordial, supernovas do tipo Ia, explosões de raios gamma, oscilações acústicas de bárions e medição do parâmetro de Hubble. Os vários conjuntos de dados são usados em diferentes combinações para ajustar os parâmetros cosmológicos via análise estatística. O Modelo Unificado é comparado ao modelo Λ CDM e suas diferenças são enfatizadas. A análise realizada em background parece indicar que o Modelo Unificado dinâmico é ligeiramente preferível em detrimento do modelo Λ CDM. No entanto, através do desenvolvimento da teoria de perturbação para o nosso Modelo Unificado, concluímos que ele é incapaz de produzir o power spectrum atual das flutuações de densidade. Esta é uma desvantagem possivelmente fatal do nosso modelo, pelo menos na parametrização de w utilizada.

Palavras-chave: Quartessência. Componente Unificada. UDM. Modelo Unificado. Arctan. Cosmologia. Teoria de Perturbações. GRB. BAO. SNIa.

ABSTRACT

We propose a phenomenological unified model for dark matter and dark energy based on an equation of state parameter w that scales with the arc tangent of the redshift. The free parameters of the model are three constants: Ω_{b0} , α and β . Parameter α dictates the transition rate between the matter dominated era and the accelerated expansion period. The ratio β/α gives the redshift of the equivalence between both regimes. Cosmological parameters are fixed by observational data from Primordial Nucleosynthesis, Supernovae of the type Ia, Gamma-Ray Bursts and Baryon Acoustic Oscillations. The various sets of data are used in different combinations to constraint the parameters through statistical analysis. The unified model is compared to the Λ CDM model and their differences are emphasized. The analysis performed on the background seems to indicate that our dynamical unified model is slightly preferable to the concordance Λ CDM model. However, by developing the perturbation theory for our unified model, we conclude that it is unable to produce the power spectrum of density fluctuation observed today. This is a possibly fatal drawback of our model, at least in the parametrization of w .

Keywords: Quartessence, Unified Component, UDM, Unified Model, Arctan, Cosmology, Perturbation Theory, GRB, BAO, SNIa.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|-----|
| Figura 1 – Curvaturas homogêneas bidimensionais. | 30 |
| Figura 2 – Fator de escala para soluções unicomponentes. | 42 |
| Figura 3 – Propriedades cosmológicas de um universo segundo modelo Λ CDM. | 51 |
| Figura 4 – Grandezas envolvidas na definição da distância de diâmetro angular e distância de luminosidade. | 52 |
| Figura 5 – Parâmetro da equação de estado efetivo das componentes escuras do Λ CDM. | 55 |
| Figura 6 – Parâmetro da equação de estado do gás Chaplygin. | 58 |
| Figura 7 – Curvas da função $w_u(z)$ para diferentes valores dos parâmetros cosmológicos. | 62 |
| Figura 8 – Diagrama apresentado por Hubble (1929) que comprova a expansão cósmica. | 76 |
| Figura 9 – Cadeia de reações que ocorrem na nucleossíntese primordial. | 79 |
| Figura 10 – Linhas de absorção no espectro de quasares devido a interação dos fótons com ao meio interestelar. | 80 |
| Figura 11 – Comportamento típico das curvas de luz de supernovas do tipo Ia. | 83 |
| Figura 12 – Diagrama da Hubble para as supernovas do conjunto de dados Union 2.1. | 84 |
| Figura 13 – Calibração de GRB's com os dados de SNIa's. | 89 |
| Figura 14 – Funções de distribuição de probabilidade para os parâmetros do modelo Λ CDM. | 100 |
| Figura 15 – Regiões de confiança das PDF's do Λ CDM. | 102 |
| Figura 16 – Histograma para o redshift de equivalência segundo o modelo Λ CDM. | 102 |
| Figura 17 – Bandas de confiança de 68% para o modulo de distância, razão de escala de distância e função de Hubble segundo Λ CDM. | 107 |
| Figura 18 – Funções de distribuição de probabilidade para os parâmetros do Modelo Unificado. | 108 |
| Figura 19 – Regiões de confiança das PDF's do UM. | 109 |
| Figura 20 – Histograma para o redshift de equivalência segundo o Modelo Unificado. | 110 |
| Figura 21 – Bandas de confiança de 68% para o modulo de distância, razão de escala de distância e função de Hubble de acordo com o modelo unificado. | 111 |
| Figura 22 – Parâmetro da equação de estado efetiva das componentes escuras em ambos os modelos. | 112 |
| Figura 23 – Espaço-tempo de background. | 121 |
| Figura 24 – Comparação entre os dados de power spectrum do 2dFGRS e SDSS. | 135 |
| Figura 25 – Razão entre as densidades ρ_r/ρ_m e ρ_Λ/ρ_m segundo as saídas do CLASS. | 138 |
| Figura 26 – Power Spectrum de matéria no Modelo Λ CDM e Modelo Unificado. | 142 |

| | |
|---|-----|
| Figura 27 – Evolução do quadrado do potencial gravitacional. | 143 |
| Figura 28 – Evolução do quadrado do contraste de densidade de bárions. | 144 |
| Figura 29 – Evolução do quadrado da divergência da velocidade. | 145 |
| Figura 30 – Quadrado do contraste de densidade da componente unificada. | 146 |
| Figura 31 – Quadrado do divergente da velocidade da componente unificada. | 147 |
| Figura 32 – PDF's marginais do Λ CDM, com SNIa e GRB. | 175 |
| Figura 33 – PDF's marginais do UM com SNIa e GRB. | 176 |
| Figura 34 – PDF's marginais do Λ CDM com BAO. | 177 |
| Figura 35 – PDF's marginais do UM com BAO. | 178 |
| Figura 36 – PDF's marginais do Λ CDM com $H(z)$ | 179 |
| Figura 37 – PDF's marginais do UM com $H(z)$ | 180 |
| Figura 38 – Diagrama da Hubble para as supernovas do conjunto de dados Union 2.1. | 182 |
| Figura 39 – Power Spectrum de Matéria segundo modelo do gás de Chaplygin generalizado (GCG). | 191 |
| Figura 40 – Quadrado do potencial gravitacional do GCG. | 192 |
| Figura 41 – Quadrado do contraste de densidade de bárions no GCG. | 193 |
| Figura 42 – Quadrado do divergente de velocidade bárions no GCG. | 194 |
| Figura 43 – Quadrado do contraste de densidade da componente unificada no GCG. | 195 |
| Figura 44 – Quadrado do divergente da velocidade da componente unificada do GCG. | 196 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1 – Parâmetros do modelo Λ CDM obtidos com os dados do satélite Planck. | 43 |
| Tabela 2 – Escala da evidência a favor do modelo A em detrimento do B pela interpretação do parâmetro de Bayes. | 71 |
| Tabela 3 – Priors adotados nos parâmetros do Modelo Unificado. | 73 |
| Tabela 4 – Priors adotados nos parâmetros do Λ CDM. | 74 |
| Tabela 5 – Valores da constante de Hubble mensurados por diversos autores ao longo do Séc.XX. | 77 |
| Tabela 6 – Ajustes lineares dos parâmetros λ e b da relação de Amati obtidos com três métodos de regressão linear diferentes. | 88 |
| Tabela 7 – Conjunto de dados de oscilações acústicas de bárions utilizados nos ajustes dos parâmetros cosmológicos. | 94 |
| Tabela 8 – Dados de $H(z)$ | 97 |
| Tabela 9 – Estimativas paramétricas dos modelos. | 105 |
| Tabela 10 – Estimativas paramétricas com dados de SNIa e GRB. | 174 |
| Tabela 11 – Estimativas paramétricas com dados de BAO. | 177 |
| Tabela 12 – Estimativas paramétricas com dados de $H(z)$ | 179 |
| Tabela 13 – Módulos de distância das GRB's calibrados com os dados de SNIa do Union2.1. | 183 |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| | Prefácio | 21 |
| 1 | INTRODUÇÃO | 23 |
| 2 | COSMOLOGIA BÁSICA | 27 |
| 2.1 | Equações da Cosmologia | 27 |
| 2.1.1 | Princípio Cosmológico e a Métrica FLRW | 28 |
| 2.1.2 | Fontes de Curvatura | 32 |
| 2.1.3 | Equações de Friedmann | 33 |
| 2.1.4 | Fenomenologia das Equações de Estado | 35 |
| 2.2 | Modelos Cosmológicos | 39 |
| 2.2.1 | Modelos unicomponente com w constante | 40 |
| 2.2.2 | Modelo Λ CDM | 41 |
| 2.3 | Propriedades e Distâncias Cosmológicas | 44 |
| 2.3.1 | Redshift | 44 |
| 2.3.2 | Lei de Hubble | 45 |
| 2.3.3 | Distância Comóvel Transversa | 46 |
| 2.3.4 | Distância Comóvel na Linha de Visada | 46 |
| 2.3.5 | Distância Própria | 47 |
| 2.3.6 | Distância de Diâmetro Angular | 48 |
| 2.3.7 | Distância de Luminosidade | 48 |
| 2.3.8 | Magnitudes | 49 |
| 2.4 | Comentários Finais | 50 |
| 3 | UNIFICAÇÃO DE MATÉRIA E ENERGIA ESCURA | 53 |
| 3.1 | Quartessência - Componente Escura Unificada | 56 |
| 3.1.1 | Gás de Chaplygin Generalizado (GCG) | 57 |
| 3.1.2 | Modelos de Matéria Escura Unificada (UDM) com Campo Escalar | 59 |
| 3.1.3 | Modelos de Transição Rápida | 60 |
| 3.1.4 | Parametrizações da função $w(a)$ | 60 |
| 3.2 | Equações Modelo Unificado | 63 |
| 4 | TÉCNICAS DE ANÁLISE DE DADOS | 65 |
| 4.1 | Priors e a Definição Bayesiana de um Modelo | 66 |
| 4.2 | Inferência Bayesiana de Parâmetros | 67 |
| 4.3 | Seleção Bayesiana de Modelos | 69 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 5 | VÍNCULOS OBSERVACIONAIS | 73 |
| 5.1 | Dados Observacionais | 75 |
| 5.1.1 | Constante de Hubble | 75 |
| 5.1.2 | Parâmetro de Densidade Bariônica | 78 |
| 5.1.3 | Supernovas tipo Ia | 81 |
| 5.1.4 | Explosões de Raios Gamma | 86 |
| 5.1.5 | Oscilações Acústicas de Bárions | 91 |
| 5.1.6 | Parâmetro de Hubble | 95 |
| 5.2 | Ajustes Cosmológicos | 98 |
| 5.2.1 | Modelo Λ CDM | 99 |
| 5.2.2 | Modelo Unificado | 102 |
| 5.2.3 | Comparações entre modelos | 104 |
| 6 | COSMOLOGIA PERTURBATIVA | 113 |
| 6.1 | Considerações Acerca do Universo Homogêneo e Isotrópico | 113 |
| 6.2 | Espaço-Tempo Perturbado | 116 |
| 6.2.1 | Transformações de Gauge | 120 |
| 6.2.2 | Transformações da Métrica | 122 |
| 6.2.3 | Perturbações escalares | 123 |
| 6.3 | Evolução das Perturbações | 125 |
| 6.3.1 | Equações Perturbadas dos Modelos Cosmológicos | 137 |
| 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 149 |
| | REFERÊNCIAS | 151 |
| | APÊNDICES | 171 |
| | APÊNDICE A – GRÁFICOS DAS PDF'S MARGINALIZADAS | 173 |
| | APÊNDICE B – INTERPOLAÇÃO DE AKIMA | 181 |
| | APÊNDICE C – MÓDULO DE DISTÂNCIA DAS GRB'S | 183 |
| | APÊNDICE D – TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE DE TENSORES | 187 |
| | APÊNDICE E – EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES NO MODELO DE UNIFICAÇÃO DO GÁS DE CHAPLYGIN GENERALIZADO | 191 |

PREFÁCIO

Esse trabalho não foi pensado para ser um depósito de resultados. Não foi escrito de modo à esconder do leitor as dificuldades existentes entre os procedimentos abordados em cada parágrafo. Essa dissertação descreve de maneira resumida a construção gradativa de um conhecimento gerado ao longo de dois anos de trabalho intenso. Todavia, como a ciência se caracteriza pela interação sinérgica entre várias áreas do conhecimento, o leitor pode se queixar da ausência de um ou outro tema que o mesmo julga importante. Isso de fato ocorrerá pois o próprio autor desse texto se viu perante a necessidade de excluir partes integrantes do texto para que o objetivo central do trabalho se mantivesse em foco. Alguns desses temas paralelos que são parcialmente desconexos da pauta temática principal, mas que julgo importantes, estão apresentados nos apêndices.

O trabalho se principia pela definição de conceitos chaves no estudo da cosmologia básica. No Cap. 2 são deduzidas as equações que guiam a dinâmica cósmica, bem como a definição das distâncias cosmológicas que fazem a ligação entre teoria e observação. É apresentado também o modelo cosmológico padrão, conhecido por Λ CDM, que se acredita atualmente ser aquele que melhor descreve as propriedades do universo observável.

No Cap. 3, alguns dos problemas referentes ao modelo Λ CDM são delineados, de modo a criar um cenário que viabiliza o estudo de modelos onde matéria e energia escura compõem um único fluido. Então, os procedimentos que unificam essas componentes escuras são rapidamente revisados e o modelo cosmológico, que passaremos a chamar de Modelo Unificado, é apresentado.

O Cap. 4 apresenta as ferramentas estatísticas básicas necessárias para se vincular os parâmetros de modelos cosmológicos. Os dados cosmológicos necessários para esse ajuste são apresentados no Cap. 5. No final desse capítulo, os resultados da análise são apresentados e os modelos cosmológicos Λ CDM e Modelo Unificado, agora vinculados, são comparados.

O Cap. 6 traz uma introdução ao formalismo da teoria das perturbações cosmológicas. Tal tópico é extremamente importante nos procedimentos da cosmologia moderna. São deduzidas as equações que ditam a dinâmica das perturbações lineares que, para ambos os modelos, são resolvidas com os parâmetros obtidos no Cap. 5. O Cap. 6 não realiza ajustes de parâmetros cosmológicos. Deve-se reconhecer que para realização de tal proeza, seria necessário um tempo maior de estudo da teoria de perturbações por conta de infinidade de efeitos físicos que influenciam diretamente no comportamento das perturbações. Além disso, o ajuste oriundo da teoria de perturbações requereria um poder de processamento muito maior do que aquele que temos acesso atualmente. Nesse capítulo, são apresentados alguns argumentos que simplificam as equações possibilitando a obtenção das perturbações. Esses dados são analisados qualitativamente, e os resultados apontam características importantes

dos modelos que não podem ser obtidas da análise não perturbada.

Para encerrar esse prefácio, apresentam-se algumas convenções adotadas no texto:

- Os valores numéricos apresentam o ponto “.” como separador decimal, como, por exemplo, 3.1415. Tal postura justifica-se por dois fatos. O primeiro deles é que, como esse texto foi editado em \LaTeX , os valores numéricos escritos com a virgula “,” como sendo o separador decimal não ficam bem dispostos (3,1415). Outro fato é que grande parte dos resultados apresentados são obtidos de procedimentos computacionais, onde o ponto é usualmente adotado.
- Nas métricas do espaço tempo, utilizaremos assinatura tempo positivo. Ou seja: $(+, -, -, -)$.
- Nas abordagens de background onde as equações são mais simples, iremos considerar a velocidade da luz de acordo com o sistema internacional de unidades, carregando sempre a designação c nas equações. Para a abordagem perturbativa, consideraremos $c = 1$ para estarmos de acordo com a convenção adotada nas referências de teoria de perturbações cosmológicas.

1 INTRODUÇÃO

A ciência da cosmologia sofreu profundas alterações nas últimas décadas. Até então, a ausência de dados era o maior obstáculo para o estudo dos fenômenos cósmicos. Muitas das vezes, eram os aspectos filosóficos que ditavam as características de modelos elaborados. Como exemplo, temos o acréscimo da constante cosmológica por Einstein em suas equações da Relatividade Geral com o objetivo de descrição de um universo estático, em equilíbrio (instável) (EINSTEIN, 1918). Em contrapartida, Alexander Friedmann abandonou a premissa de um universo estático e encontrou a descrição analítica de um universo dinâmico perante a solução das equações de campo da Relatividade Geral (FRIEDMANN, 1922; FRIEDMANN, 1924). Tal modelo descreve a evolução de um universo proveniente de uma singularidade, que posteriormente seria cunhado por Lemaître como o átomo primordial. Uma solução dinâmica para a evolução do universo foi encontrada também por Georges Lemaître em 1927 (LEMAÎTRE, 1927).

Em meio a esse cenário, a ausência de dados observacionais impossibilitava a distinção de um dentre esses dois tipos de modelos cosmológicos (estático ou dinâmico) como aquele que melhor descreveria a condição dinâmica do universo. Essa posição se alterou drasticamente com a publicação dos dados das velocidades de afastamento de galáxias por Edwin Hubble, em 1929 (HUBBLE, 1929). Utilizando-se do telescópio Hooker do observatório de Monte Wilson, até então o maior do mundo, Hubble mediu o período de variação da luminosidade de estrelas Cefeidas em 46 galáxias. Com isso, foi capaz de estabelecer a proporcionalidade entre velocidade de afastamento e a distância de determinada galáxia com relação a Via Láctea, conhecida hoje como a Lei de Hubble. Os dados observacionais apontavam um comportamento dinâmico do universo, inviabilizando, assim, o modelo de universo estático de Einstein, ao mesmo tempo que dava suporte as teorias de Friedmann e Lemaître.

Aproximadamente nesse período, a ciência espacial se deparou com um novo problema. Sem saber a causa, alguns astrônomos passaram a notar alguns padrões nos erros de certas medidas astronômicas. Ao longo da década de 30, Fritz Zwicky estudou galáxias que, por serem sistemas autogravitantes isolados, deveriam estar condizentes com o teorema do virial. Nessa abordagem, a energia potencial seria o dobro da energia cinética. Zwicky verificou que a massa luminosa é cerca de 60 vezes menor que a massa total do sistema (ZWICKY, 1933; ZWICKY, 1937). Problema parecido foi encontrado na década de 1970 por Vera Rubin no estudo do movimento de rotação das estrelas em galáxias (RUBIN; FORD JR., 1970). Teoricamente, as velocidades das estrelas em rotação deveriam diminuir por um fator \sqrt{r} . Todavia, as observações mostravam que as velocidades permaneciam aproximadamente constantes a partir de determinado raio (distância da estrela até o centro do aglomerado). Esse efeito poderia ser explicado se, de alguma maneira, existisse

matéria interagindo gravitacionalmente que não estava sendo contabilizada. Atualmente, este tipo de matéria é denominada *matéria escura* e desempenha um importante papel na cosmologia. Estudos da anisotropia da radiação cósmica de fundo mostram que a existência de matéria não-bariônica é imprescindível para se explicar a formação das estruturas cósmicas. Contudo, partículas de matéria escura jamais foram detectadas diretamente apesar das inúmeras tentativas realizadas (OLIVE, 2005).

Qualquer área da ciência apresenta grande dependência das tecnologias de observação. De fato, essa característica é comum a todas as áreas de ciência. Contudo, na recente história da cosmologia, por muitas vezes modelos teóricos muito bem estabelecidos e indubitavelmente estudados foram abruptamente abandonados pelo fato de não preverem um comportamento observado. Foi assim com a teoria do Estado Estacionário¹, elaborada pelo brilhante astrônomo Hoyle (1948), quando a radiação cósmica de fundo foi descoberta por Penzias e Wilson no ano de 1965 (PENZIAS; WILSON, 1965). A radiação cósmica de fundo fora prevista por Alpher, Bethe e Gamow (1948) como um requisito do modelo do Big-Bang. De fato, quando uma nova tecnologia de obtenção de dados cosmológicos é desenvolvida, muitos modelos são desconsiderados ou adaptados e geralmente a maneira de se encarar a cosmologia se renova.

Curiosamente, ao mesmo tempo que a medição da radiação cósmica de fundo solucionava o problema da explicação para a ocorrência de um Big Bang, trazia a tona outro: o problema de horizonte. Como dois pontos distintos do universo mutuamente externos ao horizonte causal poderiam estar em equilíbrio térmico? Em uma tentativa de responder essa pergunta, Alan Guth propôs a teoria do universo inflacionário em 1981 prevendo um período de acelerada expansão cósmica (GUTH, 1981). Mesmo com a existência de alguns problemas – c.f. (BÖRNER; SEILER, 1994), grande parte da comunidade científica aceita a teoria inflacionária como sendo a solução do problema de horizonte. Com ela, foi possível estabelecer de forma aceitável as fases evolutivas do universo: inflação, que daria lugar ao período de domínio da radiação, seguido pelo período de domínio de matéria não relativística. Acreditava-se nesta época (década de 80) que o universo encontrava-se justamente nesta era de matéria. Com esse modelo cósmico, a cosmologia conseguia prever a temperatura e idade do universo, a origem dos elementos leves, a formação dos sistemas estelares, dentre tantas outras propriedades observadas.

No final do século XX, quando se pensava que os estágios de macro-evolução cósmicos já tinham todos sido determinados, a cosmologia passou mais uma vez por uma revolução conceitual. O aprimoramento das técnicas de observação aliado à evolução da compreensão dos mecanismos de emissão de supernovas do tipo Ia permitiram aos cosmólogos a obtenção de estimativas de parâmetros cosmológicos utilizando-se de dados de altos redshifts $z = 0.3 - 0.7$. Como resultado, os cientistas encontraram algo inesperado.

¹ Teoria alternativa a do Big-Bang que considera a dinâmica do universo em um estado estacionário, com constante criação de matéria.

O que era esperado é mencionado a seguir. Uma vez que as interações nucleares não atuam em escalas cosmológicas e a distribuição de matéria é eletricamente neutra, espera-se que somente a interação gravitacional atue entre as galáxias. Ou seja, o universo dinâmico estaria em expansão, porém desacelerando. No entanto, nos anos de 1998 e 1999, as equipes de Adam Riess,² Brian Schmidt³ e Saul Perlmutter⁴ publicaram os dados das análises cosmológicas apontando o crescimento cosmológico acelerado (RIESS et al., 1998; SCHMIDT et al., 1998; PERLMUTTER et al., 1999). Tudo se passa como se o universo fosse preenchido por uma componente distribuída homoganeamente por todo espaço que exerce uma pressão negativa e causa a aceleração. Esse comportamento não era previsto por nenhum modelo cosmológico considerado realístico até então. Curiosamente, a constante cosmológica de Einstein, apontada por ele próprio como o maior erro de sua vida, era capaz de explicar tal expansão acelerada. Todavia, considerar uma constante cosmológica faz surgir grande dilema na cosmologia moderna. Pelas contas de Riess, Schmidt e Perlmutter, aproximadamente 70% da energia do universo deve-se a essa componente desconhecida, que hoje é tratada como energia escura. Posteriormente, outras fontes de dados cosmológicos, como as medidas das anisotropias da radiação cósmica de fundo apontaram também para esse mesmo resultado (KOMATSU et al., 2011; WEINBERG et al., 2013). Atualmente, a procedência dessa forma escura de energia é um problema em aberto na física.

O modelo cosmológico atual de maior credibilidade, o Λ CDM,⁵ é muito simples e se ajusta aos dados observacionais de maneira bastante satisfatória (TEGMARK et al., 2004b; SPERGEL et al., 2003). Seu problema reside no fato de considerar de forma *ad hoc* a existência de componentes escuras que ainda não puderam ser diretamente identificadas por meio de experimentos. Surge então uma importante área de pesquisa que se empenha em construir modelos onde o setor escuro (energia e matéria escura), que abrange cerca de 95% da energia de universo, é unificado em apenas uma única componente. Esses modelos desempenham um papel importante sobretudo no estudo do universo primordial pois abrem uma extensa gama de possibilidades de modelagem, cada uma com uma grande potencialidade de gerar significativas alterações no processo cosmológico de formação de estruturas (PIETROBON et al., 2008; PIATTELLA et al., 2010; BERTACCA; BARTOLO; MATARRESE, 2010; BERTACCA et al., 2011). Essa dissertação lida com um desses modelos unificados de matéria e energia escura.

² Supernova Search Team Collaboration.

³ Supernova Search Team Collaboration.

⁴ The Supernova Cosmology Project.

⁵ O modelo Λ CDM (do inglês Λ -Cold Dark Matter) é composto por $\sim 5\%$ de matéria bariônica, $\sim 25\%$ de matéria escura e $\sim 70\%$ de energia escura.

2 COSMOLOGIA BÁSICA

A fim de se adentrar nos estudos cosmológicos, é necessário entender os desafios que tal jornada propicia. Não é novidade que a cosmologia é uma ciência que aborda aspectos da natureza do universo. Todavia, destaca-se um enorme abismo entre tal ciência em detrimento das demais no que tange a escalas onde os fenômenos físicos ocorrem. Galáxias, aglomerados galácticos e todos objetos tais como esses apresentam dimensões tão superiores as escalas com que estamos habituados, que estudá-los deve ser uma tarefa a ser realizada com extremo cuidado. O método científico deve ser aplicado de modo se obter resultados que independam do senso comum humano.

Esse discurso pode parecer um pouco preciosista, mas de maneira nenhuma deve ser ignorado. Para ser ter ideia, sabe-se atualmente que a teoria da Relatividade Geral (RG) é a mais adequada para descrição de efeitos gravitacionais responsáveis pela dinâmica cósmica. No entanto, em algumas áreas de estudo astrofísicos por exemplo, a abordagem relativística é desnecessária visto que as escalas envolvidas estão no limite em que a RG e a Teoria da Gravitação Universal de Newton são equivalentes. Um estudo cosmológico à nível de gravitação newtoniana seria completamente factível (RYDEN, 2003). De certo modo, não seria correto dizer que tal abordagem é equivocada por conta da simplificação algébrica associada a tal procedimento; mas é dever do pesquisador que realiza o estudo delimitar as escalas de validade dos resultados newtonianos obtidos. Nesse caso por exemplo, uma abordagem newtoniana negligenciaria conceitos relativos a curvatura homogênea do universo e constante cosmológica; ambos efeitos imperceptíveis para escala humana mas que exercem significativa influência na dinâmica cósmica.

2.1 EQUAÇÕES DA COSMOLOGIA

Uma abordagem relativística é indispensável para se obter uma compreensão geral da evolução macroscópica do universo. Na RG, os vínculos matemáticos entre as grandezas cosmológicas estão expressos na relação tensorial (D'INVERNO, 1992):

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

conhecida como Equações de Campo de Einstein (ECE), em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ o escalar de curvatura. Tais grandezas associam-se a geometria espaço-temporal e estão relacionadas ao conteúdo energético, descrito através do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Estamos utilizando aqui a convenção de soma: em uma expressão tensorial, um índice é somado se aparece simultaneamente em posição covariante (índice inferior) e contravariante (índice superior).

Em uma determinada estrutura espaço-temporal, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ carrega todas as propriedades intrínsecas de curvatura. As quantidades $R_{\mu\nu}$ e R são grandezas oriundas de um tensor de 4ª ordem, $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$, conhecido como tensor de curvatura de Riemann, que basicamente traz informação sobre a variação da direção de um vetor geral sob transporte paralelo ao longo de uma curva fechada traçada sobre a variedade (SABBATA; GASPERINI, 1985). Como $g_{\mu\nu}$ permite descrever deslocamentos infinitesimais sobre essa variedade, é apenas natural que o tensor de Riemann dependa do tensor métrico. Desse modo, o lado esquerdo da Eq.(2.1) constitui um tensor covariantemente conservado que define a curvatura do espaço-tempo. Por sua vez, o lado direito da equação é proporcional ao tensor energia momento $T_{\mu\nu}$ que carrega informação sobre as fontes de gravitação: massa, energia, momento e carga elétrica, por exemplo. A beleza das equações de Einstein reside nessa interação recíproca entre curvatura e fonte.

Para casos gerais, a Eq.(2.1) não pode ser resolvida analiticamente pois se trata de um conjunto de 10 equações diferenciais não lineares acopladas. Na próxima seção, nos encarregaremos de investigar e constatar que, da maneira como o universo se configura, 6 dessas 10 equações são redundantes devido a argumentos de simetria. Como resultado, o lado esquerdo de (2.1) depende apenas de uma variável dinâmica conhecida como *fator de escala*. Posteriormente, discutiremos as hipóteses envolvidas na caracterização do conteúdo energético do universo para que no fim, todos esses resultados sejam mesclados nas ECE e forneçam as equações necessárias para determinação da dinâmica cosmológica.

2.1.1 Princípio Cosmológico e a Métrica FLRW

Nas escalas de grandeza onde reside nosso senso comum, nos deparamos com objetos materiais com distribuição homogênea e isotrópica, tal como um volume de água em um copo ou uma barra de um metal qualquer.¹ Todavia, com o conhecimento científico alcançado pela humanidade atualmente, sabemos que a medida que consideramos porções menores de matéria, as heterogeneidades começam a aparecer: imperfeições, rugosidades, grãos, moléculas e átomos. Nessa escala, temos um sistema com massa atômica quase que na totalidade concentrada no núcleo e um espaço vago relativamente grande em seu entorno, composto apenas pela eletrosfera. Conseqüentemente, essa enorme heterogeneidade existente na distribuição mássica atômica se torna desprezível a medida que consideramos porções cada vez maiores de matéria, a ponto da porção se apresentar homogênea nas escalas de atuação humana.

Essa analogia ilustra um conceito chave para a introdução do *princípio cosmológico*.² Quando apontamos o telescópio para o céu, observamos os astros como pequenos pontos

¹ Obviamente, desconsiderando aqueles com estruturas cristalinas portadoras propriedades dependentes de direção.

² Carrol usa o termo Princípio Copernicano (em tradução livre de *Copernican Principle*). (CARROLL, 2004)

de aglomeração de matéria quando comparados com o vazio ao seu redor. A medida que aumentamos as escalas de observação, começam a se formar pequenas estruturas cósmicas, como cinturões de asteróides, sistemas estelares, galáxias e aglomerados galácticos. Seguindo a linha de raciocínio apresentada pela analogia do parágrafo anterior, existe um intervalo em que as escalas de grandeza são grandes o suficiente tal que a distribuição de matéria no universo apresenta-se de maneira homogênea e isotrópica. Tal conceito foi inserido primeiramente por Isaac Newton em *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* para explicar o estado aparentemente “estático” das estruturas cósmicas em grandes distâncias (NEWTON, 1999).

Segundo Novello et al. (2010), podemos formalizar o princípio cosmológico em duas afirmações :

- a) “As leis da Física, tal como as determinamos em nossa vizinhança são válidas em qualquer região e momento da história da Universo, em qualquer escala de distância e tempo.”
- b) “O Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico”

Como já chegamos a comentar no início desse capítulo, a Relatividade Geral será utilizada para se obter as equações da Cosmologia. Precisamos então transcrever o princípio cosmológico em termos relativísticos. Por meio da sua utilização, tal princípio aponta a inexistência de direções ou pontos especiais no universo. Nesse cenário um experimento científico apresentará os mesmos resultados independentemente da posição e direção do aparato experimental.

Existe portanto uma restrição nas estruturas geométricas espaciais possíveis: aquelas cuja curvatura se apresenta de forma homogênea e isotrópica. É possível provar que apenas três estruturas apresentam essa característica. A Fig.1 traz representações bidimensionais de um espaço riemanniano para cada uma delas. A primeira da esquerda para direita é uma superfície esférica caracterizada por uma curvatura positiva. A superfície centralmente disposta é um plano com curvatura nula, enquanto que a última é uma superfície hiperbólica negativamente curva. Posteriormente, daremos significado às expressões "curvatura positiva" e "curvatura negativa". Por hora, é suficiente destacar a diferença entre tais estruturas geométricas pela soma dos ângulos internos nos triângulos nelas mapeados. Em uma superfície plana, a soma será π . Em uma curvatura homogênea positiva, a soma dos ângulos internos será sempre maior que π , ao passo que ela será sempre menor que π em uma superfície de curvatura negativa (RYDEN, 2003).

O pequeno exemplo anterior é meramente ilustrativo, visto que aborda apenas espaços riemannianos bidimensionais. Nosso objetivo é abordar o espaço-tempo quadridimensional da experiência, que inclui a dimensão temporal além das três dimensões

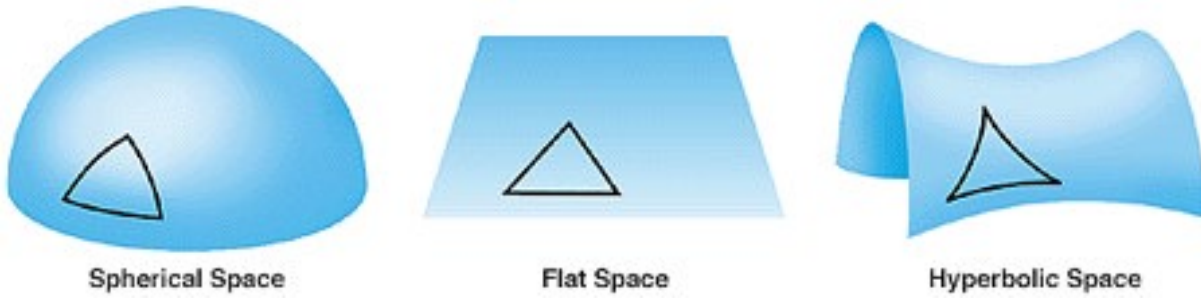


Figura 1 – Representação bidimensional das curvaturas homogêneas do universo. Em todos os casos, um triângulo equilátero é mapeado sobre a superfície em questão.

Fonte: (NCSA, 1995)

espaciais (comprimento, largura e altura).³ Nesse caso, o elemento de linha ds^2 mais geral possível de uma métrica homogênea e isotrópica será dado por (WEINBERG, 1972):⁴

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2/R_0^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.2)$$

onde

$$\kappa = \begin{cases} +1, & \text{curvatura positiva} \\ 0, & \text{curvatura nula} \\ -1, & \text{curvatura negativa} \end{cases}$$

e R_0 é o raio de curvatura. A Eq.(2.2) é conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (Métrica FLRW) e foi deduzida independentemente nos trabalhos dos cientistas Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard P. Robertson e Arthur Geoffrey Walker ao longo das décadas de 1920 e 1930 (FRIEDMANN, 1922; FRIEDMANN, 1924; LEMAÎTRE, 1927; LEMAÎTRE, 1931; LEMAÎTRE, 1933; ROBERTSON, 1935; ROBERTSON, 1936a; ROBERTSON, 1936b; WALKER, 1937). Apesar da hipótese do princípio cosmológico parecer um tanto exagerada (já que percebemos localmente suas inhomogeneidades), o universo é extremamente bem descrito pela métrica FLRW (GREEN; WALD, 2014).

Utilizando a expressão (2.2) para o elemento de linha diferencial obteremos as propriedades geométricas da métrica FLRW. Comparando a Eq.(2.2) com

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

³ Matematicamente, o espaço-tempo é conhecido como um espaço pseudo-riemanniano por conta da coordenada temporal se apresentar com sinal diferente das coordenadas espaciais.

⁴ O elemento de linha permite medir distância infinitesimais sobre a variedade diferencial.

podemos identificar a forma covariante do tensor métrico como:

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-kr^2/R_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

em que $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$. A métrica contravariante é a matriz inversa da Eq.(2.3):⁵

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2/R_0^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2a^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Com a métrica definida, podemos calcular os coeficientes de conexão:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} (\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}), \quad (2.5)$$

em que as componentes não nulas estão listadas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^0 = \frac{a \dot{a}}{1 - kr^2/R_0^2} \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a \dot{a} \quad \Gamma_{33}^0 = r^2 a \dot{a} \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2/R_0^2} \quad \Gamma_{22}^1 = -r (1 - kr^2/R_0^2) \quad \Gamma_{33}^1 = -r (1 - kr^2/R_0^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{33}^2 = -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \end{array} \right. \quad (2.6)$$

É conveniente elucidar que o operador “.” acima da variável indica derivação total com respeito a coordenada temporal comóvel t .

Com os coeficientes de conexão, calculamos o tensor de Ricci por meio da expressão:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta. \quad (2.7)$$

⁵ Isso acontece porque o tensor métrico é recíproco, i.e., $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$.

Esse procedimento produz um tensor misto diagonal, cujos elementos não nulos dados por:

$$\begin{cases} R_0^0 = -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_1^1 = -\left(\frac{2k}{R_0^2 a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) \\ R_2^2 = -\left(\frac{2k}{R_0^2 a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) \\ R_3^3 = -\left(\frac{2k}{R_0^2 a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) \end{cases} . \quad (2.8)$$

onde $R^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}$.

O próximo passo é obter o escalar de curvatura calculando o traço do tensor de Ricci:

$$R = R^\mu{}_\mu = -\frac{6}{c^2} \left(\frac{k}{R_0^2 a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) \quad (2.9)$$

As Eqs.(2.8) e (2.9) permitem calcular o tensor misto de Einstein $G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R$:

$$\begin{cases} G_0^0 = 3\frac{k}{R_0^2 a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \\ G_1^1 = \frac{k}{R_0^2 a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} \\ G_2^2 = \frac{k}{R_0^2 a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} \\ G_3^3 = \frac{k}{R_0^2 a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} \end{cases} . \quad (2.10)$$

Tendo obtido o tensor de Einstein, encerramos os cálculos daquilo que precisávamos a respeito das propriedades geométricas da métrica FLRW para se resolver a Eq.(2.1). É necessário, nesse momento, definir as propriedades das componentes que atuam como fonte de gravitação. Com isso, obteremos a expressão para o tensor energia-momento do universo.

2.1.2 Fontes de Curvatura

Abordamos até agora apenas a caracterização geométrica do espaço-tempo. Para essa realização, partimos do princípio cosmológico, que assume homogeneidade e isotropia espacial. Acontece que tais hipóteses também influenciam nas propriedades da distribuição energética no univeso (QUARTIN, 2008; REIS, 2007). Da teoria geral do fluido cósmico, o princípio cosmológico requer um tensor energia momento da forma de um fluido perfeito, visto que os observadores comóveis ao fluxo da expansão cósmica não verificam fluxos de energia ou tensões anisotrópicas (TORIBIO, 2007). Na assinatura tempo-positivo, o tensor energia momento de fluido perfeito será:

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p) u^\mu u_\nu - p\delta^\mu{}_\nu. \quad (2.11)$$

em que ρ , p e $u^\mu = \left(1, \frac{d\mathbf{x}}{dx^0}\right)$ são respectivamente a densidade de energia, pressão e as componentes da 4-velocidade. Vale ressaltar que a 4-velocidade está sujeita ao vínculo $u^\mu u_\mu = 1$.

No sistema de coordenadas comóvel, o observador está sempre em repouso com respeito ao fluido cosmológico, ainda que o espaço-tempo esteja em movimento. Concluimos que, as componentes espaciais da 4-velocidade são todas nulas e a componente temporal dada por $u^0 = 1$. Pode-se portanto escrever o tensor energia momento como:

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Essa é a forma que nos será útil para resolver (2.1). No entanto, antes de prosseguirmos, podemos obter um outro importante resultado. Por meio da conservação covariante de T_ν^μ , expressa por $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$, temos:⁶

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_\nu^\alpha = 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) + \dot{p} = 0.$$

Logo,

Equação de Conservação de Energia

$$\dot{p} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0, \quad (2.13)$$

que é uma relação que expressa a conservação total de energia do fluido cósmico homogêneo e isotrópico. A densidade de energia e a pressão existentes em (2.12) e (2.13) são a soma das densidades de energia e pressão de cada uma das componentes cósmicas.

Tendo determinado o tensor de Einstein e o tensor energia momento, podemos finalmente utilizar as equações de campo de Einstein para obter as equações da cosmologia.

2.1.3 Equações de Friedmann

As equações de campo de Einstein podem ser escritas assim:

$$G^\mu_\nu = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\nu. \quad (2.14)$$

Ressaltamos que T^μ_ν representa a soma dos tensores energia-momento de todas as componentes. A componente temporal dessa equação fornece a relação conhecida como *Primeira Equação de Friedmann*:

⁶ ∇ é a notação para derivada covariante. Essa derivada é do tipo $\nabla = \partial + \Gamma$, onde ∂ é a derivada ordinária e há tantos símbolos de Christoffel Γ quantos forem os índices do objeto que está sendo covariantemente derivado (SABBATA; GASPERINI, 1985).

$$G^0_0 = \frac{8\pi G}{c^4} T^0_0 \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho ,$$

onde usamos as Eqs. (2.10) e (2.12).

Equação de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(a) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} . \quad (2.15)$$

É comum escrever a Eq.(2.15) de uma forma distinta. Para isso, define-se o parâmetro de Hubble:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.16)$$

e o parâmetro de densidade:

$$\Omega(a) = \frac{\rho(a)}{\rho_{cr}} , \quad (2.17)$$

em que

$$\rho_{cr} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \quad (2.18)$$

é a densidade de energia crítica e H_0 é o valor do parâmetro de Hubble medido no tempo cósmico atual $t = t_0$. Nesse contexto, pode-se interpretar também o termo de curvatura $-kc^2/R_0^2 a^2$ na Eq.(2.15) como uma componente cósmica, com parâmetro de densidade:

$$\Omega_k(a) = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2 a^2} = \Omega_{k0} a^{-2}. \quad (2.19)$$

com $\Omega_{k0} \equiv -kc^2/R_0^2 H_0^2$.

Desse modo, a equação de Friedmann torna-se:

$$H^2 = H_0^2 \Omega_T, \quad (2.20)$$

em que $H = H(a)$ e o parâmetro de densidade total $\Omega_T = \Omega_T(a)$ é definido por:

$$\Omega_T(a) \equiv \Omega_k(a) + \sum_i \Omega_i(a).$$

Ressalta-se que o somatório referente ao índice i deve levar contar todos os componentes do fluido cósmico que preenchem o universo, sendo que para cada um temos $\Omega_i = \rho_i/\rho_{cr}$.

As componentes espaciais das equações de campo de Einstein por sua vez fornecem:

$$G^i_i = \frac{8\pi G}{c^4} T^i_i \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{c^2 k}{R_0^2 a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} p,$$

onde empregamos novamente as Eqs. (2.10) e (2.12). No termo entre parênteses desta última equação, podemos utilizar a Eq.(2.15) e obter:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} (\rho + 3p) , \quad (2.21)$$

que é a *Segunda Equação de Friedmann*.

A Eq.(2.20) dita a dinâmica do fator de escala ao longo do tempo. Mas para se obter tal comportamento, é necessário escrever o parâmetro de densidade de energia total, que ali aparece, em termos do fator de escala. Para o parâmetro de densidade de curvatura, essa relação já é conhecida, conforme (2.19). Já para os parâmetros de densidade das outras componentes (e.g. matéria bariônica, radiação, dentre outras), é conveniente utilizar a equação de conservação de energia (2.13) em conjunto com uma equação constitutiva do tipo $p = p(\rho)$. A Eq.(2.13) é válida componente a componente desde que desconsideremos eventuais interações entre um tipo de fluido e outro.

A Eq.(2.21) poderia ser utilizada no lugar do vínculo de conservação de energia. O fato do sistema ser aparentemente sobredefinido ocorre em virtude da conservação de energia ser um conceito implícito nas equações de Einstein. Podemos obter qualquer uma das Eqs. (2.13), (2.20) ou (2.21) combinando as outras duas. A experiência mostra que é algebricamente mais favorável trabalharmos com a primeira equação de Friedmann combinada com a equação de fluido (2.13).

2.1.4 Fenomenologia das Equações de Estado

Devemos ser capazes de caracterizar cada uma das componentes cósmicas de acordo com a suas respectivas naturezas físicas. Nesta seção buscamos introduzir o assunto estudando alguns tipos fiduciais de fluidos cósmicos. É comum em cosmologia supor que a pressão gerada por uma determinada componente depende apenas da sua densidade de energia $p_i = p_i(\rho_i)$. Tal hipótese, quando não é válida, deve ser encarada como uma primeira ordem de aproximação.

Comumente, são consideradas equações de estado do tipo:

Equação de Estado

$$p_i = w_i(a) \rho_i(a) . \quad (2.22)$$

visto que tal forma funcional engloba a maioria dos casos de interesse cosmológico.

Pela equação de conservação de energia (2.13), podemos obter a evolução da densidade de energia da componente com equação de estado dada por (2.22) em termos do fator de escala:

$$\frac{d\rho_i}{da} = -\frac{3\rho_i(a)}{a} (w_i(a) + 1) ,$$

i.e.

$$\rho_i(a) = \frac{\rho_{i0}}{a^3} \exp \left[-3 \int_1^a \frac{w_i(a')}{a'} da' \right]. \quad (2.23)$$

Um caso específico de extrema importância ocorre quando w é constante, de tal modo que a densidade de energia em função do fator de escala é calculada conforme:

$$\rho_i(a) = \rho_{i0} a^{-3(w_i+1)} \quad (w = \text{constante}). \quad (2.24)$$

Para componentes onde $w \neq \text{const}$, a evolução da densidade de energia da componente só será obtida por (2.23) caso uma expressão analítica para $w_i(a)$ seja conhecida.

Na sequência, vamos comentar resumidamente sobre a modelagem de algumas componentes clássicas da cosmologia padrão que apresentam evolução da densidade de energia de acordo com (2.24).

Matéria Bariônica O primeiro fluido de destaque é aquele composto pela distribuição de galáxias no cenário cósmico. Comparando as dimensões galácticas em relação ao universo observável, levando ainda em conta a distância de separação espacial média entre galáxias, podemos inferir que um fluido cósmico desse tipo tem características de um gás ideal. É extremamente rarefeito e composto por partículas pontuais de dimensões desprezíveis na escala de megaparsecs.⁷ A equação de estado nesse caso é bem conhecida:

$$pV = Nk_B T.$$

A massa total pode ser escrita como $M = Nm$, sendo N o número de partículas e m uma massa média de cada galáxia. A equação acima pode ser escrita como:

$$p = \frac{\rho}{m} k_B T = \rho_0 \frac{k_B T/m}{c^2} = \frac{k_B T/m}{c^2} \sqrt{\rho^2 - \frac{\mathbf{p}^2 c^2}{V^2}},$$

em que ρ_0 a densidade de energia de repouso, ρ a densidade de energia total, \mathbf{p}^2 o módulo médio do 3-momento das galáxias e V o volume que contém o gás. Note que foi usada aqui a relação de dispersão de energia relativística.

Teoricamente, as galáxias estariam em repouso com respeito a um observador comóvel. Obviamente, essa é uma aproximação, visto que são observados efeitos de velocidades peculiares além das velocidades de rotação galácticas. No entanto, essas velocidades são varias ordens de grandeza mais baixas do que a velocidade da luz. Como consequência, a energia cinética será desprezível com respeito a energia de repouso. Logo, a densidade de energia do fluido galáctico terá contribuição quase que exclusiva da energia de repouso ($\rho_0 \approx \rho$): o segundo termo dentro da raiz é desprezível na equação de p acima.

⁷ 1 megaparsec (Mpc) equivale a 3.09×10^{22} metros.

A teoria cinética dos gases nos mostra que existe uma relação entre a temperatura e velocidade quadrática média que é dada por $m \langle v^2 \rangle = 3k_B T$. Tal expressão nos permite reescrever a equação de estado para o fluido galáctico como:

$$p \approx \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \rho \approx 0 . \quad (2.25)$$

visto que $\langle v^2 \rangle / c^2 \approx 0$ em virtude das velocidades individuais das galáxias serem não relativísticas. Como consequência, o fluido de galáxias não gera pressão. Essa característica é atribuída a fluidos de matéria tipo poeira. Outro tipo de fluido cosmológico clássico com comportamento de poeira é a matéria escura não relativística, que será abordada posteriormente.

Radiação Desde o completo desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral, modelos de universos dinâmicos foram elaborados. Todavia, foi somente com a descoberta do afastamento de galáxias por Edwin Hubble que tais modelos ganharam notoriedade. Em 1948, a teoria cosmológica de Alpher & Gamow, pejorativamente cunhada por Hoyle como teoria do Big Bang, foi a primeira capaz de fazer previsões precisas acerca da natureza do universo e, com isso, trazer a Cosmologia à era de precisão que estamos vivenciando atualmente. Como exemplo destaca-se a estimativa da abundância de elementos leves (ALPHER; BETHE; GAMOW, 1948) e a existência de uma radiação residual proveniente do desacoplamento fóton-bárion. Esse fundo de radiação, com temperatura de aproximadamente $2.73 K$, foi descoberto por Penzias e Wilson (1965) e exaustivamente estudada com os dados do satélite COBE de 1990 (BENNETT et al., 1996), da missão WMAP de 2003-2011 (BENNETT et al., 2013) e, recentemente, da missão Planck 2013-2015 (PLANCK Collaboration et al., 2013).

Esse fundo de radiação pode ser modelado como um gás de fótons em equilíbrio térmico. O tensor energia momento eletromagnético associado influencia a dinâmica cósmica. Atualmente, a contribuição da radiação na dinâmica cósmica é desprezível devido a baixa densidade de energia dos fóton. Porém, isso não é verdade no início da história cósmica quando o universo era dominado por radiação e partículas ultra-relativísticas. Essa conclusão segue da equação de estado para um gás de fótons (WELFORD, 1975),

$$p = \frac{1}{3} \rho , \quad (2.26)$$

atrelada a um comportamento do tipo fluido perfeito (que se justifica pela baixa probabilidade da interação fóton-fóton). A Eq. (2.26) mostra a importância da consideração das componentes relativísticas em modelos cosmológicos, apesar da desprezível contribuição atual.

Em alguns casos, como aquele que vamos estudar nesse trabalho, não existe contribuição significativa da radiação em alguns períodos cósmicos. Nestes casos, é conveniente

negligenciar componentes ultra-relativísticas, desde que se tenha o controle do erro resultante por adotar tal postura.

Matéria Escura não Relativística (CDM)⁸ Zwicky (1937) junto com seus colaboradores, mediu a razão massa/luminosidade no aglomerado de Coma (ZWICKY, 1937) verificando uma discrepância de 2 ordens de grandeza do previsto (NOVELLO et al., 2010). A conclusão é que existe uma incoerência entre a dinâmica orbital observada e a quantidade de matéria luminosa. Posteriormente, Rubin e Ford Jr. (1970) estudaram as curvas de velocidade de rotação de galáxias e concluíram que elas estavam incoerentes com a previsão teórica. Ambos os fenômenos podem ser explicados assumindo-se a existência de matéria escura não bariônica que não interage com radiação por intermédio de espalhamento Compton. Atualmente, matéria escura é necessária também na explicação dos efeitos de lentes gravitacionais (MASSEY; KITCHING; RICHARD, 2010), e na formação de estrutura semeando pontos de acreção de matéria (PRIMACK, 1997).

Do ponto de vista termodinâmico, a matéria escura se equivale ao comportamento matéria tipo poeira dos bárions (com a óbvia diferença de não interagir com radiação). Por esse motivo, a equação de estado é:

$$p = 0 . \quad (2.27)$$

Energia Escura Quando nos primórdios da Relatividade Geral, Einstein percebendo o comportamento dinâmico de sua teoria gravitacional, adicionou em suas equações um parâmetro repulsivo Λ , a finalidade era de modelar um universo estático, filosoficamente mais coerente em sua visão. Porém, com a comprovação da dinâmica cósmica por Edwin Hubble, Einstein assumiu que tal postura era errônea. Sete décadas depois, a determinação de um método de calibração de luminosidade de supernovas do tipo Ia propiciou dados observacionais que puderam ser utilizados em ajustes de parâmetros cosmológicos. Foi verificado, com isso, que um modelo composto só por radiação, matéria bariônica e matéria escura não era capaz de explicar os dados observacionais, visto que esses estes indicavam um universo acelerado. Ou seja, existia uma energia escura cósmica que não estava sendo considerada. Em contrapartida, ao se considerar o parâmetro de constante cosmológica Λ nas equações, a cosmologia de Friedmann tornou-se perfeitamente condizente com os dados de SNIa. Nascia um problema: como explicar essa energia escura que guia a expansão acelerada do universo?

A respeito de sua natureza, a energia escura pode ser modelada de outras maneiras que não como constante cosmológica. Em uma dessas formas, supõe-se um fluido ideal homogeneamente distribuído no universo com uma equação de estado do tipo $p = w\rho$,

⁸ Do inglês *Cold Dark Matter*.

onde $w < -1/3$. Isto é suficiente para produzir uma aceleração cósmica. No caso específico de constante cosmológica, temos $w = -1$, tal que

$$p = -\rho \quad (2.28)$$

Em outros modelos de energia escura, supõe-se uma equação de estado do tipo $p = w(a)\rho(a)$, onde w é dependente do fator de escala (HANNESSTAD; MÖRTSELL, 2002; COORAY; HUTERER, 1999; CHEVALLIER; POLARSKI, 2001; LINDER, 2003; PADMANABHAN; CHOUDHURY, 2003; GERKE; EFSTATHIOU, 2002; CUZINATTO; de MORAIS, 2014). Todas essas parametrizações visam resolver a questão fenomenológica da energia escura. O problema mais profundo que remete a natureza dessa energia permanece em aberto, ao menos até a data de apresentação desse trabalho.

Alguns trabalhos propõem que a aceleração cósmica atual surge de uma não aplicabilidade da relatividade geral em grandes escalas, justificando assim a existência de novas teorias de gravitação. Como exemplo, as teorias escalar-tensoriais de Brans e Dicke (1961), teoria de MOND de Milgrom (2001) com a generalização TeVeS de Bekenstein (2004) e as teorias de gravitação $f(R)$ (BUCHDAHL, 1970) tentam substituir os efeitos gravitacionais das componentes escuras por modificações na teoria de gravitação.

2.2 MODELOS COSMOLÓGICOS

Para se definir um modelo cosmológico, é preciso determinar quantas e quais são as componentes que preenchem o universo. De acordo com a natureza de cada um desses fluidos, define-se a função $w_i(a)$ da equação de estado. Com a equação estado definida, obtém-se a evolução do parâmetro de densidade com respeito ao fator de escala, fazendo-se uso das Eqs. (2.13), (2.17) e (2.22):

$$\dot{\Omega}_i + 3\frac{\dot{a}}{a} [w_i(a) + 1] \Omega_i(a) = 0 ,$$

resultando em

$$\Omega_i(a) = \Omega_{i0} a^{-3} \exp\left(-3 \int_0^a \frac{w_i(a')}{a'} da'\right) , \quad (2.29)$$

sendo Ω_{i0} fixado por condições iniciais adequadamente escolhidas. Com as funções $\Omega_i(a)$ individuais, é possível calcular o parâmetro de densidade total, que é substituído na equação de Friedmann (2.20):

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_k(a) + \sum_{i=1}^n \Omega_i(a)} . \quad (2.30)$$

O próximo passo é definir a geometria do universo, fazendo $k = \pm 1$ para espaço uniformemente curvo e $k = 0$ para espaço plano e com isso, calcular Ω_{k0} conforme a Eq.(2.19).

Por fim, a evolução temporal do fator de escala será obtida conforme equação diferencial:

$$\frac{da}{dt} = a H(a). \quad (2.31)$$

Nos próximos tópicos, vamos utilizar o algoritmo acima para estudar alguns modelos simples de universo juntamente com algumas propriedades cosmológicas.

2.2.1 Modelos unicomponente com w constante

Na seção 2.1.4 foram apresentadas as equações de estado das componentes cosmológicas clássicas, à saber: radiação, matérias bariônica e escura, e constante cosmológica. Todas compartilham a mesma propriedade: o parâmetro w da equação de estado é constante no tempo, valendo respectivamente $1/3$, 0 e -1 . Essas componentes coexistem no universo e contribuem simultaneamente para a dinâmica cósmica. Porém, houve alguns períodos da história do universo em que um dentre esses fluidos teve uma densidade de energia predominante, tal que a dinâmica cosmológica fosse quase que exclusivamente dependente dele. Podemos obter informações cosmológicas significativas desses períodos estudando modelos cosmológicos unicomponentes.

Vamos imaginar um universo preenchido por um determinada componente com parâmetro da equação de estado dado por w . De acordo com a Eq.(2.29), a evolução do parâmetro de densidade no universo será:

$$\Omega(a) = \Omega_0 a^{-3(w+1)}, \quad (2.32)$$

onde temos o aparecimento do parâmetro Ω_0 que é um valor que deve ser determinado observacionalmente. Essa constante é interpretada como o valor que parâmetro de densidade assume quando o fator de escala é 1 (convencionalmente, correspondente ao tempo atual).

Assim sendo, a equação de Friedmann para um universo com uma componente apenas será:

$$H^2(a) = H_0^2 \Omega_0 a^{-3(w+1)} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}. \quad (2.33)$$

Substituindo-a em (2.31), podemos obter a evolução do fator de escala em função do tempo:

$$\frac{da}{dt} = a \sqrt{H_0^2 \Omega_0 a^{-3(w+1)} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}}. \quad (2.34)$$

Existem evidências recentes bastante significativas que indicam que em larga escala, o universo tem curvatura nula (PLANCK Collaboration et al., 2014).⁹ Nesse caso, a Eq.(2.34) pode ser simplificada para:

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_0} a^{1-\frac{3}{2}(w+1)}$$

que, quando integrada produz:

$$a(t) = \begin{cases} \left[1 + \frac{3(w+1)}{2} H_0 \sqrt{\Omega_0} (t - t_0) \right]^{2/3(w+1)} & (\text{para } w \neq -1) \\ \exp \left[H_0 \sqrt{\Omega_0} (t - t_0) \right] & (\text{para } w = -1) \end{cases} \quad (2.35)$$

Um gráfico representando o comportamento da Eq.(2.35) para as componentes de radiação, matéria e constante cosmológica pode ser visualizado na Fig. 2. Note que, partindo de um ponto de referência onde $t = t_0$ e $a = 1$, um modelo cosmológico unicomponente produzirá um universo mais antigo quanto menor for o valor de w . Para componentes com $w = 1/3$ e $w = 0$, o universo se expande de maneira desacelerada a partir de um Big Bang. Em contrapartida, a solução exponencial da constante cosmológica requer um universo com fator de escala inicial.

O fato do universo se expandir desaceleradamente para radiação e matéria, e aceleradamente para constante cosmológica, pode ser compreendido ao se analisar a segunda equação de Friedmann em (2.21), considerando $p = w\rho$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{c^2} (1 + 3w) . \quad (2.36)$$

Qualquer componente com valor de w menor que $-1/3$ irá contribuir para que a velocidade de expansão do universo aumente ($\ddot{a} > 0$). Contrariamente, casos onde $w > -1/3$ geram uma contribuição de expansão desacelerada ($\ddot{a} < 0$).

2.2.2 Modelo Λ CDM

Já sabemos as propriedades físicas gerais de alguns períodos cósmicos específicos em virtude do estudo da cosmologia de universos unicomponentes. No entanto, nada podemos afirmar a respeito da ordem em que os fenômenos ocorreram. Para esse fim, necessitamos modelar o universo de maneira mais realística, onde as componentes coexistam e contribuam simultaneamente para a dinâmica cósmica.

O modelo físico de universo melhor aceito atualmente é denominado Λ CDM, conhecido muitas vezes também como modelo cosmológico padrão. Ele é formulado assumindo a existência das seguintes componentes:

⁹ A medição da curvatura homogênea aponta um universo plano com significativa confiança. Vamos assumir esse resultado como um indicativo de algo mais profundo e realizar o estudo a hipótese de curvatura nula.

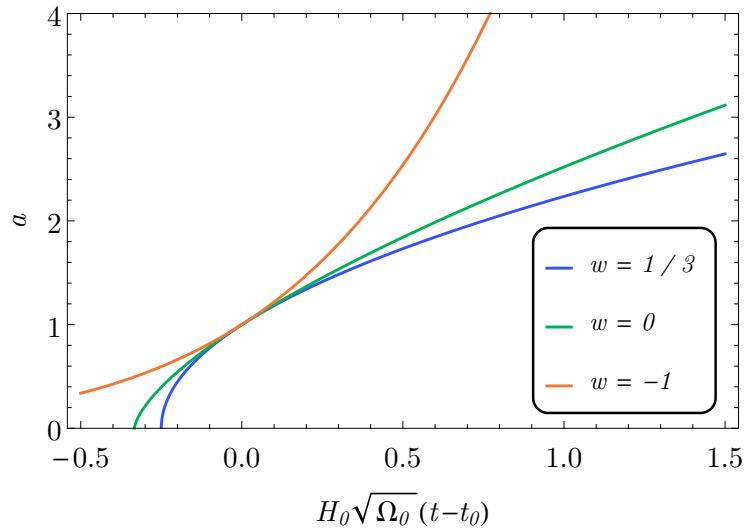


Figura 2 – Comportamento do fator de escala para modelos cosmológicos unicomponentes para radiação, matéria e constante cosmológica. O tempo t_0 é aquele onde o fator de escala vale 1.

Fonte: Do autor.

- **Radiação**, pela radiação cósmica de fundo e o fundo de neutrinos;
- **Matéria bariônica**, pela distribuição de galáxias;
- **Matéria escura**, inferida pela dinâmica de rotação de galáxias e lentes gravitacionais, dentre outros fenômenos; e
- **Energia Escura**, pela aceleração cósmica atual.

Apesar de ser facilmente implementável, não estamos interessados em estudar modelos cosmológicos com curvatura. Essa hipótese de trabalho se motiva no fato de que as observações em larga escala apontam um universo espacialmente plano (SUZUKI et al., 2012; PLANCK Collaboration et al., 2014). Portanto, vamos considerar $k = 0$ e consequentemente $\Omega_{k0} = 0$ a partir daqui.

A radiação cósmica de fundo e o fundo de neutrinos são modelados tal como um gás de fótons com equação de estado $p = \rho/3$. Matéria bariônica e escura por sua vez como um gás de poeira, com pressão nula, e a energia escura como constante cosmológica de equação de estado dada por $p = -\rho$. A evolução do parâmetro de densidade para cada

Tabela 1 – Parâmetros do modelo Λ CDM obtidos com os dados do satélite Planck.

| Parâmetro | Medição |
|---|-------------------|
| H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹) | 67.31 ± 0.96 |
| $\Omega_{r0} \times 10^5$ | 9.234 ± 0.005 |
| Ω_{b0} | 0.04904 ± 0.00086 |
| Ω_{c0} | 0.2642 ± 0.0061 |

Fonte: (PLANCK Collaboration et al., 2001)

componente, de acordo com (2.29) é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_r(a) = \Omega_{r0}a^{-4} \quad (\text{radiação}) \\ \Omega_b(a) = \Omega_{b0}a^{-3} \quad (\text{matéria bariônica}) \\ \Omega_c(a) = \Omega_{c0}a^{-3} \quad (\text{matéria escura}) \\ \Omega_\Lambda(a) = \Omega_{\Lambda0} \quad (\text{constante cosmológica}) \end{array} \right. . \quad (2.37)$$

Calculando a Eq.(2.30) em $a = 1$, conclui-se que a consideração da hipótese de universo sem curvatura resulta no vínculo:

$$\Omega_{r0} + \Omega_{b0} + \Omega_{c0} + \Omega_{\Lambda0} = 1, \quad (2.38)$$

culminando na redução de um grau de liberdade.

Os parâmetros de densidade definem a função de Hubble, dada na Eq.(2.30) como:

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{r0}a^{-4} + (\Omega_{b0} + \Omega_{c0})a^{-3} + 1 - (\Omega_{r0} + \Omega_{b0} + \Omega_{c0})}. \quad (2.39)$$

Nota-se aqui o aparecimento dos parâmetros livres do modelo, $\vec{\theta} = (H_0, \Omega_{r0}, \Omega_{b0}, \Omega_{c0})$, que devem ser determinados a partir das observações. Recentemente, os dados provenientes do satélite Planck de 2015 propiciaram ajustes para esses parâmetros,¹⁰ que estão fornecidos na Tabela 1. Usando esses valores na Eqs. (2.37), concluímos que universo logo após o Big-Bang foi dominado pela radiação. Quando o fator de escala alcançou $a = 2.95 \times 10^{-4}$ ocorreu uma transição de um período de radiação para outro onde a matéria era dominante. Esse regime permaneceu até o fator de escala atingir $a = 0.770$ onde a constante cosmológica passou a ser dominante. O comportamento do parâmetro de densidade de cada componente, assim como o parâmetro de densidade total, pode ser conferido na Fig. 3a.

¹⁰ Para se obter o parâmetro de densidade da radiação, foi utilizada a temperatura da CMB de $T = 2.72548 \pm 0.00057$ obtida por Fixsen (2009) e número efetivo de espécies de neutrinos de $N_{\text{eff}} = 3.046$ conforme o trabalho de Mangano et al. (2002).

Algo que foi mencionado anteriormente e que pode ser observado na Fig. 3a é o fato de que o universo se comportou como se tivesse apenas uma componente em períodos de tempo específicos. Isso pode ser concluído verificando que no gráfico de evolução do parâmetro de densidade da Fig. 3a, o parâmetro de densidade total sempre coincide com o parâmetro de densidade de alguma componente isolada, com exceção das regiões de transição.

A evolução do fator de escala para o modelo é calculada de acordo com a Eq.(2.31):

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{a \sqrt{\Omega_{r0} a^{-4} + (\Omega_{b0} + \Omega_{c0}) a^{-3} + 1 - (\Omega_{r0} + \Omega_{b0} + \Omega_{c0})}}. \quad (2.40)$$

e pode ser visualizada na Fig. 3b.¹¹ A idade do universo obtida é de 13.8 bilhões de anos. Além disso, de acordo com os dados da Tabela 1, podemos notar que atualmente a energia total do universo é composta por 0.01% de radiação, 4.9% de bárions, 26.4% de matéria escura e 68.7% de energia escura.

Tendo definido os modelos cosmológicos, faz-se necessário agora a elaboração de técnicas e ferramentas para realizar comparações entre teoria e dados observacionais. Na seção posterior, faremos um resumo das grandezas físicas que nos serão úteis para tornar factíveis essas comparações.

2.3 PROPRIEDADES E DISTÂNCIAS COSMOLÓGICAS

Anteriormente, descrevemos os passos para se construir a função de Hubble de um modelo cosmológico com a definição das propriedades de suas componentes. Utilizando como exemplo o modelo Λ CDM, calculamos a evolução do parâmetro de densidade em termos do fator de escala e o fator de escala em função do tempo. Tendo sido definido, o segundo passo para a análise de um modelo é a experimentação. No entanto, as propriedades físicas dos dados de fenômenos cósmicos disponíveis muitas vezes não são a função de Hubble ou fator de escala. Em vez disso, são as propriedades e distâncias derivadas de a e $H(a)$ que são acessíveis observacionalmente. Portanto, nosso objetivo agora é abordar quais são essas grandezas que posteriormente atuarão como ponte entre teoria e observação de modelos cosmológicos.

2.3.1 Redshift

Um primeiro parâmetro que podemos definir é conhecido como *redshift*. Praticamente todas as informações cosmológicas à que temos acesso são obtidas pela luminosidade emitida por objetos e fenômenos cosmológicos. Ao se decompor o espectro de luz desses

¹¹ Para considerações a respeito de soluções analíticas do fator de escala no modelo Λ CDM, consulte, por exemplo, a Ref. (ALDROVANDI; CUZINATTO; MEDEIROS, 2006).

objetos, é possível observar deslocamento da frequência de algumas linhas de absorção em relação a posição espectral característica, medida em laboratório. Esse efeito se deve a expansão do espaço-tempo durante o trajeto dos fótons. Nesse contexto, o redshift é definido como:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} = \frac{v}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \quad (2.41)$$

em que λ_0 é o comprimento de onda emitido, λ_1 é o comprimento de onda observado e v a velocidade relativa. A associação com o fator de escala é direta e pode ser obtida com o cálculo de desvio para o vermelho do comprimento de onda emitido no espaço-tempo FLRW (WEINBERG, 1972). Como resultado, temos:

$$1 + z = \frac{1}{a}. \quad (2.42)$$

Note que, nos dias de hoje, $a = 1$ e portanto $z = 0$. Em um universo em expansão, o fator de escala cresce com o tempo, assim, a medida que caminhamos para o passado, a diminui, o que significa que z aumenta. Também de acordo com a Eq.(2.42), o Big Bang ($a = 0$) ocorre no limite $z \rightarrow \infty$.

2.3.2 Lei de Hubble

Expandindo em Taylor a função $a(t)$ em torno de $t = t_0$ e comparando com (2.42), concluimos que $z = H_0(t_0 - t)$. Para galáxias relativamente próximas, a distância pode ser inferida por $d = c(t_0 - t)$, de tal modo que:

$$z = \frac{H_0}{c}d \quad (2.43)$$

Comparando com a Eq.(2.41):

$$v = H_0d, \quad (2.44)$$

que ficou conhecida como a *lei de Hubble*. Ela foi verificada pela primeira vez por Edwin Hubble em 1929 utilizando o telescópio do Monte Wilson na Califórnia e é considerada por muitos o marco inicial da ciência da Cosmologia pois comprova o comportamento dinâmico do universo.

Para variados fins, vamos definir nesse ponto a *distância de Hubble*:

$$D_H = \frac{c}{H_0}. \quad (2.45)$$

2.3.3 Distância Comóvel Transversa

É de conveniência realizar a mudança da coordenada r para χ na métrica FLRW (2.2), através da relação $d\chi = dr/\sqrt{1 - \kappa r^2}$. Com ela, a métrica FLRW será:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.46)$$

onde

$$S_k(\chi) = \begin{cases} R_0 \sin(\chi/R_0) & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ R_0 \sinh(\chi/R_0) & k = -1 \end{cases} \quad (2.47)$$

Define-se a *distância métrica* ou *distância comóvel transversa*¹² como sendo a função $S_k(\chi)$ que aparece multiplicando o elemento de ângulo sólido na métrica FLRW quando escrita da forma (2.46). Logo:

$$D_M = S_k(\chi) \quad (2.48)$$

2.3.4 Distância Comóvel na Linha de Visada

A distância medida por um observador comóvel ao fluxo de Hubble é conhecida como *distância comóvel*. Quando o fator de escala é 1, ela é equivalente a distância própria entre os objetos, e permanece constante à medida que o tempo evolui.

Imagine um feixe de luz emitido na distância comóvel χ chegando radialmente na origem de sistema de referencia sem variação angular durante o trajeto ($d\theta = d\phi = 0$). De acordo com a métrica FLRW, em (2.2), temos:

$$d\chi = c \frac{dt}{a}, \quad (2.49)$$

lembrando que a luz viaja sempre sobre o cone, i.e, $ds = 0$. Diferenciando (2.42) com respeito ao tempo, identificando com a relação (2.16), temos $dt/a = -dz/H$.

Definimos a função:

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0}, \quad (2.50)$$

para reescrever:

$$\frac{dt}{a} = -\frac{1}{H_0} \frac{dz}{E(z)}.$$

¹² A nomenclatura “distância métrica” é sugerida por [Baumann \(2014\)](#) enquanto “distância comóvel transversa” é adotada por [Hogg \(1999\)](#).

Podemos integrar a Eq.(2.49), para contabilizar a distância comóvel percorrida pelos fótons desde a emissão em t_1 até o a observação em t_0 :

$$\int_0^\chi d\chi' = c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a} = -\frac{c}{H_0} \int_z^0 \frac{dz}{E(z)} \Rightarrow$$

$$\chi = D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.51)$$

em que D_H é a distância de Hubble.

2.3.5 Distância Própria

A distância própria D_p entre dois objetos é definida como o comprimento geodésico entre os dois pontos em um tempo fixo (ou fator de escala fixo). Da métrica FLRW com $dt = 0$, temos:

$$ds^2 = -a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right].$$

Portanto, define-se um elemento infinitesimal da distância própria dD_p como:

$$dD_p^2 = -ds^2,$$

ou seja

$$dD_p^2 = a^2 \left[d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right].$$

Dessa equação, podemos focar em dois casos específicos:

- **Distância Própria Radial**, onde fixamos $d\theta = d\phi = 0$, tal que $dD_p = a d\chi$. Logo:

$$D_p = a\chi, \quad (2.52)$$

em que a está fixo; e

- **Distância Própria Transversa**, onde fixamos $d\chi = d\phi = 0$, obtendo:

$$dD_p = a S_k(\chi) d\theta \Rightarrow D_p = a S_k(\chi) \Delta\theta .$$

$$D_p = a D_M \Delta\theta , \quad (2.53)$$

em que $\Delta\theta$ é a separação angular dos dois pontos.

2.3.6 Distância de Diâmetro Angular

Em alguns casos, o tamanho de um objeto astrofísico é conhecido. A *distância de diâmetro angular* até esse objeto é definida pela razão entre o diâmetro transversal D à linha de visada e o tamanho angular $\Delta\theta$ do objeto em radianos (c.f. Fig.4a):

$$D_A = \frac{D}{\Delta\theta}. \quad (2.54)$$

O tamanho transversal D do objeto pode ser obtido através da distância própria transversa, calculada conforme (2.53). Então:

$$D_A = \frac{aD_M\Delta\theta}{\Delta\theta}.$$

$$D_A = \frac{D_M}{1+z}. \quad (2.55)$$

2.3.7 Distância de Luminosidade

Acredita-se que a luminosidade absoluta L de uma supernova tipo Ia, por exemplo, é uma quantidade conhecida. Por essa razão, elas são consideradas velas padrão. A distância de luminosidade é uma distância cosmológica que visa utilizar deste fato para estabelecer o afastamento de uma fonte luminosa. Visto que a luminosidade cai com o inverso do quadrado do raio, é possível estimar a distância de um objeto luminoso comparando a intensidade observada com a emitida, supostamente conhecida.

Imagine uma fonte de luminosidade sendo observada, conforme Fig. 4b. No espaço-tempo de Minkowski, a relação entre luminosidade absoluta e o fluxo observado F é $F = L/4\pi\chi^2$. Para o espaço-tempo FLRW, algumas mudanças devem ser feitas. Isto porque a esfera centrada na fonte que acompanha o fluxo de fótons tem área dada por $4\pi D_M^2$. Também, a taxa de fótons que deixa a fonte é maior que a dos fótons que chegam a ser observados por um fator $1/(1+z)$. Além disso, a energia dos fótons é reduzida por um fator $1/(1+z)$ devido a expansão do espaço-tempo (BAUMANN, 2014). Logo:

$$F = \frac{L}{4\pi D_M^2 (1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad (2.56)$$

onde foi definida a distância de luminosidade:

$$D_L = (1+z) D_M. \quad (2.57)$$

Note que podemos relacionar a distância de luminosidade com a distância de diâmetro angular por:

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2}. \quad (2.58)$$

2.3.8 Magnitudes

A distância de luminosidade depende da medição do fluxo luminoso de determinado objeto astronômico. Os requisitos tecnológicos necessários para mensurar tal quantidade nem sempre foram disponíveis aos estudiosos de astronomia que desenvolveram um método próprio de caracterizar as luminosidades vindas de objetos celestes. Os primórdios da utilização desse método, conhecido por *sistema de magnitudes* foi desenvolvida por Hiparco (160 – 125 a.C.) que atribuía qualitativamente aos objetos celestes os valores de 1 para objetos de maior brilho, até 6 para objetos mais fracos (MORAIS, 2009).

- Magnitude aparente (m)

Foi Norman Robert Pogson (1829 – 1891) que propôs em 1856 a magnitude absoluta dada por (ISHIDA, 2010; OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2000):

$$m = -2.5 \log_{10} F + \text{const.} \quad (2.59)$$

onde F é o fluxo luminoso do objeto de interesse e const é uma constante que define o zero de escala, comumente impondo a nulidade da magnitude aparente da estrela Vega.

- Magnitude absoluta (M)

É definida como a magnitude aparente que a fonte apresentaria caso estivesse a 10 pc de distância. Visto que a luminosidade L é independente da distância, podemos utilizar a Eq.(2.57) para relacionar o fluxo F_{10} da fonte a 10 pc com o seu fluxo na posição original F :

$$L = 4\pi D_L^2 (1+z)^2 F = 4\pi (10\text{pc})^2 (1+z)^2 F_{10} ,$$

i.e.

$$F_{10} = \left(\frac{D_L}{10\text{pc}} \right)^2 F.$$

A magnitude absoluta de acordo com a sua definição, quando aplicada em (2.59), resulta em:

$$M = -2.5 \log_{10} F_{10} + \text{const} = -2.5 \log_{10} F + \text{const} - 2.5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{10\text{pc}} \right)^2 .$$

$$M = m - 5 \log_{10} \frac{D_L}{10\text{pc}} = m - 5 \log_{10} \frac{D_L}{1 \text{ Mpc}} - 25. \quad (2.60)$$

- Modulo de distância (μ)

Por fim, define-se o modulo de distância como sendo a diferença de magnitude aparente e absoluta:

$$\mu = m - M. \quad (2.61)$$

De acordo com a Eq.(2.60) temos:

$$\mu = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{\text{Mpc}} \right) + 25, \quad (2.62)$$

em que o fator 25 aparece quando se faz a troca de unidades de pc para Mpc.

2.4 COMENTÁRIOS FINAIS

Todo conteúdo desse capítulo é um levantamento das ferramentas básicas para se estudar modelos cosmológicos. No capítulo posterior adentraremos no foco do trabalho propriamente dito: a unificação da matéria e energia escura. Todavia, deve-se lembrar que toda base conceitual até agora foi colocada da maneira mais geral possível, sob uma ótica termodinâmica, sendo que pode ser utilizada para modelos cosmológicos quaisquer. Quaisquer componentes com propriedades termodinâmicas bem definidas podem ser levadas em conta nessa abordagem. Por exemplo, tal ferramental possibilita a descrição de modelos de universos com eletrodinâmicas modificadas, desde que se tenha obtido de antemão a equação de estado da referida componente. Ainda, essa ferramenta engloba a possibilidade do estudo de modelos exóticos de energia escura, partindo de uma parametrização específica para o parâmetro $w_{\text{DE}}(a)$ (DE relativo a *dark energy*). No entanto, a possibilidade de acoplar termos adicionais na ação de Einstein-Hilbert não foi aqui explorada, muito em virtude dos objetivos desse trabalho que se limita ao estudo das propriedades termodinâmicas de uma componente cosmológica unificada.

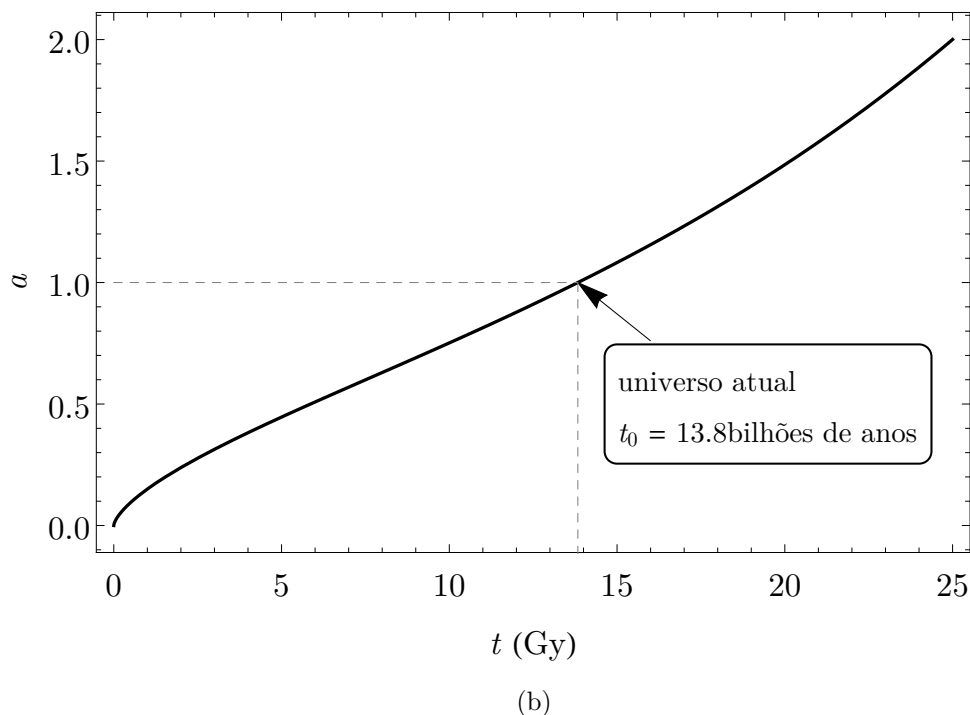
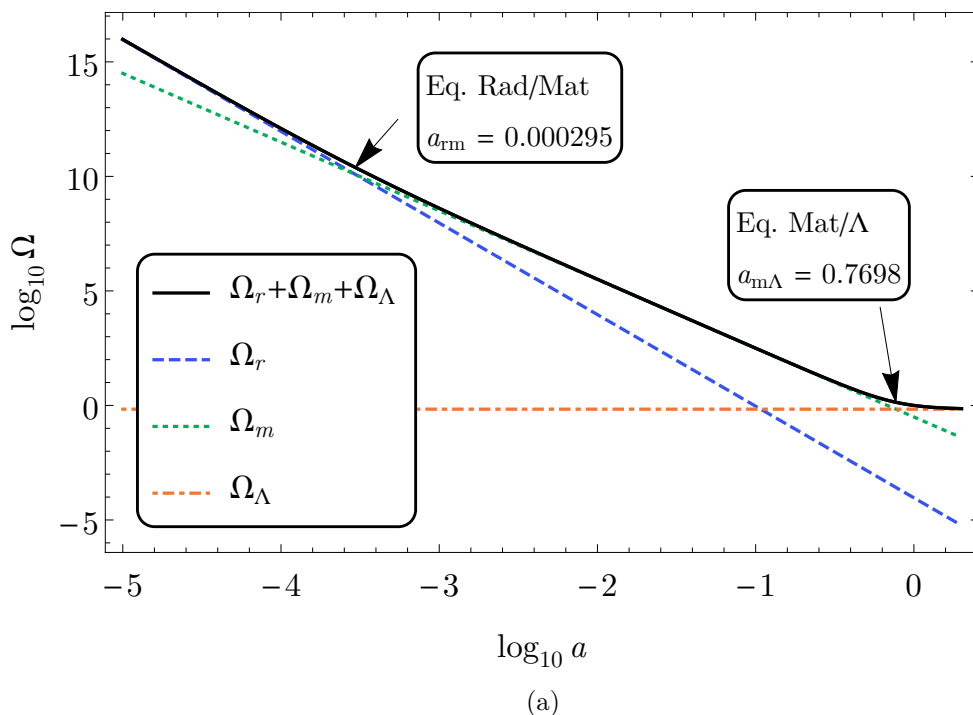


Figura 3 – Algumas propriedades cosmológicas do universo descrito pelo modelo Λ CDM com parâmetros $H_0 = 67.31 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_{r0} = 9.234 \times 10^{-5}$, $\Omega_{b0} = 0.04904$, $\Omega_{c0} = 0.2642$ e $\Omega_{\Lambda 0} = 0.6867$. (a) Comparação da evolução dos parâmetros de densidades das componentes e o parâmetro de densidade total. Na figura, são indicados os fatores de escala de transição dos períodos de domínio das componentes. Note que, com exceção das regiões onde ocorre transição de regime, o parâmetro de densidade universo via modelo Λ CDM tende ao de um universo unicomponente. (b) Fator de escala em função do tempo cósmico. Fica claro a transição entre o regime desacelerado de $a(t)$ para o seu comportamento acelerado em um valor de tempo próximo dos dias atuais. Fonte: Do autor.

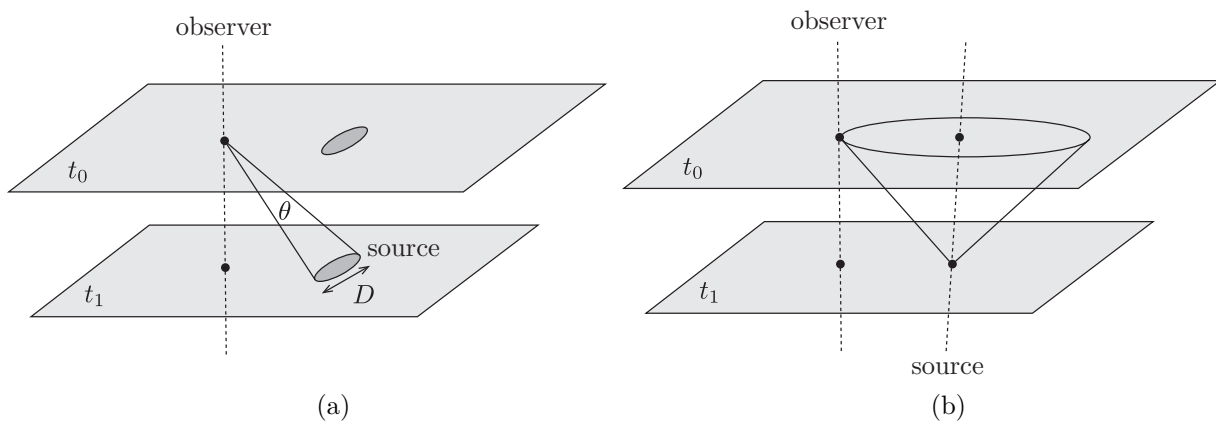


Figura 4 – (a) Ilustração das grandezas envolvidas na definição da distância de diâmetro angular. (b) Geometria associada a definição da distância de luminosidade. Fonte: (BAUMANN, 2014).

3 UNIFICAÇÃO DE MATÉRIA E ENERGIA ESCURA

No capítulo anterior, foi verificado que o modelo cosmológico padrão assume homogeneidade e isotropia espacial e relatividade geral como teoria correta de descrição dos efeitos gravitacionais. Nos redshifts de interesse ($z = 0 \sim 10$), a contribuição para radiação na Eq.(2.39) é desprezível, tal que o modelo Λ CDM em uma geometria plana pode ser descrito por:

$$H(a) = H_0 \sqrt{(\Omega_{b0} + \Omega_{c0}) a^{-3} + 1 - (\Omega_{b0} + \Omega_{c0})}. \quad (3.1)$$

Foi comentado também, e veremos detalhadamente mais adiante, que esse modelo é aquele que melhor explica os dados observados. No entanto, apresenta vários problemas intrínsecos no que tange a natureza das componentes escuras.

Quando se assume a existência de matéria bariônica apenas, alguns fenômenos gravitacionais permanecem não explicados. É por isso que se admite a presença de matéria escura não relativística. Vários modelos teóricos demonstram potencialidade em prever a existência de partículas de matéria escura (PRIMACK, 1997; ZHANG; ZHAO, 2015), sendo o modelo de WIMP's¹ o de maior notoriedade. Em teoria, partículas WIMP podem ser detectadas através de seu espalhamento com núcleos de xenônio gasoso (MCCABE, 2016). Esse é o princípio básico do funcionamento dos experimentos LUX², XENOM10 e XENOM100³ (AKERIB et al., 2013; BAUDIS, 2007; APRILE et al., 2012b). No entanto, até o momento, nenhuma evidência de matéria escura pôde ser encontrada nesses experimentos (AKERIB et al., 2014; ANGLE et al., 2008a; ANGLE et al., 2008b; APRILE et al., 2012a).

Problemas conceituais acerca da natureza da energia escura também existem. O modelo de energia escura melhor aceito é o de constante cosmológica. Se, por um lado, é possível mensurar a magnitude da constante cosmológica através de observações, por outro não existem teorias que produzem previsões teóricas satisfatórias desse valor. A ideia mais promissora aponta a energia de ponto zero do vácuo associada à flutuações quânticas como origem da energia escura. No entanto, os cálculos à partir da teoria quântica de campos preveem uma densidade de energia que difere de 60 à 120 ordens de grandeza do valor observado para a constante cosmológica (Zel'Dovich, 1967; WEINBERG, 1989; PISANO; REIS, 2001; MARSH, 2007). Esse problema ficou conhecido como a catástrofe do vácuo (tradução de livre de *vacuum catastrophe*) (ADLER; CASEY; JACOB, 1995).

Outro problema associado às componentes cosmológicas escuras é o da *coincidência cósmica*. No modelo Λ CDM, os efeitos da constante cosmológica foram desprezíveis por um período significativo no início do universo, ao passo que será dominante no futuro. Apenas

¹ *Weakly Interacting Massive Particles*.

² *Large Underground Xenon experiment* <<http://luxdarkmatter.org/>>.

³ <<http://xenon.physics.rice.edu/>>

durante uma pequena fração de tempo cosmológico as duas componentes escuras (matéria e energia escuras) apresentariam densidade de energia na mesma ordem de grandeza. Portanto, somente a coincidência pode explicar o fato de que tal período de tempo está ocorrendo atualmente. Além disso, se ambas as componentes são realmente distintas e têm a mesma ordem de grandeza atualmente por coincidência, existe em contrapartida o problema do ajuste fino nas condições iniciais da constante cosmológica para que esta passe a dominar somente em tempos cosmológicos recentes (VELTEN; MARTTENS; ZIMDAHL, 2014).

O modelo Λ CDM apresenta além desse problemas conceituais, uma série de outras inconsistências observacionais (PERIVOLAROPOULOS, 2008). Dentre elas:

Fluxo de Velocidade em grandes escalas Em que a magnitude das velocidades peculiares galácticas observadas são significativamente maiores que as previstas pelo modelo Λ CDM.

Brilho das Supernovas Tipo Ia O Λ CDM prevê um brilho menor para as SNIa's de altos redshifts daqueles valores que são observados;

Galáxias nos vazios⁴ As observações apontam um número menor de galáxias anãs ou irregulares nos vazios do que aquele previsto pelo Λ CDM .

Distribuição de densidade nos halos de matéria escura O modelo Λ CDM prevê que o perfil de distribuição de densidade de matéria nos halos de matéria escura sejam de baixa concentração, seguindo o perfil de Navarro-Frank-White (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996; NAVARRO; FRENK; WHITE, 1997). Isto não é condizente com as observações.

Distribuição de densidade nos halos galácticos A previsão do Λ CDM para o perfil de densidade mássica nos halos galácticos é de núcleos bem densos com baixa concentração mássica exterior. Porém, as observações indicam galáxias com densidade constante nos núcleos e um perfil exterior achatado de alta densidade de matéria escura.

Quantidade de galáxias em disco O número observado de galáxias chatas, em formato de disco, é maior do que o previsto pelo modelo Λ CDM.

O cenário apresentado até agora é propício ao estudo de possibilidades alternativas ao Λ CDM. Uma delas consiste em interpretar os dados provenientes de matéria e energia

⁴ Vazios, tradução livre de “voids”, são grandes volumes no universo com nenhuma ou muito poucas galáxias, de tal modo que se apresentam escuros nas observações astronômicas.

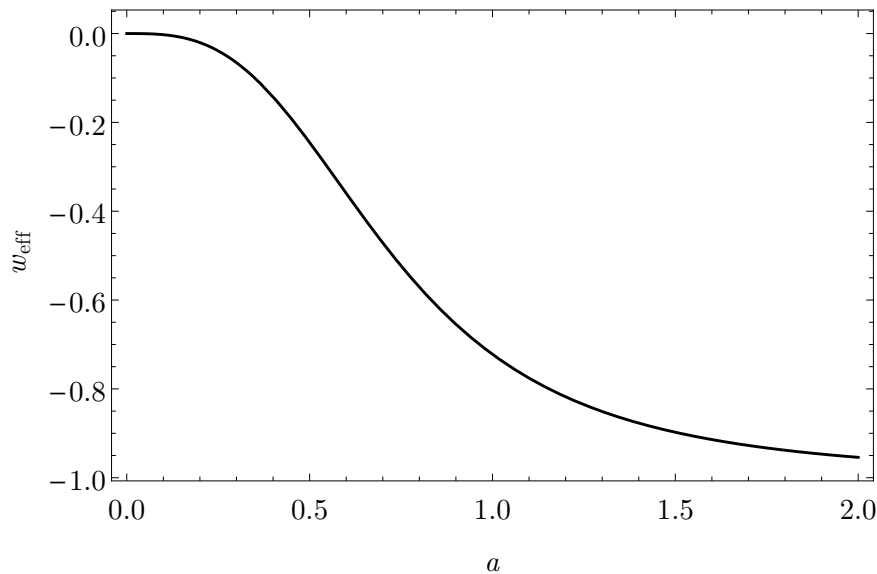


Figura 5 – Componente escura efetiva obtida da soma das propriedades de matéria escura e energia escura (constante cosmológica) com parâmetros de densidade dados respectivamente por $\Omega_{c0} = 0.2642$ e $\Omega_{\Lambda 0} = 0.6867$. A transição teórica de regimes ocorre com fator de escala $a = 0.7273$.

Fonte: Do autor.

escuras como sendo diferentes manifestações de apenas uma componente escura, geralmente conhecida por *quartessência*. Para isso, tal componente unificada deve respeitar algumas características. Em primeiro lugar, não exercer pressão no passado cósmico para nossa descrição do universo estar condizente com a formação das estruturas. Depois, a componente deve apresentar atualmente uma pressão negativa suficiente para produzir um regime de aceleração cósmica.

Apesar dessas incoerências, o modelo Λ CDM ajusta-se bem a grande maioria dos conjuntos de dados observacionais. Podemos utilizar essa consistência para obtermos alguns *insights* à respeito da fenomenologia da componente unificada. Para isso, idealizamos um fluido efetivo cujas propriedades termodinâmicas intensivas podem ser obtidas pela soma das propriedades equivalentes de matéria e energia escuras. Nesse caso, a densidade de energia efetiva será dada por $\rho_{\text{eff}} = \rho_c + \rho_\Lambda$ e pressão efetiva $p_{\text{eff}} = p_c + p_\Lambda$, resultando em uma equação de estado para a componente escura unificada dada por:

$$w_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = \frac{p_c + p_\Lambda}{\rho_c + \rho_\Lambda} = \frac{-\rho_{\Lambda 0}}{\rho_{c0}a^{-3} + \rho_{\Lambda 0}},$$

que equivale à

$$w_{\text{eff}} = \frac{-1}{\left(\frac{\Omega_{c0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\right)a^{-3} + 1}. \quad (3.2)$$

Note que para valores grandes de fator de escala, a Eq.(3.2) tende a assumir o valor de -1 , mimetizando um comportamento tipo constante cosmológica. No entanto, para

valores pequenos de a , $w_{\text{eff}} \approx 0$, similar a natureza da matéria escura não relativística. O comportamento funcional da Eq.(3.2) de acordo com os valores fiduciais para os parâmetros cosmológicos dados na Tabela 1 está ilustrado na Fig.5 .

O objetivo é determinar os mecanismos possíveis para que a componente unificada tenha parâmetro da equação de estado com comportamento assintótico similar àquele apresentado na Eq.(3.2).

3.1 QUARTESSÊNCIA - COMPONENTE ESCURA UNIFICADA

Devido aos problemas associados ao modelo Λ CDM, foi necessário elaborar alternativas para constante cosmológica a fim de explicar origem da energia escura. Baseando-se nos mecanismos clássicos de produção do período primordial inflacionário, foi proposto que a aceleração cósmica atual fosse resultante da existência de um campo escalar φ com termo cinético canônico que evolui sob a ação de um potencial $V(\varphi)$ e por sua vez é minimamente acoplado a ação de Einstein-Hilbert. Como na época já se tinha conhecimento de quatro fluidos cosmológicos (fótons, neutrinos, matéria bariônica e matéria escura), essa nova componente ficou conhecida como *quintessência* (TSUJIKAWA, 2013). Uma variação dos modelos quintessenciais são os modelos de *k-essência* que envolvem a substituição do termo cinético canônico da lagrangeana quintessencial por uma que apresente um forma funcional qualquer do termo $\partial_\mu\varphi\partial^\mu\phi$.

Ambos os modelos de quintessência e k-essência tratam matéria e energia escuras como componentes distintas. Os modelos de quartessência, ou modelos de matéria escura unificada (UDM, de *Unified Dark Matter*), surgem nesse cenário na tentativa de descrever a fenomenologia cósmica unificando os efeitos das componentes escuras em apenas uma componente. Os candidatos naturais à esses modelos são aqueles baseados no gás de Chaplygin (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001; BENTO; BERTOLAMI; SEN, 2002; BILIĆ; TUPPER; VIOLLIER, 2002). Tais modelos foram bastante estudados e apresentam resultados bastante interessantes, sobretudo nas abordagens de cosmologia de background.

Nessa seção, comentaremos brevemente algumas características dos modelos UDM de campo escalar minimamente acoplado a ação de Einstein-Hilbert responsáveis em produzir os fenômenos de matéria e energia escura observados.

Apesar de bastante interessante, a ideia de componentes escuras unificadas traz um problema. Para reproduzir os dados observados, os modelos unificados devem ser rigorosamente equivalentes ao modelo Λ CDM (SANDVIK et al., 2004). Isso ocorre porque, quando a velocidade do som tende a zero de maneira um pouco mais lenta do que em relação ao Λ CDM, o comportamento do *power spectrum* de matéria⁵ é bem instável e incompatível

⁵ Em muitos textos de língua portuguesa, o power spectrum é referido como “espectro de potências”. Todavia, foi decidido adotar *power spectrum* nessa dissertação para estarmos condizentes com as referências bibliográficas. O leitor encontrará mais sobre *power spectrum* adiante neste texto, no Cap.

com os dados observados. Por conta desse problema, alguns autores introduziram os modelos quartessenciais com transição rápida, tal que a velocidade do som no fluido cósmico tende abruptamente a zero a medida que se considera tempos mais primordiais (FELICE; NESSERIS; TSUJIKAWA, 2012; LAZKOZ; LEANIZBARRUTIA; SALZANO, 2016).

Uma alternativa é a unificação realizada por meio de expressões matemáticas que satisfazem alguns requisitos fenomenológicos esperados. Uma das estratégias consiste em parametrizar a aceleração cósmica propondo expressões para a evolução do parâmetro de aceleração bem como o parâmetro da equação de estado (REIS, 2007). Baseando-nos nesse tipo de abordagem, propomo-nos estudar um modelo de unificação fenomenológico que descreve a evolução da função w em relação as variações do fator de escala.

Nesse capítulo, faremos um breve revisão dessas famílias de modelos de quartessência, ressaltando as idéias principais que motivaram a elaboração e o estudo do nosso Modelo Unificado que será considerado até o fim deste trabalho.

3.1.1 Gás de Chaplygin Generalizado (GCG)

A primeira ideia de modelo de quartessência foi elaborada no início da década de 2000, com uma unificação descrita pela equação de estado na forma do gás de Chaplygin (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001; BENTO; BERTOLAMI; SEN, 2002; BILÍ; TUPPER; VIOLLIER, 2002):

$$p_{CG} = -\frac{A}{\rho_{CG}}, \quad (3.3)$$

em que $A > 0$. Todavia, apesar de interessante, esse modelo não é condizente com as observações (DAVIS et al., 2007). Recentemente, despertou-se o interesse da comunidade científica por um modelo de gás de Chaplygin generalizado, cuja equação de estado é dada por:

$$p_{GCG} = -\frac{A}{(\rho_{GCG})^\alpha}. \quad (3.4)$$

Portanto

$$w_{GCG} = \frac{p_{GCG}}{\rho_{GCG}} = -\frac{A}{(\rho_{GCG})^{1+\alpha}}. \quad (3.5)$$

Através do vínculo de conservação de energia, dado na Eq.(2.13), obtemos:

$$\rho_{GCG} = A^{1/(1+\alpha)} \left[1 + \beta a^{-3(1+\alpha)} \right]^{1/(1+\alpha)} \quad (3.6)$$

em que $\beta \equiv (\rho_{GCG,0}^{1+\alpha} - A) / A$ e $\rho_{GCG,0}$ é a densidade do gás de Chaplygin quando fator de escala vale 1.

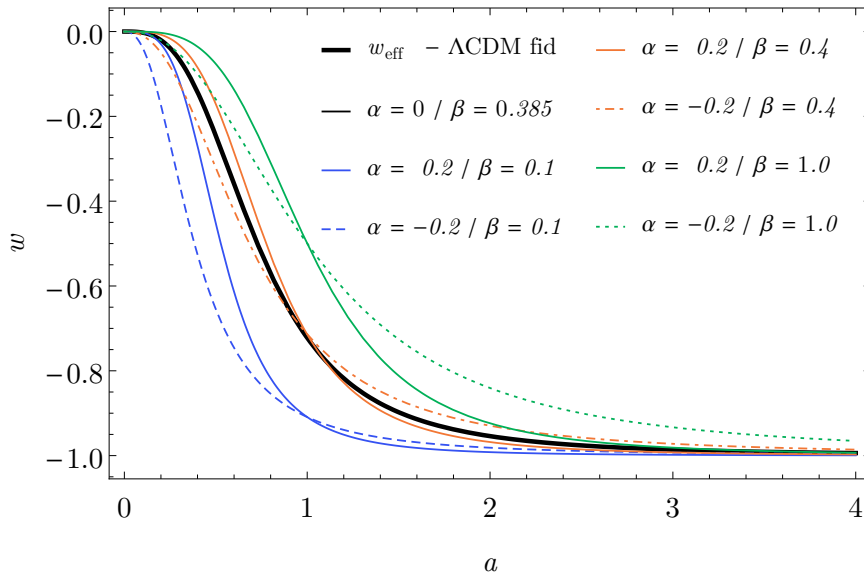


Figura 6 – Parâmetro da equação de estado do gás Chaplygin para unificação das componentes escuras e comparação com o modelo fiducial da cosmologia (Λ CDM fid). Fonte: Do autor.

Substituindo (3.6) em (3.5), temos:

$$w_{\text{GCG}} = \frac{-1}{\beta a^{-3(1+\alpha)} + 1}. \quad (3.7)$$

Comparando a Eq.(3.7) com a equação para w efetivo de matéria/energia escuras em (3.2), vemos que a modelagem de fluido unificado pode recuperar o modelo Λ CDM, ao menos à nível de cosmologia de *background*,⁶ se $\alpha \approx 0$ e $\beta \approx \Omega_{c0}/\Omega_{\Lambda0} \approx 0.385$. A Fig. 6 traz curvas de w do gás de Chaplygin em termos do fator de escala com algumas combinações dos parâmetros γ e A , e as compara com w efetivo das componentes escuras referentes ao modelo Λ CDM.

O grande problema com o modelo do gás de Chaplygin generalizado aparece quando se realiza uma abordagem cosmológica perturbativa. Verifica-se que para prever o *power spectrum da matéria*, o modelo requer um ajuste muito fino dos parâmetros, apresentando oscilações ou divergências em vez de um crescimento polinomial para pequenas variações paramétricas (MIAO et al., 2011a). Isso ficará mais claro no Cap. 6 quando abordarmos a teoria de perturbações cosmológicas.

⁶ Cosmologia de background é o nome que se da aos estudos cosmológicos obtidos da hipótese de universo homogêneo e isotrópico.

3.1.2 Modelos de Matéria Escura Unificada (UDM) com Campo Escalar

São os modelos onde considera-se um campo escalar acoplado à gravitação no funcional da ação de Einstein-Hilbert:

$$S \equiv S_G + S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + \mathcal{L}(\varphi, X) \right), \quad (3.8)$$

em que:

$$X = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi. \quad (3.9)$$

O tensor energia momento do campo escalar φ tem a forma:

$$T_{\mu\nu}^\varphi = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\varphi}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, X)}{\partial X} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \mathcal{L}(\varphi, X) g_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

que leva a equações de movimentos descritas por:

$$\nabla^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, X)}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}. \quad (3.11)$$

Se $\nabla_\mu \varphi$ é tipo-tempo, então S_φ descreve um fluido perfeito com tensor energia momento dado por

$$T_{\mu\nu}^\varphi = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

pressão igual a

$$p = p(\varphi, X) = \mathcal{L}(\varphi, X) \quad (3.13)$$

e densidade de energia

$$\rho = \rho(\varphi, X) = 2X \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, X)}{\partial X} - \mathcal{L}(\varphi, X). \quad (3.14)$$

Com a definição dessas propriedades intensivas, é possível caracterizar o parâmetro da equação de estado pela razão $w = p/\rho$, que nesse caso seria:

$$w_\varphi = \frac{\mathcal{L}}{2X \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, X)}{\partial X} - \mathcal{L}(\varphi, X)} = \frac{-1}{-2 \frac{X}{\mathcal{L}(\varphi, X)} \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, X)}{\partial X} + 1}. \quad (3.15)$$

Comentamos no início do capítulo que uma componente unificada que esteja de acordo com as observações deveria apresentar uma equação de estado com comportamento assintótico próximo ao da Eq.(3.2). Através da comparação entre as Eqs. (3.2) e (3.15), percebe-se uma semelhança estrutural algébrica, o que torna esse tipo de abordagem tão promissora. O objetivo seria então determinar uma lagrangeana $\mathcal{L}(\varphi, X)$, tal que o valor do termo $-2 \frac{X}{\mathcal{L}(\varphi, X)} \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, X)}{\partial X}$ divirja no passado e tenda a zero no futuro. Essa condição é suficiente para descrição de uma componente que não exerce pressão quando $a \rightarrow 0$ e gera uma pressão negativa quando $a \rightarrow \infty$.

No geral, esses modelos apresentam características também interessantes quando estudados no âmbito da cosmologia perturbativa, mas que fogem do escopo desse trabalho. Para abordagens mais generalistas, indica-se o trabalho de Bertacca, Bartolo e Matarrese (2010) que cataloga, classifica e exemplifica várias famílias de modelos de quartessência guiadas por campo escalar.

3.1.3 Modelos de Transição Rápida

Nos modelos de transição rápida, a ideia é descrever um fluido unificado cuja transição do estágio despressurizado para o estágio de aceleração cósmica ocorra abruptamente. Propõe-se nesse caso um parâmetro de densidade do universo do tipo (BRUNI; LAZKOZ; ROZAS-FERNÁNDEZ, 2013):

$$\Omega_{\text{UDM}}(a) = \Omega_t \left(\frac{a_t}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \left[1 - \left(\frac{a_t}{a}\right)^3\right] \Theta(a - a_t), \quad (3.16)$$

com a_t o valor do fator de escala onde a transição de regimes acontece e $\Theta(a - a_t)$ desempenhando o papel de uma função de transição, por exemplo uma função Theta de Heaviside. Quando $a < a_t$, o fluido terá um comportamento de matéria tipo poeira com densidade $\Omega_t (a_t/a)^3$. Para $a > a_t$, o fluido terá uma densidade de energia $(\Omega_t - \Omega_\Lambda) (a_t/a)^3 + \Omega_\Lambda$ recuperando o cenário Λ CDM (LAZKOZ; LEANIZBARRUTIA; SALZANO, 2016).

A abordagem mais comum para definição de funções de transição é reproduzir aquelas do tipo Heaviside. Dois exemplos bem comuns são:

$$\Theta(a - a_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh[2\beta(a - a_t)] \quad (3.17)$$

ou

$$\Theta(a - a_t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan[\beta\pi(a - a_t)]. \quad (3.18)$$

O parâmetro β tem a função de controlar a velocidade da transição pois é exatamente o valor da derivada da função de transição com respeito ao fator de escala calculada em a_t . Salienta-se que, nesse tipo de abordagem, é comum a proposição de parametrizações diretamente no parâmetro de densidade.

3.1.4 Parametrizações da função $w(a)$

Conforme já comentado, uma outra abordagem é unificar as componentes escuras do universo por meio de fenomenologia. No trabalho de Ishida et al. (2008) o parâmetro de desaceleração, definido por $q \equiv -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ foi descrito através da parametrização:

$$q(z) = q_f + \frac{q_i - q_f}{1 - \frac{q_i}{q_f} \left(\frac{1+z_t}{1+z}\right)^{1/\tau}}, \quad (3.19)$$

em que q_i e q_f são os valores assintóticos extremos de $q(z)$, z_t é o redshift de transição e τ um parâmetro que regula a velocidade de transição.

Seguindo a mesma linha, Reis (2007) utilizou parametrizações semelhantes para unificar matéria e energia escuras através do parâmetro da equação de estado. Dois exemplos estudados foram:

$$w(z) = w_f + (w_i - w_f) \exp \left[- \left(\frac{1+z_t}{1+z} \right)^{1/\tau} \right]$$

e

$$w(z) = w_f + \frac{w_i - w_f}{1 + \left(\frac{1+z_t}{1+z} \right)^{1/\tau}}.$$

Essas duas parametrizações descrevem uma transição de w_i para w_f com velocidade regulada pelo parâmetro τ .

Nesse trabalho, adotamos uma postura semelhante à essa. Propomos uma parametrização para função $w_u(a)$ que tenha comportamentos assintóticos similares à (3.2): a função deve tender a 0 quando o fator de escala for pequeno e ter algum valor menor que $-1/3$ em tempos cosmológicos recentes. À fim de adequar o modelo com os dados observacionais, proporemos parametrizações em termos do redshift em vez do fator de escala. Tal procedimento não culmina em nenhuma ambiguidade visto que a relação entre fator de escala e redshift é bijetora.

Bruni, Lazkoz e Rozas-Fernández (2013) utilizaram uma função de transição dependente de arctan em seu modelo com rápida transição. Essa função de transição leva a densidade de energia de um estágio de matéria escura para um cenário Λ CDM. Essa característica nos provê um *insight* para uma parametrização, que leva o parâmetro da equação de estado de $w = 0$ para $w = -1$:

$$w_u = \frac{1}{\pi} \arctan(\alpha z - \beta) - \frac{1}{2}, \quad (3.20)$$

e depende de dois parâmetros livres (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016). O parâmetro α define a taxa de transição enquanto que β fornece o valor w_u para redshift nulo. Além disso, a razão β/α está relacionada com o redshift de transição, em que o comportamento de (3.20) deixa de ser efetivamente o de matéria escura e passa para o de constante cosmológica. A taxa de transição será tão rápida quanto maior for o valor de α , quando o outro parâmetro for mantido constante (vide a Fig. 7a). Nota-se ainda que, o valor de w_u no redshift zero independe do valor de α . No entanto, mantendo fixo o valor de α e variando β , tal como a Fig. 7b, observa-se que o valor do redshift de transição cresce conforme cresce o valor de β . De fato, se encararmos o redshift de transição como

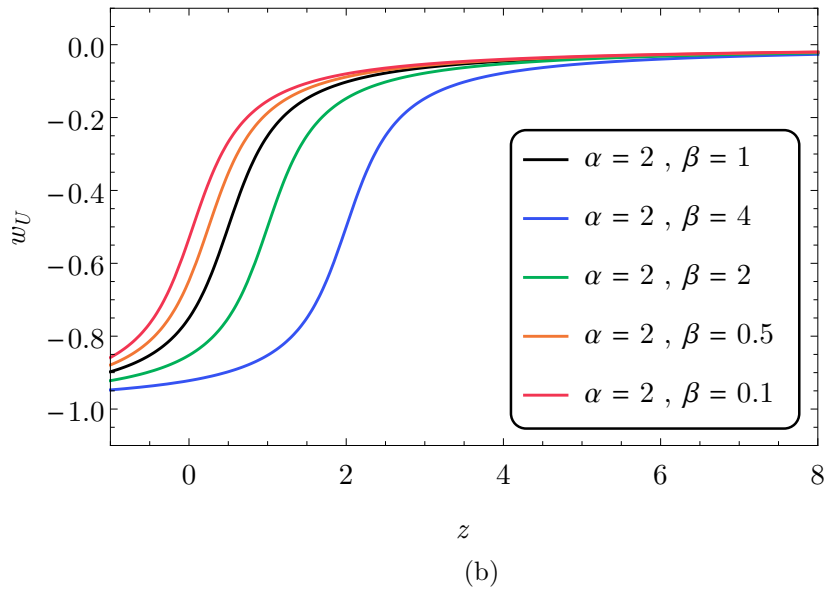
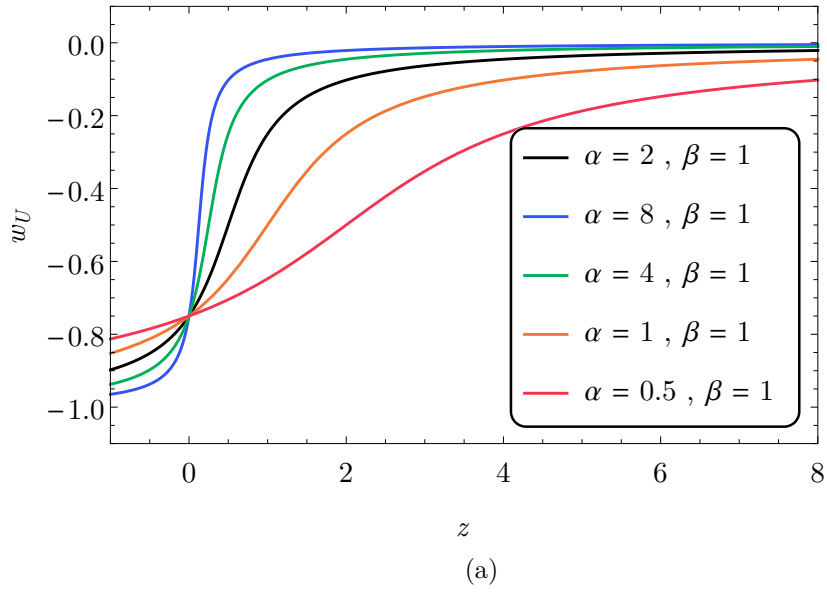


Figura 7 – Curvas da função $w_u(z)$ para diferentes valores dos parâmetros cosmológicos. Fonte: Do autor.

aquele onde o valor de (3.20) é intermediário a 0 e -1 , ou seja $-1/2$, obtém-se a expressão para o redshift de transição em termos dos parâmetros α e β :

$$z_t = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (3.21)$$

À modelos cosmológicos composto por equações de estado do tipo (3.20) daremos o nome de *Modelo Unificado* (UM do inglês *Unified Model*). Uma característica do Modelo Unificado é o comportamento assintótico da equação de estado no redshift de infinito

futuro, ou seja $z = -1$. Diferentemente do Λ CDM, onde w_{eff} é -1 , no Modelo Unificado o valor de w_U é maior que -1 nesse mesmo valor de redshift, dando ao modelo uma característica de componente quintessencial em valor de redshifts menores que zero. Mais sobre isso na Sec. 5.2.3.

3.2 EQUAÇÕES MODELO UNIFICADO

O modelo cosmológico que objetivamos estudar tem geometria plana e é composto por três componentes: a ultrarelativística, dada por fótons e neutrinos;⁷ as não relativísticas, dadas por matéria bariônica; e a componente unificada (ou quartessência). A essa configuração denominaremos *Modelo Unificado*. Já foi comentado anteriormente que as propriedades termodinâmicas das componentes ultrarelativísticas e da matéria bariônica são descritas por equações de estado do tipo $p = w\rho$, onde w vale $1/3$ para a radiação e 0 para matéria bariônica tipo poeira. Nesses casos, o parâmetro de densidade de energia evolui conforme Eq.(2.37):

$$\begin{cases} \Omega_r(a) = \Omega_{r0}a^{-4} & (\text{radiação}) \\ \Omega_b(a) = \Omega_{b0}a^{-3} & (\text{matéria bariônica}) \end{cases} . \quad (3.22)$$

Para se obter a evolução do parâmetro de densidade da componente unificada, reescreve-se a Eq.(2.29) substituindo a por z conforme (2.42):

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_u &= 3\dot{z} \left(\frac{w_u(z, \vec{p}) + 1}{1 + z} \right) \Omega_u(z) \Rightarrow \int_{\Omega_{u0}}^{\Omega_u} \frac{d\Omega'_u}{\Omega'_u(z)} = 3 \int_0^z \left(\frac{w_u(z', \vec{p}) + 1}{1 + z'} \right) dz' . \\ \Omega_u(z) &= \Omega_{u0} (1 + z)^3 \exp \left(3 \int_0^z \frac{w_u(z', \vec{p})}{1 + z'} dz' \right) , \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que Ω_{u0} é o parâmetro de densidade atual da componente unificada. Obviamente, a evolução do parâmetro de densidade depende das parametrizações para $w_u(z, \vec{p})$ propostas na Sec. 3.1.4, sendo \vec{p} o vetor de parâmetros. Para a Eq.(3.20), temos $\vec{p} = (\alpha, \beta)$. O anulamento da constante de curvatura pode ser traduzida no vínculo:

$$\Omega_{r0} + \Omega_{b0} + \Omega_{u0} = 1. \quad (3.24)$$

O parâmetro de Hubble para o Modelo Unificado conforme a Eq.(2.30) assume a forma funcional:

$$\bar{H}(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{r0} (1 + z)^4 + \Omega_{b0} (1 + z)^3 + (1 - \Omega_{r0} - \Omega_{b0}) (1 + z)^3 \exp \left(3 \int_0^z \frac{w_u(z', \vec{p})}{1 + z'} dz' \right)}. \quad (3.25)$$

⁷ Como feito anteriormente, trataremos fótons e neutrinos como uma única componente de radiação.

Na maior parte das vezes, estaremos interessados em estudar fenômenos com redshifts menores que 10. Nesse regime, a contribuição da radiação é ínfima e pode ser desprezada, resultando como função de Hubble do Modelo Unificado a equação:

Modelo Unificado

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{b0} (1+z)^3 + (1 - \Omega_{b0}) (1+z)^3 \exp\left(3 \int_0^z \frac{w_u(z', \vec{p})}{1+z'} dz'\right)}. \quad (3.26)$$

Note que a barra acima de H em (3.25) está indicando que o parâmetro de Hubble ali expresso é o completo, que leva em consideração a radiação. No entanto, raramente a função de Hubble completa será utilizada. A partir desse ponto, sempre que chamarmos pela função de Hubble do Modelo Unificado, entenda-se que se estamos falando da Eq.(3.26) que não considera radiação. Casos específicos serão comentados quando necessário.

Os parâmetros cosmológicos do Modelo Unificado são H_0 , Ω_{b0} e o vetor \vec{p} que parametriza a componente escura unificada. Para estudar a transição do comportamento de expansão desacelerada para o de expansão acelerada, vamos ajustar os parâmetros cosmológicos utilizando um conjunto de dados observacionais. Na seção posterior, será comentado resumidamente sobre as técnicas de análise de dados que irão proporcionar formas de avaliar os modelos cosmológicos por meio de dados observacionais.

4 TÉCNICAS DE ANÁLISE DE DADOS

O problema geral que nos propomos a analisar nesse trabalho consiste em obter os valores dos parâmetros $\vec{\theta}$ do modelo cosmológico que melhor descrevem um conjunto de observáveis y_i . No Modelo Unificado (3.26), tais parâmetros são a densidade de matéria bariônica (Ω_{b0}) e os parâmetros da componente unificada (\vec{p}), além da constante de Hubble (H_0). Neste modelo, $\vec{\theta}_{\text{UM}} = (H_0, \Omega_{b0}, \vec{p})$. Já para o modelo Λ CDM (3.1), temos a constante de Hubble e os parâmetro de densidade de matéria bariônica e escura (respectivamente Ω_{b0} e Ω_{c0}), com $\vec{\theta}_{\Lambda\text{CDM}} = (H_0, \Omega_{b0}, \Omega_{c0})$.

Para estimar tais parâmetros, devemos ser específicos quanto a escola de pensamento estatístico que vamos adotar. Existem duas abordagens: *frequentista* e *bayesiana*. Na abordagem frequentista, a ideia de probabilidade está atrelada a frequência de ocorrência de um determinado evento. Ela é a razão entre a frequência de ocorrência e a quantidade de medições (MARCH, 2013). Na estatística bayesiana, aquela que vamos adotar, a probabilidade está associada ao grau de confiabilidade na ocorrência de um determinado evento. Ao se especificar um intervalo de parâmetros com probabilidade p , estamos dizendo que a probabilidade dos valores paramétricos verdadeiros estarem contidos nesse intervalo é p . Esta maneira de se pensar permite utilizarmos funções de distribuição de probabilidades para especificar o nosso conhecimento a respeito do sistema em estudo. (CAMPOS, 2006).

Considerando um evento A cuja probabilidade de ocorrência é dada por $p(A)$, e outro evento B com probabilidade $p(B)$, a probabilidade de ambos os eventos ocorrerem é $p(A, B)$. No entanto, visto que um destes eventos já ocorreu, digamos o evento B , a probabilidade de A ocorrer será $p(A|B)$. Por coerência, a probabilidade da ocorrência dos dois eventos é:

$$p(A, B) = p(A) p(B|A) = p(B) p(A|B),$$

que pode ser reescrito como:

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}. \quad (4.1)$$

Este resultado é conhecido por *teorema de Bayes*. Na estimativa dos parâmetros de um modelo, o evento B se caracteriza pela obtenção de um conjunto de medições $y_i(z_i)$, i.e. $\{(z_i, y_i)\} \equiv \{Y_i\}$. O evento A é definido por um determinado conjunto de valores dos parâmetros $\vec{\theta}$. Desse modo, temos:

- $p(\{Y_i\} | \vec{\theta})$: probabilidade de obter os dados observados $\{Y_i\}$ dados os valores dos parâmetros $\vec{\theta}$ do modelo; e

- $p(\vec{\theta} | \{Y_i\})$: probabilidade de que um determinado conjunto de valores dos parâmetros do mesmo modelo esteja de acordo com o conjunto de dados observados.

Portanto, a probabilidade de que uma configuração paramétrica $\vec{\theta}$ em virtude dos dados observacionais $\{Y_i\}$ pelo teorema de Bayes será:

$$p(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = \frac{p(\{Y_i\} | \vec{\theta}) p(\vec{\theta})}{p(\{Y_i\})}.$$

No nosso caso, o intervalo de valores que as grandezas cosmológicas podem assumir é contínuo, bem como o intervalo dos valores dos parâmetros. O teorema de Bayes nessa situação é reescrito em termos de funções de distribuição de probabilidades (PDF, do inglês *Probability Distribution Function*) como:

$$P(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = \frac{P(\{Y_i\} | \vec{\theta}) P(\vec{\theta})}{P(\{Y_i\})}. \quad (4.2)$$

em que $P(\vec{\theta} | \{Y_i\})$ é a PDF a posteriori dos parâmetros do modelo dados os valores das grandezas observacionais. $P(\{Y_i\} | \vec{\theta})$ é a PDF para obter tais dados dada uma configuração paramétrica específica, que geralmente é conhecida por *função de verossimilhança*, podendo ser denotada por $\mathcal{L}(\theta) \equiv P(\{Y_i\} | \vec{\theta})$. A PDF $P(\vec{\theta})$ é chamada de *função de distribuição de probabilidades a priori*, ou *prior*, pois está atrelada a probabilidade de que os parâmetros assumam valores específicos independentemente dos dados observacionais. Ela descreve nossa confiança a priori sobre a região do espaço de parâmetros em que acreditamos que o valor real de $\vec{\theta}$ reside (MARCH, 2013). Por fim, a PDF $P(\{Y_i\})$ fornece a probabilidade de se obter um determinado conjunto de medidas quaisquer independentemente dos valores de $\vec{\theta}$. Aqui, onde o nosso problema é de inferência de parâmetros, a PDF $P(\{Y_i\})$ terá uma importância diminuída pois atua apenas como constante de normalização na função de densidade de probabilidade dos parâmetros $\vec{\theta}$ (CAMPOS, 2006). Logo:

$$P(\vec{\theta} | \{Y_i\}) \propto \mathcal{L}(\vec{\theta}) P(\vec{\theta}). \quad (4.3)$$

A estimativa de um parâmetro isolado do modelo é obtida marginalizando-se sobre o intervalo de todos os outros parâmetros, ou seja, fazendo:

$$P_k(\theta_k | \{Y_i\}) \propto \int d\theta_{\neq k} \mathcal{L}(\vec{\theta}) P(\vec{\theta}). \quad (4.4)$$

4.1 PRIORS E A DEFINIÇÃO BAYESIANA DE UM MODELO

A funções de probabilidade a priori (ou priors), designadas por $P(\vec{\theta})$, podem ser definidas por previsões teóricas ou baseadas em informação empírica. Três tipos de priors são comumente utilizados nas aplicações probabilísticas: prior gaussiano, prior uniforme e

prior de Jeffrey. Os dois primeiros, que serão comentados abaixo, são os de interesse em nosso caso.

Um prior uniforme deve ser considerado sempre que se acredita que todas as configurações paramétricas possíveis dentro do espaço de parâmetros são igualmente prováveis. Naturalmente, apresenta uma desvantagem pois exclui partes do espaço de parâmetros. Nesse caso, a análise deve garantir que o intervalo de parâmetros seja suficientemente grande para que a função de verossimilhança seja truncada dentro dele. Por sua vez, os priors gaussianos apresentam as vantagens de possuir longas caudas e, por conta disso, não excluem categoricamente nenhuma parte do espaço de parâmetros. Podem ser facilmente ajustados para serem mais ou menos amplos.

Quando se tem pouca informação à respeito dos parâmetros, um prior mais abrangente deve ser preferido em detrimento de priors mais restritivos. Com mais informação proveniente de teorias bem estabelecidas, ou informações empíricas não correlacionadas aos dados observados, é vantajosa a utilização de priors mais estreitos que vão prevalecer mesmo sob a influência de dados observacionais de baixa qualidade. Existe uma certa controvérsia quando o prior domina sobre a verossimilhança. Geralmente quando isso acontece, ou os dados são insuficientes para fazer alguma afirmação a respeito do parâmetro de interesse ou o prior escolhido foi indevidamente forte. Algumas vezes, pode-se especificar um prior contendo um corte abrupto para eliminar regiões do espaço de parâmetros que indicam informações não físicas (como por exemplo modulo de velocidade ou comprimentos menores que zero).

Em estatística bayesiana, um modelo específico é definido como sendo uma função particular com um número de parâmetros livres, com priors sobre esses parâmetros. É importante ressaltar que o modelo depende tanto dos parâmetros quanto dos priors. Na falta dos priors, o modelo não é completamente definido. Por exemplo, o modelo Λ CDM só é um modelo bayesiano se forem especificados os prior para seus parâmetros, como por exemplo, especificação de um prior homogêneo $P(\Omega_m)$ com limites $0.0 < \Omega_m < 2.0$. Uma escolha diferente de prior, por exemplo $P(\Omega_m)$ com limites $0.0 < \Omega_m < 1.5$, consistiria em um modelo bayesiano diferente. Um modelo é dito contido em outro, se um modelo mais complexo A se reduz à um mais simples B pela fixação de um parâmetro. Um modelo Λ CDM curvo, por exemplo, com prior na curvatura de $P(\Omega_k) = -1.0 < \Omega_k < 1.0$ se reduz ao Λ CDM plano fixando $\Omega_k = 0$ (MARCH, 2013).

4.2 INFERÊNCIA BAYESIANA DE PARÂMETROS

Para se realizar o ajuste de parâmetros segundo a estatística bayesiana, deve-se obter a configuração paramétrica de máxima probabilidade em virtude dos dados observados. Ou seja, devemos maximizar $P(\vec{\theta} | \{Y_i\})$. Em um caso geral, vamos assumir que o conjunto $\{A\}$ de N dados mensurados possuem entre si uma distribuição de probabilidade multivariada

normal, tal que a função de verossimilhança seja dada por (ISIDRO, 2015):

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\chi_A^2(\vec{\theta})\right]}{(2\pi)^{N/2} |\det C|^{1/2}}, \quad (4.5)$$

com a função χ^2 sendo definida por:

$$\chi_A^2(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[y_{\text{teo}}(z_i, \vec{\theta}) - y_{\text{obs},i} \right] C_{ij}^{-1} \left[y_{\text{teo}}(z_j, \vec{\theta}) - y_{\text{obs},j} \right], \quad (4.6)$$

onde $y_{\text{teo}}(z_i, \vec{\theta})$ é a expressão funcional do modelo teórico aplicado ao i -ésimo valor de redshift, $y_{\text{obs},i}$ é a grandeza y observada no redshift z_i e C_{ij} os elementos da matriz de covariância entre os valores de $y_{\text{obs},i}$.

Note que em casos onde os dados são não correlacionados, a matriz de covariância é diagonal e dada por $C_{ii} = 1/\sigma_i^2$, sendo σ desvio padrão. Nesse caso, a função χ_A^2 assume a forma usual:

$$\chi_A^2(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \frac{\left[y_{\text{teo}}(z_i, \vec{\theta}) - y_{\text{obs},i} \right]^2}{\sigma_i^2}, \quad (4.7)$$

No entanto, vamos optar nesse trabalho em manter a forma geral por uma simples razão. Em cosmologia, diferentemente do que em outras área do conhecimento, os dados observacionais quase nunca são independentes. Muito disso por conta dos procedimentos de determinação de distâncias cosmológicas através de calibrações sucessivas, que pode implicar em uma certa correlação entre os dados obtidos.

É usual utilizar algumas informações adicionais em ajustes de modelos cosmológicos. Enquanto que para alguns parâmetros do modelo o prior é uniforme, podemos utilizar priors gaussianos em outros parâmetros cujo valor foi obtido através de experimentos não correlacionados. Para esses casos, o prior individual de um parâmetro geral θ_k é:

$$P_k(\theta_k) = c_1 \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\theta_k - \theta_{k,\text{obs}})^2}{\sigma_{\theta_k,i}^2}\right],$$

onde c_1 é uma constante de normalização, e $\theta_{k,\text{obs}}$ o valor do parâmetro θ_k obtido através de algum outro procedimento experimental com distribuição normal, de desvio padrão $\sigma_{\theta_k,i}$. Em um modelo de K parâmetros, em que L desses K possuem priors gaussianos e o restante priors uniformes, a PDF à priori $P(\vec{\theta})$ será :

$$P(\vec{\theta}) = c_2 \prod_{i=1}^L P_k(\theta_k) = c_2 \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{(\theta_k - \theta_{k,\text{obs}})^2}{\sigma_{\theta_k,i}^2}\right], \quad (4.8)$$

e c_2 uma constante englobando os priors uniformes e as constantes de normalização dos priors gaussianos.

A PDF a posteriori dos parâmetros do modelo, dados os vínculos observacionais, será calculada de acordo com as Eqs.(4.3) (4.5) e (4.8) :

$$P(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \chi_A^2(\vec{\theta}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{(\theta_k - \theta_{k,\text{obs}})^2}{\sigma_{\theta_k}^2} \right]. \quad (4.9)$$

Portanto, a estimativa dos parâmetros é realizada ao se encontrar o ponto de máximo valor de (4.9). Dessa função, podemos também obter os intervalos de confiança, correlação entre os parâmetros ajustados e as estimativas uniparamétricas obtidas através da marginalização dos parâmetros não desejados.

Até agora, consideramos um conjunto de dados A , contendo N medições da grandeza y em função do redshift. No entanto, podemos adicionar quantos conjuntos de dados quisermos, com quaisquer grandezas possíveis. Por exemplo, se quisermos adicionar na análise um conjunto A_2 independente dos dados de A , com N_2 medições da grandeza geral u , basta multiplicar a antiga verossimilhança dada em (4.5) por um termo $\propto e^{-\frac{1}{2} \chi_{A_2}^2}$, onde $\chi_{A_2}^2$ é análoga à expressão (4.6) substituindo $y \rightarrow u$. Dessa forma, uma expressão para a probabilidade de um determinado vetor de parâmetros dados os referidos conjuntos de dados análoga à (4.9) será:

$$P(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \chi_A^2(\vec{\theta}) - \frac{1}{2} \chi_{A_2}^2(\vec{\theta}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{(\theta_k - \theta_{k,\text{obs}})^2}{\sigma_{\theta_k}^2} \right].$$

Generalizando para M conjuntos de dados independentes:

$$P(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \chi_{A_i}^2(\vec{\theta}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{(\theta_k - \theta_{k,\text{obs}})^2}{\sigma_{\theta_k}^2} \right].$$

Um detalhe final: devemos salientar que é comum no procedimento de otimização de probabilidades, definir a função $L(\vec{\theta} | \{Y_i\})$ de acordo com:

$$L(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = -\ln \frac{P(\vec{\theta} | \{Y_i\})}{N},$$

tal que por fim, o ajuste consista em minimizar a função:

$$L(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \chi_{A_i}^2(\{Y_i\} | \vec{\theta}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{(\theta_k - \theta_{k,\text{obs}})^2}{\sigma_{\theta_k}^2},$$

em que M é quantidade de conjuntos de dados, Y_i é grandeza do i -ésimo conjunto e L a quantidade de parâmetros com priors gaussianos. Tal procedimento não deve apresentar diferenças no valor otimizado do vetor de parâmetros $\vec{\theta}_k$.

4.3 SELEÇÃO BAYESIANA DE MODELOS

De acordo com as técnicas de inferência estatística, uma pergunta se segue: qual modelo descreve melhor os dados? Note que todo conteúdo abordado até aqui assumia

a existência de um modelo apenas, que vamos designar simbolicamente por \mathfrak{M}_A . As distribuições de probabilidades estavam a todo momento condicionadas a esse modelo, tal que o teorema de Bayes dado na Eq. (4.2) seria mais corretamente escrito da forma:

$$P(\vec{\theta}, \mathfrak{M}_A | \{Y_i\}) = \frac{P(\{Y_i\}, \mathfrak{M}_A | \vec{\theta}) P(\vec{\theta} | \mathfrak{M}_A)}{P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_A)}. \quad (4.10)$$

Vamos reescrever o denominador de (4.10) como:

$$P_A(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_A) = \int d\vec{\theta} P(\vec{\theta} | \mathfrak{M}_A) P_A(\{Y_i\} | \vec{\theta}, \mathfrak{M}_A), \quad (4.11)$$

em virtude da condição de normalização. Essa quantidade é conhecida por verossimilhança do modelo, evidência bayesiana, evidência do modelo ou ainda verossimilhança marginal. Ela é de suma importância quando deseja-se realizar comparações entre dois ou mais modelos.

Uma vez que a evidência bayesiana pode ser obtida de acordo com (4.11), é praticável utilizar o teorema de Bayes para calcular a probabilidade a posteriori do modelo \mathfrak{M}_A , dado o conjunto de dados observacionais. Ou seja $P(\mathfrak{M}_A | \{Y_i\})$ é escrito como (MARCH, 2013):

$$P(\mathfrak{M}_A | \{Y_i\}) = \frac{P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_A) P(\mathfrak{M}_A)}{P(\{Y_i\})}. \quad (4.12)$$

Note que a primeira parcela do numerador do lado direito de (4.12) é a mesma que aparece no denominador de (4.2). Aqui, $P(\mathfrak{M}_j)$ é o prior do modelo e $P(\{Y_i\})$ uma constante de normalização, dada por:

$$P(\{Y_i\}) = \sum_j P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_j) P(\mathfrak{M}_j),$$

em que a soma é feita entre os modelos.

A comparação é feita via razão de probabilidade $P(\mathfrak{M}_j | \{Y_i\})$. Supondo os modelos gerais A e B , efetua-se:

$$\frac{P(\mathfrak{M}_A | \{Y_i\})}{P(\mathfrak{M}_B | \{Y_i\})} = \frac{P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_A) P(\mathfrak{M}_A)}{P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_B) P(\mathfrak{M}_B)} = B_{AB} \frac{P(\mathfrak{M}_A)}{P(\mathfrak{M}_B)}, \quad (4.13)$$

onde o fator de Bayes é definido por intermédio de:

$$B_{AB} \equiv \frac{P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_A)}{P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_B)}. \quad (4.14)$$

Tal fator fornece uma medida da qualidade relativa entre dois modelos independentemente dos priors individuais associados. Quanto maior for o valor de B_{AB} , mais a evidência de que o modelo A é preferível em relação ao B . Em muitos casos, o prior $P(\mathfrak{M}_A)$ é o mesmo que $P(\mathfrak{M}_B)$, tal que o fator de Bayes fornece diretamente a razão entre as probabilidades a posteriori dos modelos. Para avaliar qualitativamente as razões entre as evidências bayesianas, pode-se utilizar a escala de Jeffrey, de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2 – Escala da evidência a favor do modelo A em detrimento do B pela interpretação do parâmetro de Bayes.

| $\ln B_{AB}$ | Relação | Intensidade da Evidência |
|--------------|--------------|--------------------------|
| <1.0 | $<3:1$ | Inconclusiva |
| 1.0 | $\sim 3:1$ | Evidência Fraca |
| 2.5 | $\sim 12:1$ | Evidência Moderada |
| 3.0 | $\sim 150:1$ | Evidência forte |

Fonte: (MARCH, 2013)

A vantagem de utilizar o fator de Bayes na discriminação entre modelos matemáticos é que ele incorpora informação sobre a qualidade do ajuste e o número de parâmetros livres no modelo. Aqueles com um menor número de parâmetros livres são favorecidos, acordando com os preceitos envolvidos na Navalha de Occam de que os modelos mais simples devem ser escolhidos. Do ponto de vista bayesiano, o melhor modelo é aquele que fornece o melhor ajuste com o menor número de parâmetros livres (MARCH, 2013).

5 VÍNCULOS OBSERVACIONAIS

Introduzida a ideia das componentes escuras unificadas, passamos ao importante estágio de testar se dados observacionais estão de acordo com tal hipótese. O Modelo Unificado, que é definido pelas Eqs. (3.20) e (3.26):

$$H_{\text{UM}}(z, \Omega_{\text{b0}}, \alpha, \beta) = H_0 \sqrt{\Omega_{\text{b0}}(1+z)^3 + (1-\Omega_{\text{b0}})(1+z)^3 \exp\left(3 \int_0^z \frac{w_{\text{u}}(z', \alpha, \beta)}{1+z'} dz'\right)}, \quad (5.1)$$

em que (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016):

$$w_{\text{u}}(z, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \arctan(\alpha z - \beta) - \frac{1}{2}, \quad (5.2)$$

depende de três parâmetros livres, que frequentemente serão chamados de vetor $\vec{\theta} = (\Omega_{\text{b0}}, \alpha, \beta)$.¹ Se por ventura ocorrer a designação dos parâmetros de maneira ordinal, fica subentendido que a ordem $(\Omega_{\text{b0}}, \alpha, \beta)$ foi assumida.

Conforme comentado no capítulo anterior, um modelo é definido não só por sua expressão matemática mas também pelos priors impostos aos parâmetros. No caso de Ω_{b0} , vamos verificar na Sec. 5.1.2 que existem medições relativamente independentes de modelo cosmológico que fornecem uma distribuição gaussiana em seus valores. Já para os parâmetro α e β , assumiremos priors uniformes, cujos limites estão dispostos na Tabela 3.

Tabela 3 – Priors adotados nos parâmetros do Modelo Unificado.

| Parâmetro | Prior |
|----------------------|------------|
| Ω_{b0} | Gaussiano |
| α | $[-2, 12]$ |
| β | $[-2, 8]$ |

Fonte: Do autor

Uma quantidade de interesse nesse estudo é aquele redshift onde o fluido escuro deixa de ter um comportamento do tipo matéria ($w_{\text{u}} \approx 0$) e passa a ter um comportamento tipo constante cosmológica ($w_{\text{u}} \approx -1$). Isso ocorre num *redshift de equivalência*, definido

¹ O modelo depende também do parâmetro H_0 . Porém, ele será marginalizado, e nesse sentido, não é uma quantidade de interesse pra fixar as características do modelo cosmológico. Um parâmetro desse tipo é chamado em inglês de *nuisance parameters*, ou seja, parâmetro indesejado.

como sendo aquele redshift onde $w_u = -1/2$. Impondo essa condição na Eq.(5.2), tal quantidade pode ser obtida como:

$$z_{\text{eq}} = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (5.3)$$

À fins de comparação, vamos submeter um modelo Λ CDM de dois parâmetros ao mesmo procedimento de ajuste que o aplicado ao Modelo Unificado. O Λ CDM é definido conforme a Eq.(2.39) negligenciando-se as contribuições ultra relativísticas, sob a premissa de tais componentes possuem parâmetro de densidade insignificantes para $z < 10$. Logo:

$$H_{\Lambda\text{CDM}}(z) = H_0 \sqrt{(\Omega_{\text{b}0} + \Omega_{\text{c}0})(1+z)^3 + 1 - (\Omega_{\text{b}0} + \Omega_{\text{c}0})}. \quad (5.4)$$

Nessa análise, consideraremos os priors dados na Tabela 4.

Tabela 4 – Priors adotados nos parâmetros do Λ CDM.

| Parâmetro | Prior |
|----------------------|-----------|
| $\Omega_{\text{b}0}$ | Gaussiano |
| $\Omega_{\text{c}0}$ | [0 , 0.6] |

Fonte: Do autor

No Λ CDM, temos uma expressão de um w_{dark} efetivo para as componentes escuras que está definido na Eq.(3.2). Para essa função w_{dark} efetiva, podemos aplicar a mesma definição de redshift de equivalência que a utilizada no Modelo Unificado ($w_{\text{dark}} = -1/2$). Com isso, é obtida a expressão:

$$z_{\text{eq}} = \left(\frac{1 - \Omega_{\text{b}0} - \Omega_{\text{c}0}}{\Omega_{\text{c}0}} \right)^{1/3} - 1. \quad (5.5)$$

Com os modelos UM e Λ CDM definidos, esse capítulo objetiva comentar rapidamente sobre os procedimento de coleta de dados cosmológicos até a obtenção da função χ^2 referente a cada conjunto. Posteriormente, vamos definir a função de verossimilhança levando em conta todos os dados cosmológicos, culminando na definição da função de distribuição de probabilidades a posteriori, donde obteremos as propriedades estatísticas de interesse. Nossa análise consiste em avaliar os parâmetros de best-fit,² as regiões de confiança de 1σ nas distribuições de probabilidades marginais de cada parâmetro e análise das regiões de 1σ , 2σ e 3σ das probabilidades marginais biparamétricas. Indo além, vamos analisar e comparar os redshifts de equivalência dos modelos e estudar a região de 1σ de confiança na função $w_u(\alpha, \beta)$ do Modelo Unificado, e na função $w_{\text{dark}}(\Omega_{\text{b}0}, \Omega_{\text{c}0})$ do Λ CDM.

² Parâmetro de *best-fit* é o nome dado ao vetor específico $\vec{\theta}_{\text{max}}$ que maximiza a função de distribuição de probabilidades a posteriori de cada modelo.

É válido ressaltar que as funções $w_u(\alpha, \beta)$ no UM e $w_{\text{dark}}(\Omega_{\text{b0}}, \Omega_{\text{c0}})$ no modelo Λ CDM tem o mesmo significado físico, mas são nomeadas de maneira diferente, pois, no primeiro caso ela é uma equação de estado de um fluido escuro unificado, enquanto que no segundo é uma equação de estado efetiva da composição de dois fluidos (matéria escura e energia escura como entidades diferenciadas).

5.1 DADOS OBSERVACIONAIS

5.1.1 Constante de Hubble

A constante de Hubble H_0 é um parâmetro cosmológico de qualquer modelo de interesse. Sua determinação é de vital importância pois este parâmetro fornece informação da velocidade do fluxo de Hubble no universo atual. Também, vários dados observacionais são calibrados por intermédio de um valor de H_0 obtido independentemente de modelos cosmológicos.

Como já foi comentado na Sec.2.3, Hubble verificou a expansão cósmica com a medição das distâncias e das velocidades de afastamento galácticas (HUBBLE, 1929); vide Fig. 8. Nas escalas de grandeza envolvidas no trabalho de Hubble, espera-se que a relação entre essas quantidades respeite a Eq.(2.44), tal que a constante de Hubble possa ser estimada por meio de um ajuste linear. O valor obtido por Hubble para H_0 nessa ocasião foi de $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Esse valor está bem longe do valor atualmente aceito de $\sim 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, e se deve à dificuldade na época de se controlar erros sistemáticos de medida. Depois da estimativa de Hubble, vários autores foram aprimorando as técnicas de controle de incertezas sistemáticas, diminuindo o valor da constante para algo entre 50 e $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ aproximadamente, conforme dados dispostos na Tabela 5 (LIVIO, 2003). O embate pelo valor da constante de Hubble motivou a construção do telescópio *Hubble Space Telescope* (HST) que obteve como resultado final em 2001 $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (FREEDMAN et al., 2001). Depois da estimativa da constante de Hubble pelos dados do HST, estudos posteriores foram realizados apontando sempre resultados similares, mas com diminuição da incerteza associada.

O método de obtenção da constante de Hubble consiste em realizar uma série de calibrações sucessivas na medição de objetos astronômicos posicionados em diversas distâncias. No resultado encontrado por Riess et al. (2011) de

$$H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (5.6)$$

foram utilizados três métodos de obtenção de distâncias cósmicas de supernovas tipo Ia, quais sejam (BENNETT et al., 2014):

1. Uma distância geométrica até NGC 4258³ baseando-se em métodos de medição de

³ Também conhecida como Messier 106 ou M106.

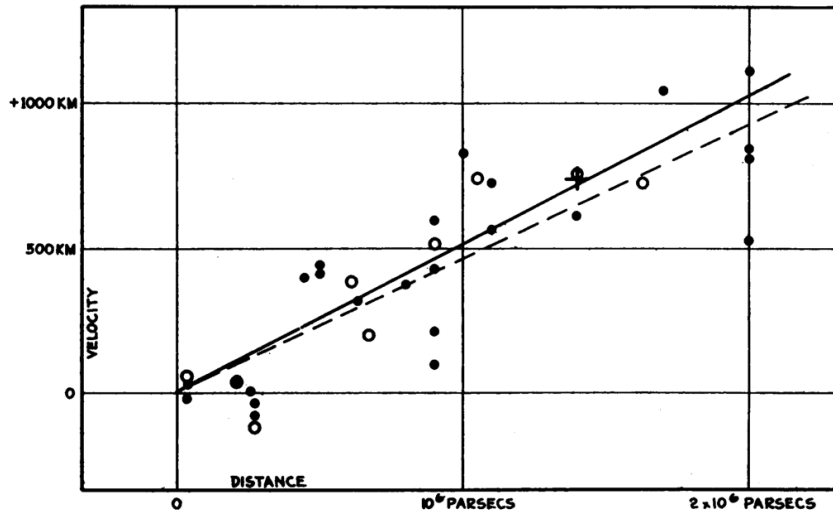


Figura 8 – Diagrama apresentado por Hubble (1929) que comprova a expansão cósmica. O eixo ordenado apresenta as velocidades de afastamento das galáxias enquanto que o das abscissas remete a distâncias de afastamento.

Fonte: (HUBBLE, 1929)

distâncias de megamasers astronômicos;

2. distância de paralaxe até 13 Cefeidas da Via Láctea através dos dados dos telescópios *HST* e *Hipparcos*;
3. distâncias de binárias eclipsantes⁴ até 92 Cefeidas na Grande Núvem de Magalhães⁵.

Independentemente, Freedman et al. (2012) recalibrou os dados do telescópio *HST* usando dados de observações no infravermelho médio de Cefeidas minimizando alguns dos erros sistemáticos presentes nas observações óticas que foram utilizadas por Freedman et al. (2001). O resultado foi uma constante de Hubble dada por

$$H_0 = 74.3 \pm 1.5 \text{ (est)} \pm 2.1 \text{ (sis)} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (5.7)$$

Existem outros conjuntos de dados cosmológicos que podem fornecer informações a respeito da constante de Hubble. Um exemplo é o conjunto das medidas de oscilações acústicas de bárions (BAO). Nesse caso, apesar de não ser possível obter uma estimativa direta de H_0 , esses dados atuam como vínculos importantes em testes de consistência de possíveis soluções cosmológicas.

Uma outra maneira de estimar H_0 é através dos dados de radiação cósmica de fundo, via métodos que dependem da adoção de um modelo cosmológico específico. Um dos resultados da missão WMAP⁶ foi que para um universo Λ CDM plano, a constante de

⁴ Binárias eclipsantes (em inglês *Eclipsing Binaries*) são sistemas estelares binários onde se é possível ver uma estrela passando em frente a outra do nosso ponto de vista.

⁵ Em inglês, *Large Magellanic Cloud* (LMC).

⁶ *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*.

Tabela 5 – Valores da constante de Hubble mensurados por diversos autores ao longo do Séc.XX.

| Ano | Autor | H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹) |
|-----------|-------------------------|---|
| 1927 | Lemaître | 600 |
| 1929 | Hubble | 530 – 513 – 465 |
| 1931 | Hubble & Humason | 558 |
| 1936 | Hubble | 526 |
| 1946 | Mineur | 330 |
| 1951 | Behr | 250 |
| 1952 | Baade, Thackeray | 270 |
| 1956 | Humas, Mayall & Sandage | 180 |
| 1958 | Holmberg | 134 |
| 1958 | Sandage | 150 – 75 – 38 |
| 1959 | McVittie | 227 – 143 |
| 1960 | Sersic | 125 |
| 1960 | van den Bergh | 125 |
| 1960 | van den Bergh | 125 |
| 1961 | Ambartsumyan | 140 – 60 |
| 1961 | Sandage | 113 – 85 |
| 1964 | de Vaucouleurs | 125 |
| 1968 – 69 | de Vaucouleurs | 100 |
| 1969 | van den Bergh | 110 – 83 |
| 1968 – 76 | Sandage & Tammann | 50 |
| 1972 | Sandage | 55 |
| 1979 | de Vaucoulers | 100 |

Fonte: (LIVIO, 2003)

Hubble é $H_0 = 70.0 \pm 2.2$ km s⁻¹Mpc⁻¹ (BENNETT et al., 2013). Com o mesmo modelo cosmológico, os dados de PLANCK Collaboration et al. (2014) apontaram $H_0 = 67.3 \pm 1.2$ km s⁻¹Mpc⁻¹. Em ambos os trabalhos, o valor de H_0 na Eq.(5.6) obtido por Riess et al. (2011) foi utilizado como prior.

Existe uma discrepância entre os valores da constante de Hubble obtidos pelo satélite Planck com dados de CMB (altos redshifts) e o valor obtido por Riess et al. (2011) e Freedman et al. (2012) com calibrações sucessivas das distâncias cosmológicas (baixos redshifts). Embora tenha surgido alguma especulação a respeito de um nova física capaz de reconciliar esses valores (HAMANN; HASENKAMP, 2013; WYMAN et al., 2014; BATTYE; MOSS, 2014; DVORKIN et al., 2014), essa discrepância é provavelmente causada por erros sistemáticos desconsiderados nas determinações individuais de H_0 , ou ainda uma casualidade estatística (VERDE; PROTOPAPAS; JIMENEZ, 2014; GAO; GONG, 2014; EFSTATHIOU, 2014). Como o nosso objetivo é estimar os valores dos parâmetros

cosmológicos do UM e do Λ CDM sem considerar a CMB, a tendência é utilizarmos os dados obtidos por meio de calibrações sucessivas das distâncias cósmicas. No entanto, em meio a essa incoerência estatística existente entre [Riess et al. \(2011\)](#) / [Freedman et al. \(2012\)](#) e [PLANCK Collaboration et al. \(2014\)](#) para H_0 , vamos considerar um valor intermediário entre as Eqs. (5.6) e (5.7) e superestimar as incertezas para que o valor de $H_0 = 67.3 \pm 1.2 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ do satélite Planck esteja incluso dentro do intervalo de confiança de 1σ . Portanto, o valor que vamos adotar daqui em diante será ([CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016](#)):

$$H_0 = 74 \pm 7 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}. \quad (5.8)$$

5.1.2 Parâmetro de Densidade Bariônica

Com a fixação da constante de Hubble, foi possível eliminar um grau de liberdade da análise estatística dos modelos cosmológicos. Outro parâmetro que, similarmente à H_0 , pode ser estimado é o parâmetro de densidade bariônica Ω_{b0} . Para esse fim, é conveniente utilizar a teoria da nucleossíntese primordial, que prediz que a abundância dos núcleos leves H, D, ^3He , ^4He e ^7Li , criados na nucleossíntese primordial deve depender do conteúdo bariônico hoje.

Imediatamente após o Big-Bang, as escalas de energia são tão altas que nenhum núcleo atômico pode permanecer estável. O universo é composto apenas por uma mistura de partículas elementares em equilíbrio térmico. Nesse regime, as fracas interações entre prótons e nêutrons, mantêm a razão nêutron/próton perto da razão de equilíbrio de Boltzmann. Até $\sim 1 \text{ s}$, a energia do universo está em torno de 1MeV e a quantidade de prótons e nêutrons é aproximadamente equivalente. Um deslocamento desse equilíbrio ocorre a medida que acontece a expansão cósmica, favorecendo uma maior quantidade de prótons visto que apresentam menor energia de repouso. Quando a energia atinge $\sim 100 \text{ keV}$, a proporção nêutron/próton fica estagnada em aproximadamente $1/6$ e tem-se início a produção de deutério, o primeiro passo na formação de qualquer um dos núcleos leves H, D, ^3He , ^4He e ^7Li . Até então, esse processo não era possibilitado em virtude da alta energia dos fótons que dissociava qualquer núcleo formado ([TYTLER et al., 2000](#)). A cadeia de reações que ocorrem nesta etapa esta esquematizada na Fig. 9.

Em teoria, a abundância relativa de qualquer um dos núcleos leves depende apenas de um parâmetro: a razão bárion/fóton $\eta \equiv n_b/n_\gamma$ ([KOLB; TURNER, 1990](#)), sendo n_i a densidade numérica da espécie i . Determinando a fração primordial de quaisquer dois dos núcleos leves, é possível inferir a abundância de qualquer um dos outros três ([KIRKMAN](#)

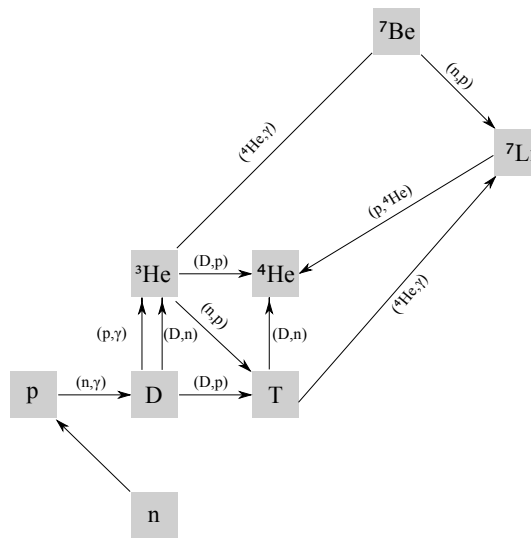


Figura 9 – Cadeia de reações que ocorrem na nucleossíntese primordial e culminam na produção dos núcleos leves.

Fonte: [Pamputt\(Wikimedia\)](#)

[et al., 2003](#)). Também, com a determinação de η , o parâmetro de densidade de bárions fica definido de acordo com ([STEIGMAN, 2012](#)):

$$\Omega_{b0}h^2 = \frac{10^{10}\eta}{273.9}, \quad (5.9)$$

em que h é a constante de Hubble normalizada, dada por $h = H_0 / (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$.

Dentre todas as abundâncias de núcleos leves possíveis, é mais vantajoso obter a razão D/H por uma série de motivos ([TYTLER; FAN; BURLES, 1996](#)):

1. A razão D/H é muito sensível à η ;
2. D e H são isótopos do mesmo elemento, apresentando ionizações quase idênticas;
3. A abundância de D é relativamente grande se comparada a de ${}^7\text{Li}$;
4. Todo o D observado foi produzido na nucleossíntese primordial, uma vez que as reações estelares não produzem deutério e só o consomem;
5. As linhas da série de Lyman⁷ para D e H estão numa região do espectro que é visível da Terra para fontes com $z > 2$. Além disso, essas linhas são satisfatoriamente distantes no espectro de absorção evitando dificuldades maiores com os dados observacionais.

⁷ São as linhas que aparecem no espectro de emissão referentes ao salto quântico de um elétron excitado até o estado fundamental. Recebem o nome de acordo com a sequência do alfabeto grego. Como exemplo, a linha referente transição do segundo para o primeiro estado é chamada Lyman- α .

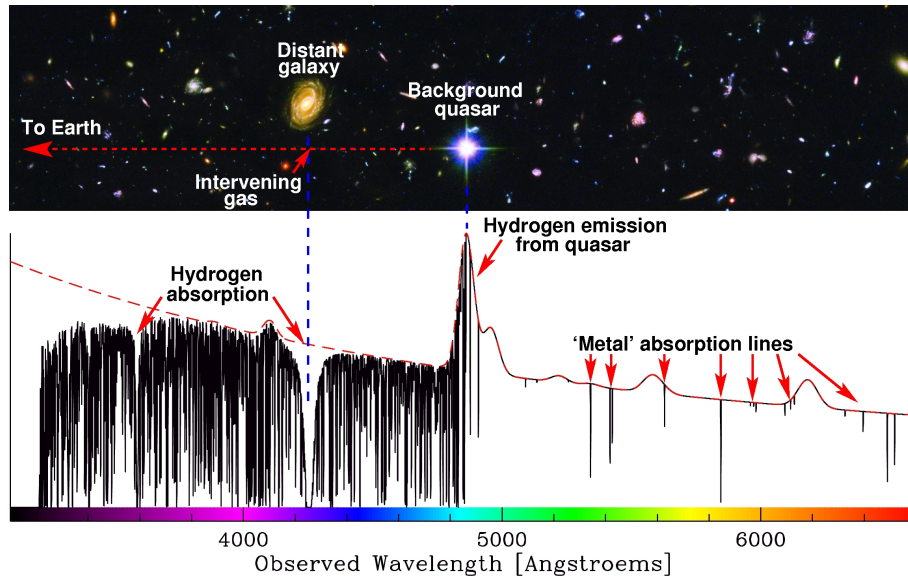


Figura 10 – Linhas de absorção no espectro de quasares devido a interação dos fótons com ao meio interestelar.

Fonte: (LISKE, 2009)

Uma maneira de se mensurar a razão D/H foi proposta por Adams (1976) e consiste em analisar o espectro de absorção de QSO's⁸ procurando por linhas Lyman- α de deutério geradas por nuvens altamente densas de gás hidrogênio neutro presentes no meio interestelar. Sistemas desse tipo são conhecidos por *Damped Lyman- α* (DLA). A abundância primordial de deutério é melhor deduzida da razão D/H em nuvens de baixa metalicidade (TYTLER; FAN; BURLES, 1996).

Ao atravessar a nuvem, algumas frequências do espectro do QSO são absorvidas, formando um padrão conhecido como Floresta Lyman- α ou *Lyman- α forest*, conforme a Fig.10 (LISKE, 2009). A abundância de deutério é então inferida através da investigação do perfil apresentado.

Pela análise do QSO SDSS J1419+0829, Pettini e Cooke (2012) obtiveram:

$$10^5 (D/H)_{DLA} = 2.53 \pm 0.05.$$

A abundância entre dois núcleos leves, segundo a teoria de nucleossíntese padrão, fornece a relação entre razão a bárion/fóton (η) e a razão D/H de acordo com (STEIGMAN, 2012):

$$10^5 (D/H)_{DLA} = 2.6 (1 \pm 0.06) \left(\frac{6}{10^{10}\eta - 6(S-1) - 5\xi/4} \right)^{1.6}, \quad (5.10)$$

⁸ *Quasi-Stellar objects* ou *quasar* são objetos astronômicos de altíssimos redshifts. Tem aparência similar à estrelas, com exceção do espectro eletromagnético e as energias envolvidas que são muitos maiores que as estrelas próximas.

onde ξ é o parâmetro de degenerescência dos neutrinos e $S = \sqrt{1 + 7(N_{\text{eff}} - 3)/43}$, com N_{eff} sendo o número efetivo de neutrinos. No entanto, na teoria padrão de nucleossíntese primordial, esses parâmetros assumem os valores $\xi = 0$ e $S = 1$. Nesse caso, obtemos

$$10^{10}\eta = \left(\frac{45.71}{10^5 (D/H)_{\text{DLA}}} \right)^{1/1.6} = 6.09,$$

com erro total associado de

$$10^{10}\sigma_\eta = \frac{10^{10}\eta}{1.6} \sqrt{0.0036 + \left(\frac{\sigma_{D/H}}{(D/H)_{\text{DLA}}} \right)^2} = 0.24.$$

Desse modo, com a razão bárion fóton de $\eta = (6.09 \pm 0.24) \times 10^{-10}$, é possível obter o parâmetro de densidade de bárions por meio de (5.9):

$$\Omega_{b0}h^2 = \frac{10^{10}\eta}{273.9} = 0.0223 \pm 0.0009 .$$

Esse resultado é condizente com a estimativa da densidade bariônica inferida através da radiação cósmica de fundo nas missões do WMAP ($\Omega_{b0}h^2 = 0.02223 \pm 0.00033$) (BENNETT et al., 2013) e Planck ($\Omega_{b0}h^2 = 0.02205 \pm 0.00028$) (PLANCK Collaboration et al., 2014).

De acordo com os resultados obtidos na Sec.5.1.1, vamos considerar $h = 0.74 \pm 0.7$. Por fim, a estimativa do parâmetro de densidade bariônica aponta como resultado o valor (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016):

$$\Omega_{b0} = 0.0407 \pm 0.0079, \tag{5.11}$$

ou seja, assumindo geometria plana, o universo atual é composto de aproximadamente 4.1% de bárions. Essa informação será utilizada como prior na análise estatística de modelos cosmológicos que vamos aqui realizar.

5.1.3 Supernovas tipo Ia

Supernovas são explosões que ocorrem nos estágios finais de vida de alguns tipos de estrelas. Em virtude da similaridade observacional entre determinadas supernovas, elas podem ser classificadas em diferentes grupos: Ia, Ib, Ic, IIL e IIP. Supernovas do tipo I não possuem linhas de absorção de hidrogênio e são explosões de estrelas localizadas em sistemas binários, geralmente compostos por uma anã branca e uma gigante vermelha. Por sua vez, supernovas do tipo II não ocorrem em sistemas binários, apresentam linhas Lyman- α no espectro e não possuem linhas de hélio ou silício (CAMPOS, 2006).

As supernovas do tipo Ia, ou SNIa, são as mais homogêneas e luminosas dentre todas. Possuindo outra propriedade peculiar, as SNIa apresentam entre si magnitude absoluta aproximadamente similar (MARCH, 2013). Tais características justificam o fato

de serem amplamente utilizadas como indicadores de distância em cosmologia e as tornam poderosas ferramentas no estudo da história de expansão cósmica em virtude atuarem como velas padrão na medição da distância de luminosidade $d_L(z)$.

No final da década de 1990, [Riess et al. \(1998\)](#) descobriu a aceleração cósmica atual utilizando 50 SNIa (16 distantes e 34 próximas) dos dados do Hubble Space Telescope (HST). Em pouco tempo, a análise com 18 SNIa próximas e 42 distantes do *Calan-Tololo supernova survey* feita por [Perlmutter et al. \(1999\)](#) apontou a mesma conclusão. Tal resultado foi tão importante para a cosmologia moderna que rendeu um Prêmio Nobel aos autores do trabalho no ano de 2011 ([MIAO et al., 2012](#)).

Visto que os mecanismos que produzem as supernovas ainda não foram compreendidos completamente, as propriedades físicas de interesse são obtidas mediante o estudo da luminosidade emitida. Propriedades fotométricas dão origem à uma curva de luz donde a evolução da magnitude da supernova é acompanhada ao longo do tempo. Vale ressaltar que uma supernova terá uma curva de luz em cada banda de observação ([CAMPOS, 2006](#)). Temos na Fig. 11 alguns exemplos na banda de observação B do comportamento típico das curvas de luz para supernovas do tipo Ia. Note que existe uma pequena variação de magnitude entre elas, conforme mostra a Fig. 11a. Devido à uma correlação existente entre o brilho de máxima luminosidade e a duração da supernova, conhecida como “correlação de Phillips”, é possível corrigir as curvas de luminosidade das SNIa de modo a se obter uma curva padronizada ([PHILLIPS, 1993](#)). Uma grande redução na dispersão das curvas foi resultado do trabalho de [Kim \(2008\)](#), c.f. Fig. 11b. Com esse procedimento, é possível determinar a magnitude absoluta das supernovas e conseqüentemente, pode-se calcular o módulo de distância de acordo com a Eq.(2.61) ([MIAO et al., 2012](#)).

Ao longo da última década, vários grupos vem trabalhando com os conjuntos de dados de supernovas. Como exemplo, podemos citar o *High-Z Team* ([RIESS et al., 2004](#); [RIESS et al., 2007](#)), o *Supernova Legacy Survey* – SNLS ([ASTIER et al., 2006](#); [BAUMONT et al., 2008](#)), ESSENCE ([MIKNAITIS et al., 2007](#); [WOOD-VASEY et al., 2007](#)), *Nearby Supernova Factory* – NSF ([SCALZO et al., 2010](#)), o *Carnegie Supernova Project* – CSP ([FOLATELLI et al., 2010](#); [CONTRERAS et al., 2010](#)), o *Lick Observatory Supernova Search* - LOSS ([LEAMAN et al., 2011](#); [LI et al., 2011a](#); [LI et al., 2011b](#)) e o *Sloan Digital Sky Survey* - SDSS ([HOLTZMAN et al., 2008](#); [KESSLER et al., 2009](#)). O Supernova Cosmology Project em 2009 estabeleceu uma maneira homogênea de analisar essas supernovas. Foram selecionadas 307 SNIa de alta qualidade para compor um conjunto de dados chamado “Union” ([KOWALSKI et al., 2008](#)), que foi sendo atualizado ao longo dos anos. Na versão “Union 2”, o conjunto contava com 557 supernovas ([AMANULLAH et al., 2010](#)) e 580 no “Union 2.1”, cujos os dados estão ilustrados na Fig. 12 em um gráfico do módulo de distância em função do redshift ([SUZUKI et al., 2012](#)). Em nossa análise de supernovas, vamos

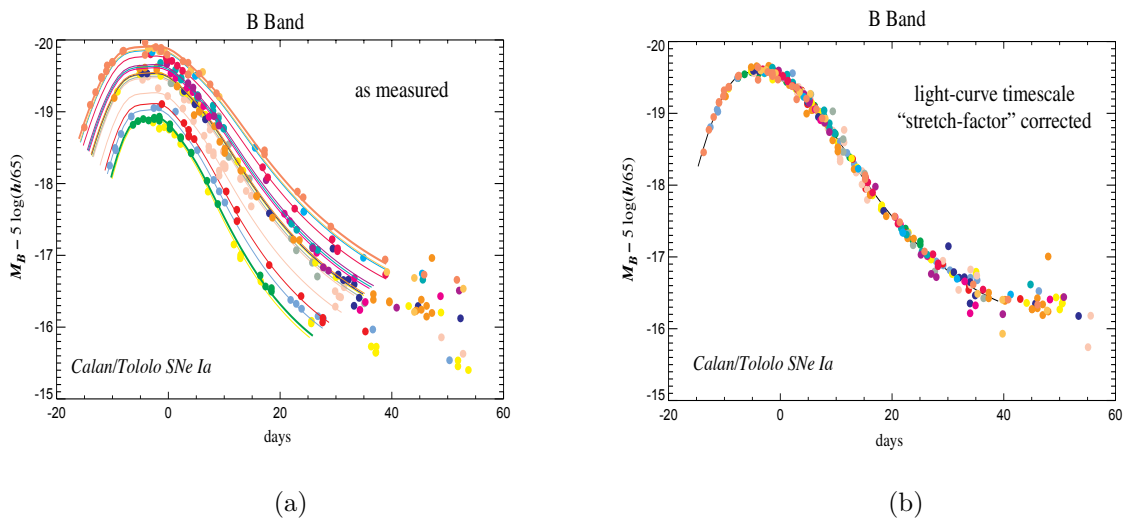


Figura 11 – Comportamento típico das curvas de luz de supernovas do tipo Ia. A Fig. 11a apresenta curvas de luz para banda B dos dados de algumas supernovas do conjunto de dados do *Calan–Tololo SNIa* antes da correção duração-magnitude. Na Fig. 11b, temos as mesmas curvas após a correção. Fonte: (KIM, 2008).

utilizar os dados das 580 SNIa’s do Union 2.1 (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).⁹

O módulo de distância teórico é calculado conforme a Eq.(2.62)

$$\mu_{\text{teo}} = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{\text{Mpc}} \right) + 25, \quad (5.12)$$

sendo que a distância de luminosidade é fornecida pelas Eqs. (2.57), (2.47), (2.51) e (2.45), e em um universo com geometria plana, pode ser expressa por :

$$D_L(z, \vec{\theta}) = (1+z) \int_0^z \frac{c dz'}{H(z', \vec{\theta})}.$$

Aqui, $\vec{\theta}$ é o vetor que contém todos os parâmetros necessários para determinação do modelo cosmológico.

Vamos definir aqui as quantidades:

$$d_h(z, \vec{\theta}) \equiv \frac{H_0}{c} D_L(z, \vec{\theta}) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z', \vec{\theta})} \quad (5.13)$$

⁹ Os dados de módulo de distância estão disponíveis em <http://supernova.lbl.gov/union/figures/SCPUnion2.1_mu_vs_z.txt> junto com as matrizes de covariância contendo os erros sistemáticos <http://supernova.lbl.gov/union/figures/SCPUnion2.1_covmat_sys.txt> e sem erros sistemáticos <http://supernova.lbl.gov/union/figures/SCPUnion2.1_covmat_nosys.txt>.

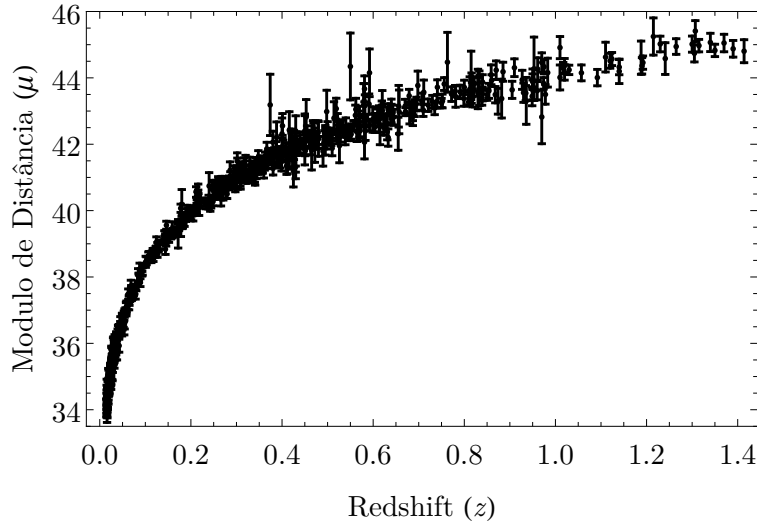


Figura 12 – Diagrama da Hubble para as supernovas do conjunto de dados Union 2.1.
Fonte: (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

e:

$$\mathcal{M} \equiv 5 \log_{10} \left(\frac{c/H_0}{\text{Mpc}} \right) + 25, \quad (5.14)$$

para reescrever o módulo de distância como:

$$\mu_{\text{teo}}(z, \vec{\theta}, \mathcal{M}) = 5 \log_{10} [d_h(z, \vec{\theta})] + \mathcal{M}. \quad (5.15)$$

Para comparar o modelo teórico com os dados observacionais, precisamos definir a função χ^2 dos dados de SNIa como (MIAO et al., 2012):

$$\chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = [\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}} - \boldsymbol{\mu}_{\text{teo}}]^T \mathbf{C}^{-1} [\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}} - \boldsymbol{\mu}_{\text{teo}}], \quad (5.16)$$

em que $\boldsymbol{\mu}_{\text{obs}}$ é o vetor contendo como elementos os valores dos módulos de distância para cada supernova, $\boldsymbol{\mu}_{\text{teo}}$ é um vetor contendo as previsões teóricas segundo a Eq.(5.15) para os respectivos valores de redshift:

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{teo}} = \begin{pmatrix} 5 \log_{10} [d_h(z_1, \vec{\theta})] + \mathcal{M} \\ 5 \log_{10} [d_h(z_2, \vec{\theta})] + \mathcal{M} \\ \vdots \\ 5 \log_{10} [d_h(z_{580}, \vec{\theta})] + \mathcal{M} \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \log_{10} d_h(z_1, \vec{\theta}) \\ \log_{10} d_h(z_2, \vec{\theta}) \\ \vdots \\ \log_{10} d_h(z_{580}, \vec{\theta}) \end{pmatrix} + \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{580 \times 1} \quad (5.17)$$

e \mathbf{C} é a matriz de covariância. É importante levar em conta a matriz de covariância \mathbf{C} se quisermos considerar os erros sistemáticos nos dados de supernova. Se estes não forem

presentes, essa matriz é diagonal e definida pelas variâncias σ_i^2 em cada dado i . Nesse caso, a função χ_{SNIa}^2 recupera sua expressão usual:

$$\chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{580} \frac{[\mu_{\text{obs},i} - \mu_{\text{teo}}(z_i, \vec{\theta}, \mathcal{M})]^2}{\sigma_i^2} \quad (\text{sem sistemáticos}).$$

Vale salientar que, do modo como está escrito em (5.16), o χ_{SNIa}^2 não depende apenas do vetor de parâmetros do modelo mas depende ainda do parâmetro \mathcal{M} . Visto que não estamos interessados em estimar este último, é possível marginalizá-lo da função de probabilidades a posteriori de acordo com o procedimento comentado no Cap. 4. Para realizá-lo, devemos antes de tudo explicitar \mathcal{M} na função $\chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M})$. De acordo com as Eqs.(5.16) e (5.17), reescrevemos χ_{SNIa}^2 como:

$$\chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = [\mathbf{S} - \mathcal{M}\mathbf{U}]^T \mathbf{C}^{-1} [\mathbf{S} - \mathcal{M}\mathbf{U}] \quad (5.18)$$

em que:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mu_{\text{obs},1} - 5 \log_{10} d_h(z_1, \vec{\theta}) \\ \mu_{\text{obs},2} - \log_{10} d_h(z_2, \vec{\theta}) \\ \vdots \\ \mu_{\text{obs},580} - \log_{10} d_h(z_{580}, \vec{\theta}) \end{pmatrix}_{580 \times 1} \quad (5.19)$$

e

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{580 \times 1}. \quad (5.20)$$

Expandindo a Eq.(5.18), obtemos a expressão.

$$\chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} \mathcal{M}^2 - \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} \mathcal{M} - \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} \mathcal{M}.$$

Para simplificá-la, devemos perceber que os últimos dois termos são equivalentes. Como $\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}$ é um escalar, sua transposta é invariante validando a relação $\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}]^T = \mathbf{S}^T [\mathbf{C}^{-1}]^T \mathbf{U}$. A matriz de covariância \mathbf{C} é sempre simétrica, tal que encontramos a igualdade:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}$$

e com isso, podemos por fim reescrever o $\chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M})$:

$$\chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} - 2\mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} \mathcal{M} + \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} \mathcal{M}^2.$$

ou de maneira mais simples:

$$\chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = a_S + b_S \mathcal{M} + c_S \mathcal{M}^2, \quad (5.21)$$

em que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_S \equiv \mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{580} \sum_{j=1}^{580} [\mu_{\text{obs},i} - 5 \log_{10} d_h(z_i, \vec{\theta})] C_{ij}^{-1} [\mu_{\text{obs},j} - 5 \log_{10} d_h(z_j, \vec{\theta})] \\ b_S \equiv -2\mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} = -2 \sum_{i=1}^{580} \sum_{j=1}^{580} C_{ij}^{-1} [\mu_{\text{obs},i} - 5 \log_{10} d_h(z_i, \vec{\theta})] \\ c_S \equiv \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^{580} \sum_{j=1}^{580} C_{ij}^{-1} \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Com \mathcal{M} explícito na função χ_{SNIa}^2 , recuperamos a forma da função de verossimilhança conforme a Eq.(4.5) escrevendo:

$$\mathcal{L}_{\text{SNIa}}(\vec{\theta}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \chi_{\text{SNIa}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) \right] = N \exp \left[-\frac{a_S + b_S \mathcal{M} + c_S \mathcal{M}^2}{2} \right].$$

em que N é um simples fator constante, real e finito. Agora, marginaliza-se o parâmetro \mathcal{M} integrando a verossimilhança entre os limites: os infinitos positivo e negativo. Temos:

$$\mathcal{L}_{\text{SNIa,m}}(\vec{\theta}) = N \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{M} \exp \left[-\frac{a_S + b_S \mathcal{M} + c_S \mathcal{M}^2}{2} \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{c_S}} N \exp \left(\frac{b_S^2}{8c_S} - \frac{a_S}{2} \right).$$

Com isso, reescrevemos a verossimilhança na forma:

$$\mathcal{L}_{\text{SNIa,m}}(\vec{\theta}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \chi_{\text{SNIa,m}}^2(\vec{\theta}) \right]$$

onde foi definida a função $\chi_{\text{SNIa,m}}^2$ independente do parâmetro \mathcal{M} como:

$$\chi_{\text{SNIa,m}}^2 = a_S - \frac{b_S^2}{4c_S} + \ln \frac{c_S}{2\pi}. \quad (5.23)$$

Os termos a_S , b_S e c_S são funções dos parâmetros e estão definidas na Eq. (5.22).

5.1.4 Explosões de Raios Gamma

Desde que passaram a ser utilizadas nas estimativas de parâmetros cosmológicos, os dados de SNIa's se mostraram muito confiáveis e atualmente são bastante utilizados nos ajustes de modelos cosmológicos. Também, os dados obtidos da medição da anisotropia da

radiação cósmica de fundo (CMB) fornecem valiosas informações de natureza cosmológica. No entanto, uma vez que as supernovas mais distantes tem redshift da ordem de 1.7 (c.f. (RIESS et al., 2001)) e as flutuações da radiação cósmica de fundo remetem ao redshift da ordem de 1000 (HU et al., 1995), existe um enorme intervalo nos valores de redshift que é inacessível observacionalmente. Atualmente, existe enorme esforço em se encontrar dados astronômicos que cubram esse intervalo desconhecido. Talvez, os candidatos mais promissores sejam os de explosões de raios gamma (GRB). Espera-se que uma fração $\gtrsim 50\%$ das observações de GRB's apresentem redshift > 5 e os valores de redshift esperados podem ser maiores do que 10 (BROMM; LOEB, 2002).

Apesar de ainda não se conhecer completamente o mecanismo de emissão das GRB's, elas podem ser consideradas excelentes candidatas a velas padrão por terem um brilho bastante intenso (WEI; ZHANG, 2009)(MIAO et al., 2011b). Para contornar a dificuldade da falta de uma descrição final do mecanismo de emissão, muitos autores vem propondo correlações empíricas de luminosidade que padronizam as GRB's como indicadores de distância (AMATI et al., 2002; GHIRLANDA; GHISELLINI; LAZZATI, 2004; LIANG; ZHANG, 2005; FIRMANI et al., 2005). Além disso, existe o chamado problema da circularidade. Diferentemente das supernovas, não existe um conjunto de dados independentes de modelo cosmológico que possa ser usado para calibrar diretamente as GRB's (WEI; ZHANG, 2009; SCHAEFER, 2007). Vários métodos estatísticos foram propostos para eliminar essa dependência de modelo cosmológico (GRAZIANI, 2011; WANG, 2008; WEI; ZHANG, 2009; GHIRLANDA et al., 2004; GHIRLANDA; GHISELLINI; FIRMANI, 2006; LI et al., 2008; LIANG; ZHANG, 2006; LIANG et al., 2008; WEI, 2010). Neste trabalho, foram calibradas as 138 GRB's compiladas em (LIU; WEI, 2015) sem dependência direta de modelo cosmológico, utilizando dados de SNIa, conforme o método proposto em (WEI, 2010).

Dois grupos distintos de GRB's foram separados: aquelas 59 com $z < 1.4$ (baixo redshift) e as 79 restantes com $z > 1.4$ (alto redshift). Posteriormente, partindo das 580 supernovas do Union2.1, foi realizada uma média dos módulos de distância daquelas supernovas com o mesmo valor de redshift. Esses dados foram interpolados utilizando o método de interpolação de Akima (AKIMA, 1970) fornecendo uma função $\mu = \mu(z)$, válida no intervalo $0 \leq z \leq 1.4$. A razão do método de interpolação de Akima ter sido preferido em detrimento das interpolações linear e cúbica reside no fato de que a curva interpolada passa pelos pontos de maneira mais suave e natural, conforme ilustrado no Apêndice B. Com essa função $\mu(z)$, é possível estimar o módulo de distância de cada uma das 59 GRB's de baixo redshift. Com eles, calculou-se a distância de luminosidade isolando D_L na Eq.(5.12) :

$$\frac{D_L}{\text{Mpc}} = 10^{\left(\frac{\mu}{5} - 5\right)} .$$

Depois disso, a energia equivalente isotropicamente radiada pode ser estimada de acordo

Tabela 6 – Ajustes lineares dos parâmetros λ e b da relação de Amati obtidos com três métodos de regressão linear diferentes.

| Método | b | σ_b | λ | σ_λ |
|--------------|-------|------------|-----------|------------------|
| OLS(X Y) | 1.564 | 0.084 | 52.74 | 0.06 |
| OLS(Y X) | 1.861 | 0.099 | 52.79 | 0.06 |
| OLS bisector | 1.703 | 0.053 | 52.77 | 0.06 |

Fonte: Do autor

com:

$$E_{\text{iso}} = \frac{4\pi S_{\text{bolo}} D_L^2}{1+z},$$

em que S_{bolo} é o fluência bolométrica observada da GRB (WEI, 2010). Em seu trabalho, (AMATI et al., 2002) observou a correlação entre a energia de pico do espectro da GRB (E_p) e a energia isotropicamente radiada (E_{iso}):

$$\log_{10} \frac{E_{\text{iso}}}{\text{erg}} = \lambda + b \log_{10} \frac{E_p}{300 \text{ keV}}, \quad (5.24)$$

que é a relação de Amati. Com os dados de E_p disponíveis em (LIU; WEI, 2015) e de E_{iso} obtidos pela calibração com supernovas, é possível ajustar os parâmetros λ e b da relação de Amati utilizando o conjunto de dados de GRB's de baixo redshift. Existem vários métodos de ajuste linear utilizados em astrofísica, sendo que o procedimento mais comum é o método dos mínimos quadrados (MMQ ou OLS do inglês *ordinary least-squares*) com variável dependente Y dada uma variável independente X , designado por OLS(Y|X). Existe ainda uma versão análoga ao OLS(Y|X), mas com a diferença de se considerar X como variável dependente, dada uma variável independente Y – OLS(X|Y). No entanto um dos métodos mais indicados para realização do ajuste linear é o OLS bisector quando existe uma grande dispersão dos dados comparativamente as incertezas dos pontos (Fig. 13). Seguindo o procedimento descrito em (ISOBE et al., 1990), foram realizadas regressões lineares utilizando os três métodos citados acima, resultando nos valores ajustados para os parâmetros b e λ da relação de Amati que podem ser conferidos na Tabela 6. As retas obtidas com tais parâmetros podem ser visualizadas na Fig.13.

Visto que a dispersão intrínseca dos dados é dominante sobre os erros observacionais, foram considerados os valores dos parâmetros ajustados pelo método OLS bisector. Posteriormente, pôde-se calcular $\log_{10} E_{\text{iso}}$ para as GRB's de alto redshift e com isso, estimar o modulo de distância juntamente com sua respectiva incerteza por meio de (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016):

$$\mu = \frac{5}{2} \log_{10} \frac{E_{\text{iso}}}{\text{erg}} + \frac{5}{2} \log_{10} \frac{(1+z)}{4\pi S_{\text{bolo}}} + 25 \quad (5.25)$$

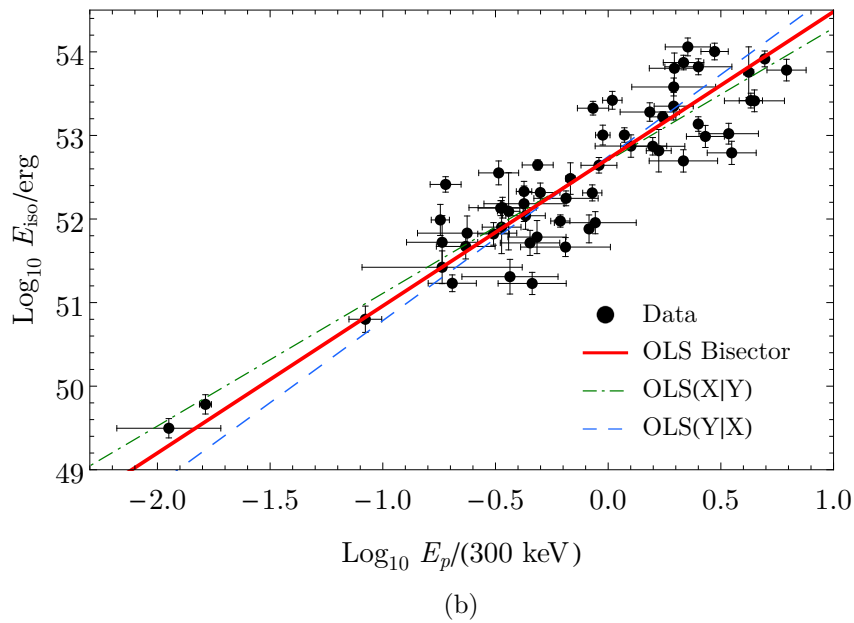
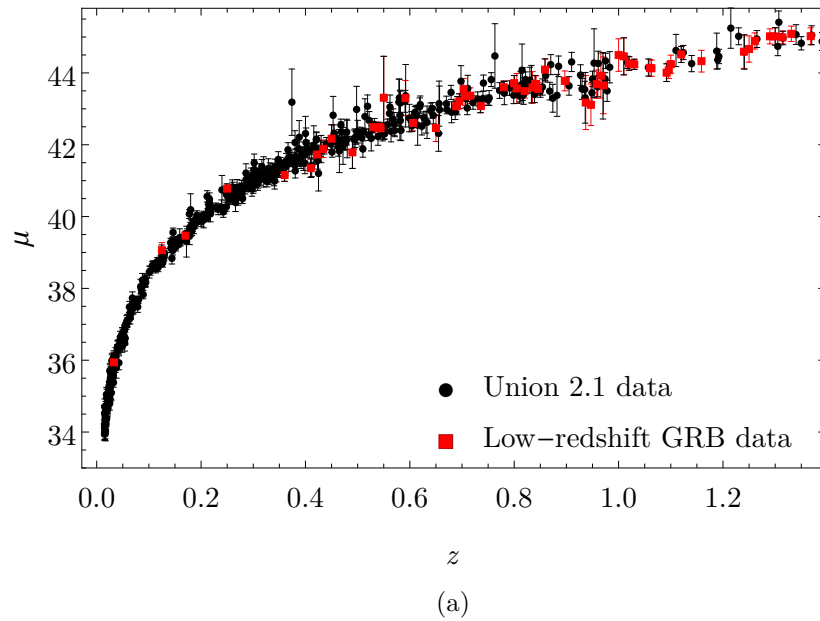


Figura 13 – (a) Em preto, temos o conjunto de dados de SNIa do Union 2.1 e em vermelho os dados de GRB's em baixos redshifts. (b) Comparação dos procedimentos de regressão linear para determinar os parâmetros da relação de Amati. Fonte: (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

e

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sigma_{\log_{10} E_{iso}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2\ln 10} \frac{\sigma_{s_{bolo}}}{S_{bolo}}\right)^2}$$

A incerteza associada a $\log_{10} E_{iso}$ é dada por

$$\sigma_{\log_{10} E_{iso}}^2 = \sigma_\lambda^2 + \left(\sigma_b \log_{10} \frac{E_p}{300 \text{ keV}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\ln 10} \frac{\sigma_{E_p}}{E_p} \right)^2 + \sigma_{\dot{E}_{sys}}^2,$$

obtida através de uma simples propagação de erros com o acréscimo de um erro sistemático $\sigma_{\dot{E}_{sys}}$ advindo de uma dispersão extra nas relações de luminosidade. Esse erro sistemático é um parâmetro livre e pode ser estimado por um ajuste das curvas de luminosidade impondo que o valor de χ_{red}^2 seja um. Em (SCHAEFER, 2007), esse procedimento foi realizado e o valor encontrado para o erro sistemático é $\sigma_{\dot{E}_{sys}}^2 = 0.39$.

Com a calibração de GRB's com os dados de SNIa's no Union 2.1, obtém-se um conjunto de dados de redshift (z), módulo de distância (μ) e sua incerteza (σ_μ) para 79 GRB's de alto redshift que pode ser conferido na Tabela 13 do Apêndice C. Com eles, podemos definir a função χ_{GRB}^2 para os dados de GRBs de acordo com:

$$\chi_{\text{GRB}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{79} \frac{[\mu_i - \mu_{\text{teo}}(z_i, \vec{\theta}, \mathcal{M})]^2}{\sigma_i^2}, \quad (5.26)$$

em que μ_i é o módulo de distância para cada uma das 79 GRB's de alto redshift; e μ_{teo} é a predição teórica de determinado modelo cosmológico para o módulo de distância. Da mesma maneira como foi comentado na seção sobre supernovas, a expressão para o χ_{GRB}^2 não depende apenas dos parâmetros do modelo cosmológico, mas também de um parâmetro \mathcal{M} , que em essência, é definido pela constante de Hubble. Como não temos o intuito de estimá-lo, vamos marginalizá-lo da função de verossimilhança (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

Em primeiro lugar, escreve-se a Eq.(5.26) explicitando o modulo de distância teórico conforme expressões dadas nas Eqs.(5.13)-(5.15):

$$\chi_{\text{GRB}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{79} \frac{[\mu_i - 5 \log_{10} d_h(z, \vec{\theta}) - \mathcal{M}]^2}{\sigma_i^2}.$$

Em seguida, expandimos a expressão no argumento da somatória para fatorar os monômios de \mathcal{M} :

$$\chi_{\text{GRB}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{79} \frac{[\mu_i - 5 \log_{10} d_h(z, \vec{\theta})]^2}{\sigma_i^2} - 2\mathcal{M} \sum_{i=0}^{79} \frac{[\mu_i - 5 \log_{10} d_h(z, \vec{\theta})]}{\sigma_i^2} + \mathcal{M}^2 \sum_{i=0}^{79} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Essa expressão pode ser simplificada como:

$$\chi_{\text{GRB}}^2(\vec{\theta}, \mathcal{M}) = a_G + b_G \mathcal{M} + c_G \mathcal{M}^2 \quad (5.27)$$

em que:

$$\begin{cases} a_G \equiv \sum_{i=0}^{79} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\mu_i - 5 \log_{10} d_h(z, \vec{\theta}) \right]^2 \\ b_G \equiv -2 \sum_{i=0}^{79} \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\mu_i - 5 \log_{10} d_h(z, \vec{\theta}) \right] \\ c_G \equiv \sum_{i=0}^{79} \frac{1}{\sigma_i^2} \end{cases} \quad (5.28)$$

Analogamente ao que foi feito no caso das supernovas, reescrevemos forma da função de verossimilhança conforme a Eq.(4.5):

$$\mathcal{L}_{\text{GRB}}(\vec{\theta}) = N \exp \left[-\frac{a_G + b_G \mathcal{M} + c_G \mathcal{M}^2}{2} \right],$$

sendo N um fator de proporcionalidade e integramos o parâmetro \mathcal{M} de $-\infty$ até ∞ :

$$\mathcal{L}_{\text{GRB,m}}(\vec{\theta}) = N \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{M} \exp \left[-\frac{a_G + b_G \mathcal{M} + c_G \mathcal{M}^2}{2} \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{c_G}} N \exp \left(\frac{b_G^2}{8c_G} - \frac{a_G}{2} \right).$$

de modo a poder definir uma função $\chi_{\text{SNIa,m}}^2$ a partir da relação:

$$\mathcal{L}_{\text{GRB,m}}(\vec{\theta}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \chi_{\text{GRB,m}}^2(\vec{\theta}) \right]$$

que é expressa por:

$$\chi_{\text{GRB,m}}^2 = a_G - \frac{b_G^2}{4c_G} + \ln \frac{c_G}{2\pi}. \quad (5.29)$$

As expressões para os termos a_G , b_G e c_G estão na Eq. (5.28).

5.1.5 Oscilações Acústicas de Bárions

No universo primordial, as escalas de energia eram tão altas que matéria bariônica comum estava acoplada com os fótons. Esse plasma bárion-fóton oscilou devido a competição entre o colapso gravitacional e a pressão de radiação (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012). Segundo Hu e Sugiyama (1996), a velocidade de propagação destas ondas acústicas presente no plasma é definida por $c_s = 1/\sqrt{3(1 + 3\rho_b/4\rho_\gamma)}$. Com a expansão cósmica e a diminuição da temperatura, o perfil barotrópico do fluido primordial ficou impresso nas distribuição de galáxias do universo devido a estagnação das ondas após o desacoplamento bárion/fóton. As regiões de maior pressão ficaram caracterizadas por uma maior densidade de bárions nas escalas correspondentes a distância percorrida pela onda sonora até o instante do desacoplamento. Esses efeitos também aparecem na forma de perturbações da radiação cósmica de fundo, porém fixos em relação ao redshift. No caso das galáxias, espera-se que o pico de BAO associado a distribuição de galáxias varie

com o redshift, fazendo do conjunto de dados de BAO uma efetiva prova da geometria do universo (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012). Uma outra vantagem na utilização dos dados de BAO consiste no fato de que estes apresentam erros sistemáticos bastantes reduzidos se comparados a outros conjuntos de dados (PERCIVAL et al., 2010).

O horizonte de som determina a localização da escala de comprimento do pico da oscilação acústica de bárions (FAROOQ, 2013). Essa época, conhecida como "*drag epoch*" ocorre no redshift z_{drag} quando a matéria bariônica é liberada do arrasto dos fótons desacoplados. Pesquisas atuais medem que esse fenômeno ocorreu com redshift $z_{drag} \simeq 1059$ (PLANCK Collaboration et al., 2014). Conseqüentemente, o horizonte de som pode ser calculado por:

$$r_s(z_{drag}, \vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{z_{drag}}^{\infty} \frac{c}{\bar{H}(z, \vec{\theta}) \sqrt{1 + \frac{3}{4} \frac{1 - \Omega_{b0}}{(1+z)\Omega_{\gamma 0}}}} dz. \quad (5.30)$$

Neste ponto, chamamos atenção aos modelos cosmológicos de interesse. Eles são representados pelas expressões matemáticas (5.1) e (5.4) que descrevem o universo no período de transição entre o domínio de matéria fria não relativística para o de energia escura. Tal período remete a uma faixa de redshift que varia de 0 a aproximadamente 10. Seria um erro utilizar alguma dessas expressões no lugar de $\bar{H}(z, \vec{\theta})$ presente no argumento da integral da Eq.(5.30), visto que os limites vão de $z_{drag} \simeq 1059$ até o infinito. Nesse período, a radiação não pode ser negligenciada. Por conta disso escrevemos a função de Hubble com uma barra acima, que é justamente para indicar que o modelo cosmológico ali presente deve levar em conta um termo de radiação. Isso pode ser feito adicionando um termo do tipo $\Omega_r = \Omega_{r0} (1+z)^4$ no argumento da raiz quadrada das Eqs. (5.1) e (5.4). No Modelo Unificado, teremos (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016):

$$\begin{aligned} \bar{H}_{UM}(z, \Omega_{b0}, \alpha, \beta) = & H \left[\Omega_{r0} (1+z)^4 + \Omega_{b0} (1+z)^3 + \right. \\ & \left. + (1 - \Omega_{b0} - \Omega_{r0}) (1+z)^3 \exp \left(3 \int_0^z \frac{w_u(z', \alpha, \beta)}{1+z'} dz' \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.31)$$

e no Λ CDM:

$$\bar{H}_{\Lambda CDM}(z, \Omega_{b0}, \Omega_{c0}) = H_0 \sqrt{(1 - \Omega_{b0} - \Omega_{c0} - \Omega_{r0}) + (\Omega_{b0} + \Omega_{c0}) (1+z)^3 + \Omega_{r0} (1+z)^4}. \quad (5.32)$$

O parâmetro de densidade de radiação Ω_{r0} deve dar conta de descrever os fótons assim como os neutrinos ultrarelativísticos. De acordo com (KOMATSU et al., 2009), temos:

$$\Omega_{r0} = \Omega_{\gamma 0} (1 + 0.2271 N_{\text{eff}}), \quad (5.33)$$

onde N_{eff} é o número efetivo de neutrinos dado por $N_{\text{eff}} = 3.046$ (KOMATSU et al., 2009; ICHIKAWA; SEKIGUCHI; TAKAHASHI, 2008). Também, segundo Beringer (2012), o valor do parâmetro de densidade dos fótons é $\Omega_{\gamma 0} = 5.46 \times 10^{-6}$.

De fato, os modelos cosmológicos com radiação são bem mais completos pois têm sua aplicabilidade estendida a valores de redshifts bastantes grandes. Todavia, não faria sentido aplicá-lo a cenários de baixos redshifts pois o acréscimo de um parâmetro livre no modelo torna o trabalho computacional exponencialmente mais penoso. Além disso, sabe-se que o valor desse parâmetro é desprezível durante a transição matéria/energia escura a que temos acesso observacionalmente, ou seja, não mudaria consideravelmente os resultados. Nessa abordagem, estamos considerando Ω_{r0} como uma dado observacional (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

Podemos utilizar as Eqs. (5.31) e (5.32) em (5.30) mas ainda não podemos calcular o valor de r_s visto que este agora depende também dos parâmetros cosmológicos. Como então utilizar os dados de BAO para a estimativa de parâmetros cosmológicos? Com BAO obtém-se informação da distância de diâmetro angular $D_A(z)$, através da aglomeração de galáxias da direção perpendicular a linha de visada. Também, pode-se obter informações da taxa de expansão do universo, $H(z)$, pela aglomeração de galáxias ao longo da linha de visada (KOMATSU et al., 2009). Embora não se possa obtê-los isoladamente, os dados observacionais fornecem a razão de escala de distância, definida por (FAROOQ, 2013):

$$d_z(z, \vec{\theta}) = \frac{r_s(z_{\text{drag}}, \vec{\theta})}{D_v(z, \vec{\theta})}, \quad (5.34)$$

onde

$$D_v(z, \vec{\theta}) = \left[(1+z)^2 D_A^2(z, \vec{\theta}) \frac{cz}{H(z, \vec{\theta})} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (5.35)$$

é o razão efetiva de distância, e

$$D_A(z, \vec{\theta}) = \frac{1}{(1+z)} \int \frac{cdz'}{H(z', \vec{\theta})} \quad (5.36)$$

é a distância de diâmetro angular.

A razão de escala de distância $d_z(z, \vec{\theta})$ fornece a distância a objetos com redshift z em unidades de horizonte de som (BENNETT et al., 2013). Em alguns trabalhos, os autores fornecem a medição da razão $D_v(z)/r_s(z_{\text{drag}})$ em vez de $r_s(z_{\text{drag}})/D_v(z)$. Essa discrepância não influencia a estimativa dos parâmetros.

Desde o lançamento dos dados de 7 anos do WMAP, as escalas acústicas tem sido mensuradas mais precisamente pelos *surveys*, SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), SDSS-III BOSS (*Baryon Oscillation Spectroscopic Survey*), WiggleZ e 6dFGS. Anteriormente, mais

Tabela 7 – Conjunto de dados de oscilações acústicas de bárions utilizados nos ajustes dos parâmetros cosmológicos.

| Survey | Razão de Distância | z | Medição | Referência |
|---------|--------------------|-------|---------------------|-------------------------|
| 6dFGS | r_s/D_v | 0.106 | 0.336 ± 0.015 | (BEUTLER et al., 2011) |
| SDSS | D_v/r_s | 0.35 | 8.88 ± 0.17 | (PERCIVAL et al., 2010) |
| WiggleZ | r_s/D_v | 0.44 | 0.0916 ± 0.0071 | (BLAKE et al., 2011) |
| Boss | D_v/r_s | 0.57 | 13.67 ± 0.22 | (ANDERSON et al., 2012) |
| WiggleZ | r_s/D_v | 0.6 | 0.0726 ± 0.0034 | (BLAKE et al., 2011) |
| WiggleZ | r_s/D_v | 0.73 | 0.0592 ± 0.0032 | (BLAKE et al., 2011) |

Fonte: (BENNETT et al., 2013)

de meio milhão de galáxias do catálogo do SDSS-DR7 foram combinadas com as galáxias do 2dFGRS por Percival et al. (2010) para medir a escala acústica em $z = 0.2$ e $z = 0.35$. Uma melhoria nas estimativas da escala acústica nos dados do SDSS-DR7 foi realizada por Padmanabhan et al. (2012) usando o método de reconstrução de Eisenstein et al. (2007). Mais recentemente, os dados SDSS-DR9 do survey BOSS foram utilizados para estimar a escala de BAO para o CMASS em galáxias com redshift entre 0.43 e 0.7 em um redshift efetivo de 0.57 (ANDERSON et al., 2012). Para redshifts mais altos, a escala acústica foi medida usando o survey WiggleZ em três em redshifts entre 0.44 e 0.73 obtendo três valores correlacionados de razão de distância Blake et al. (2012). Já para baixos redshifts, mais precisamente $z = 0.1$, a detecção da escala de BAO foi realizada usando o survey do 6dFGS (BEUTLER et al., 2011). A compilação desses dados pode ser verificada na Tabela 7 com matriz de correlação inversa dada na Eq.(5.39).

Os dados da razão de distância de BAO serão aqueles que utilizaremos para ajustar os parâmetros dos modelos cosmológicos. Para esse caso, a função χ_{BAO}^2 pode ser definida como:

$$\chi_{\text{BAO}}^2 = \Delta^T \mathbf{C}^{-1} \Delta \quad (5.37)$$

onde

$$\Delta = \begin{pmatrix} r_s(\vec{\theta})/D_v(0.1, \vec{\theta}) - 0.336 \\ D_v(0.35, \vec{\theta})/r_s(\vec{\theta}) - 8.88 \\ D_v(0.57, \vec{\theta})/r_s(\vec{\theta}) - 13.67 \\ r_s(\vec{\theta})/D_v(0.44, \vec{\theta}) - 0.0916 \\ r_s(\vec{\theta})/D_v(0.60, \vec{\theta}) - 0.0726 \\ r_s(\vec{\theta})/D_v(0.73, \vec{\theta}) - 0.0592 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

e

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 4444.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 34.602 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.6612 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24532 & -25138 & 12099 \\ 0 & 0 & 0 & 25138 & 134598 & -64785 \\ 0 & 0 & 0 & 12099 & -64785 & 128838 \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

5.1.6 Parâmetro de Hubble

As medições do parâmetro de Hubble em função do redshift atualmente são dados complementares utilizadas nos ajustes de parâmetros cosmológicos. O parâmetro de Hubble (2.16) que determina a taxa de expansão do universo, pode ser escrito como (ZHENG et al., 2014):

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \quad (5.40)$$

Dado um determinado fenômeno cósmico de redshift conhecido, o parâmetro de Hubble pode ser calculado caso dz/dt seja estimado. Essa mudança do redshift com respeito ao tempo cósmico pode ser inferido a partir do envelhecimento de populações galácticas, conforme proposto por Jimenez e Loeb (2002). No entanto, àqueles sítios caracterizados por alta taxa de formação estelar não fornecem boas estimativas por apresentar o espectro de emissão dominado pela população de novas estrelas. Para medir dz/dt , é necessário escolher aquelas galáxias cuja luminosidade é dominada por estrelas antigas. Tendo definido um conjunto de galáxias com essa característica, basta calcular a diferença de tempo cósmico entre duas galáxias de redshift conhecido.

Jimenez e Loeb (2002) selecionou um conjunto de galáxias esféricas com espectroscopia de alta qualidade, e por intermédio de modelos de população estelar, obteve a idade das estrelas mais antigas em cada galáxia. Então, as idades diferenciais em diferentes redshifts foram calculadas (SIMON; VERDE; JIMENEZ, 2005; STERN et al., 2010; ZHANG et al., 2014; MORESCO et al., 2012). Medições no parâmetro de Hubble também podem ser realizadas através de oscilações acústicas de bárions, por meio da escala acústica típica na direção da linha de visada (GAZTANAGA; CABRE; HUI, 2009).

Vamos utilizar o conjunto de 28 medições de $H(z)$ determinadas por meio de distintas técnicas catalogado por Farooq e Ratra (2013). Com esses dados, podemos montar a função:

$$\chi_{\text{H}}^2(\vec{\theta}, H_0) = \sum_{i=1}^{28} \frac{[H_i - H(z_i, \vec{\theta}, H_0)]^2}{\sigma_i^2}.$$

Visto que estamos considerando modelos do tipo $H(z, \theta, H_0) = H_0 E(z, \theta)$, podemos reescrever:

$$\chi_H^2(\vec{\theta}, H_0) = \sum_{i=1}^{28} \frac{[H_i - H_0 E(z_i, \vec{\theta})]^2}{\sigma_i^2} = a_H + b_H H_0 + c_H H_0^2, \quad (5.41)$$

em que

$$\begin{cases} a_H = \sum_{i=1}^{28} \frac{H_i^2}{\sigma_i^2} \\ b_H = -2 \sum_{i=1}^{28} \frac{E(z_i, \vec{\theta})}{\sigma_i^2} \\ c_H = \sum_{i=1}^{28} \frac{E(z_i, \vec{\theta})^2}{\sigma_i^2} \end{cases} . \quad (5.42)$$

Assim como nos outros conjuntos de dados, não estamos interessados em estimar H_0 . Nesse caso, vamos marginalizá-lo da função de verossimilhança. Então:

$$\mathcal{L}_{H,m}(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} dH_0 \mathcal{L}_H(\vec{\theta}, H_0) = N \int_{-\infty}^{\infty} dH_0 \exp \left[-\frac{a_H + b_H H_0 + c_H H_0^2}{2} \right].$$

Logo, temos:

$$\mathcal{L}_{H,m}(\vec{\theta}) = N \sqrt{\frac{2\pi}{c_H}} \exp \left(-\frac{1}{2} a_H + \frac{b_H^2}{8c_H} \right) = N \exp \left(-\frac{1}{2} a_H + \frac{b_H^2}{8c_H} - \frac{1}{2} \ln \frac{c_H}{2\pi} \right),$$

que implica em:

$$\mathcal{L}_{H,m}(\vec{\theta}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \chi_{H,m}^2(\vec{\theta}) \right],$$

e

$$\chi_{H,m}^2 = a_H - \frac{b_H^2}{4c_H} + \ln \frac{c_H}{2\pi}. \quad (5.43)$$

Tabela 8 – Dados de $H(z)$. O número na última coluna de cada dado indica sua fonte. 1: Simon, Verde e Jimenez (2005); 2: Stern et al. (2010); 3: Moresco et al. (2012); 4: Busca et al. (2013); 5: Zhang et al. (2014); 6: Blake et al. (2012); 7: Chuang e Wang (2013).

| z | $H(z)$ ($\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$) | σ_H ($\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$) | Referência |
|-------|--|--|------------|
| 0.070 | 69 | 19.6 | 5 |
| 0.100 | 69 | 12 | 1 |
| 0.120 | 68.6 | 26.2 | 5 |
| 0.170 | 83 | 8 | 1 |
| 0.179 | 75 | 4 | 3 |
| 0.199 | 75 | 5 | 3 |
| 0.200 | 72.9 | 29.6 | 5 |
| 0.270 | 77 | 14 | 1 |
| 0.280 | 88.8 | 36.6 | 5 |
| 0.350 | 76.3 | 5.6 | 7 |
| 0.352 | 83 | 14 | 3 |
| 0.400 | 95 | 17 | 1 |
| 0.440 | 82.6 | 7.8 | 6 |
| 0.480 | 97 | 62 | 2 |
| 0.593 | 104 | 13 | 3 |
| 0.600 | 87.9 | 6.1 | 6 |
| 0.680 | 92 | 8 | 3 |
| 0.730 | 97.3 | 7.0 | 6 |
| 0.781 | 105 | 12 | 3 |
| 0.875 | 125 | 17 | 3 |
| 0.880 | 90 | 40 | 2 |
| 0.900 | 117 | 23 | 1 |
| 1.037 | 154 | 20 | 3 |
| 1.300 | 168 | 17 | 1 |
| 1.430 | 177 | 18 | 1 |
| 1.530 | 140 | 14 | 1 |
| 1.750 | 202 | 40 | 1 |
| 2.300 | 224 | 8 | 4 |

Fonte: (FAROOQ, 2013)

5.2 AJUSTES COSMOLÓGICOS

Com os dados cosmológicos descritos na seção anterior, define-se a função de verossimilhança através da expressão:

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \chi^2(\vec{\theta}) \right]. \quad (5.44)$$

A função $\chi^2(\vec{\theta})$ pode ser definida pela adição das funções χ^2 referentes a cada conjunto e dados individualmente. Nesta seção, vamos nos concentrar na combinação contendo todos os conjuntos de dados, que é em teoria a mais restritiva. Os gráficos das estimativas biparamétricas para algumas outras combinações de conjuntos de dados se encontra no Apêndice A. Conforme já comentado, a função χ^2 completa é dada por:

$$\chi^2(\vec{\theta}) = \chi_{\text{SNIa,m}}^2(\vec{\theta}) + \chi_{\text{GRB,m}}^2(\vec{\theta}) + \chi_{\text{BAO}}^2(\vec{\theta}) + \chi_{\text{H,m}}^2(\vec{\theta}). \quad (5.45)$$

As Eqs. (5.23), (5.29), (5.37) e (5.43) fornecem as expressões para as funções χ_i^2 calculadas individualmente para cada conjunto. Em virtude do valor de Ω_{b0} ser um dado conhecido, obtido de maneira independente de modelo cosmológico através da nucleossíntese primordial conforme Sec. 5.1.2, vamos utilizá-lo para definir um prior gaussiano. Através de (5.11), temos:

$$P(\Omega_{b0}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0} - 0.0407}{0.0079} \right)^2 \right]. \quad (5.46)$$

Conforme visto na Eq.(4.3), o produto da função de verossimilhança pela probabilidade a priori define a probabilidade a posteriori, a menos de uma constante de normalização. Então:

$$P(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = N \exp \left[-\frac{1}{2} \chi^2(\vec{\theta}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0} - 0.0407}{0.0079} \right)^2 \right] \quad (5.47)$$

Toda informação estatística à respeito do modelo cosmológico pode ser obtida dessa função. A primeira grande quantidade de interesse é o vetor de parâmetros que maximiza a Eq.(5.47). Quase que na totalidade das vezes, esse será um procedimento computacional. Por conta disso, se mostra vantajoso reescrever essa equação na forma:

$$-2 \ln P(\vec{\theta} | \{Y_i\}) = \chi^2(\vec{\theta}) + \left(\frac{\Omega_{b0} - 0.0407}{0.0079} \right)^2 + \ln N, \quad (5.48)$$

pois o procedimento de maximizar a probabilidade a posteriori é equivalente a minimizar a função $-2 \ln P(\vec{\theta} | \{Y_i\})$.

Com a distribuição de probabilidades (5.47), a média de um determinado parâmetro θ_i é calculada de acordo com:

$$\langle \theta_i \rangle = \int d^n \theta_k \theta_i P(\vec{\theta}). \quad (5.49)$$

As covariâncias entre os pares de parâmetros é dada por:

$$\langle \theta_i \theta_j \rangle = \int d^n \theta P(\vec{\theta}) (\theta_i - \langle \theta_i \rangle) (\theta_j - \langle \theta_j \rangle). \quad (5.50)$$

Quando $i = j$, temos as variâncias, cujo a raiz quadrada fornece o desvio padrão paramétrico:

$$\sigma_{\theta_i} = \sqrt{\langle \theta_i \theta_i \rangle}. \quad (5.51)$$

5.2.1 Modelo Λ CDM

Para o modelo Λ CDM, obteve-se os valores dos parâmetros que maximizam a probabilidade a posteriori, minimizando a Eq.(5.48). Os resultados encontrados

$$\Omega_{b0} = 0.0481 \quad \text{e} \quad \Omega_{c0} = 0.268 \quad (5.52)$$

produzem um χ^2 dado por $\chi_{\min}^2 = 632.7$. Com as Eqs.(5.49), (5.50) e (5.51), foram calculados os valores médios:

$$\Omega_{b0} = 0.0481 \pm 0.0064 \quad \text{e} \quad \Omega_{c0} = 0.268 \pm 0.026 \quad (5.53)$$

e as covariâncias dos parâmetros:

$$C_{\Lambda\text{CDM}} = \begin{pmatrix} 0.000041 & -0.00011 \\ -0.00011 & 0.0007 \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Por intermédio da Eq.(4.4), foram obtidas a funções de distribuição de probabilidade marginal para Ω_{b0} e Ω_{c0} , cujo comportamento pode ser verificado nos gráficos diagonais da Fig. 14. Com essa função, foi calculado o intervalo de confiança de 1σ ao redor do ponto de máximo da PDF marginal:

$$\Omega_{b0} = 0.0479_{-0.0064}^{+0.0064} \quad \text{e} \quad \Omega_{c0} = 0.268_{-0.026}^{+0.027} \quad (5.55)$$

Os intervalos de confiança obtidos na Eq. (5.53) e na Eq. (5.55) são equivalentes. Note ainda que os valores centrais reproduzem os valores de máxima probabilidade dados em (5.52). Considerando a matriz de covariância, conclui-se que Ω_{b0} e Ω_{c0} seguem um distribuição bivariada binormal, com coeficiente de correlação $R = -0.67$. As regiões de 1σ , 2σ e 3σ estão ilustrados no gráfico inferior-esquerdo da Fig. 14.

É importante notar que o valor estimado para a densidade de bárions segundo Λ CDM é 18% maior que aquele fornecido na Eq.(5.11). Os dados observacionais aqui utilizados indicam que existe um pouco mais de matéria bariônica no universo do que o previsto pela nucleossíntese primordial. Embora, se analisarmos as Eqs. (5.53) e (5.55), percebemos que a largura das regiões de confiança de Ω_{b0} (~ 0.006) são apenas pouco mais estreitas que a do prior (~ 0.008), tal que as estimativas uniparamétricas de Ω_{b0} são muito mais reflexos do prior do que informação contida dos dados observacionais.

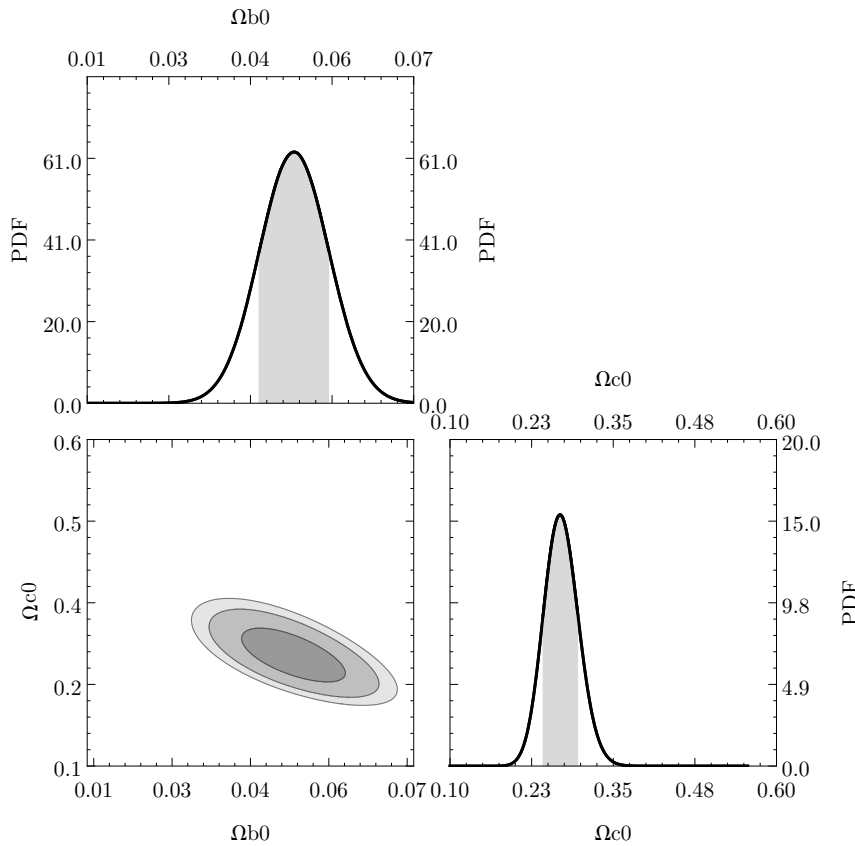


Figura 14 – Funções de distribuição de probabilidade para os parâmetros do modelo Λ CDM. As gráficos na diagonal principal ilustram o comportamento da PDF marginal de Ω_{b0} e Ω_{c0} . Já o gráfico inferior-esquerdo traz as regiões de confiança de 68%, 95% e 99% da PDF bivariada.

Fonte: (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

Queremos entender a influência dos conjuntos de dados nas estimativas paramétricas. Conforme sugerido pela Eq.(5.45), foram utilizados todos conjuntos para se obter os resultados que acabaram de ser exibidos. Todavia, poderíamos considerar outras combinações, como por exemplo apenas SNIa+BAO, SNIa+H(z) e etc. Obviamente, é possível estudar os conjuntos de dados isolados, simplesmente excluindo da Eq.(5.45) a função χ^2 referente aos conjuntos de dados preteridos. Calculou-se então a função de distribuição de probabilidades a posteriori para cada conjunto de dados a fim de analisar a região do espaço de parâmetros que ela seleciona. Com isso, é possível estimar sua influência na PDF completa. A Fig. 15 traz a comparação das regiões de confiança dessas PDFs referentes a cada conjunto juntamente com a PDF completa.¹⁰ Note que a região referente a PDF completa é justamente uma intersecção entre as outras regiões. Ainda, no modelo Λ CDM, as regiões do espaço de parâmetros filtradas pelos dados de SNIa+GRB e $H(z)$

¹⁰ Uma ressalva deve ser feita. Como os dados de GRB são considerados para completar os dados de SNIa, não os analisaremos isoladamente mas sim em conjunto.

são equivalentes. Diferentemente, os dados de BAO apresentam um deslocamento positivo no valor central de Ω_{b0} , com uma correlação negativa mais intensa (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

Para se obter outras propriedades do modelo, foi gerada uma amostra de dados que segue a PDF referente a Eq.(5.47) utilizando o algoritmo de Metropolis-Hastings (LIANG; LIU; CARROLL, 2010; CHIB; GREENBERG, 1995). Foi calculado um redshift de equivalência para cada ponto de acordo com a Eq.(5.5). Como resultado, foi obtido um histograma de valores que pode ser conferido na Fig. 16. Foi possível obter a região de confiança de 1σ do redshift de equivalência, de modo que $z_{eq} = 0.356^{+0.062}_{-0.056}$. Com a mesma técnica, foram geradas as bandas de confiança nos gráficos de módulo de distância, razão de escala de distância e função de Hubble para comparar as previsões teóricas com os dados observacionais. Os resultados podem ser verificados na Fig. 17.

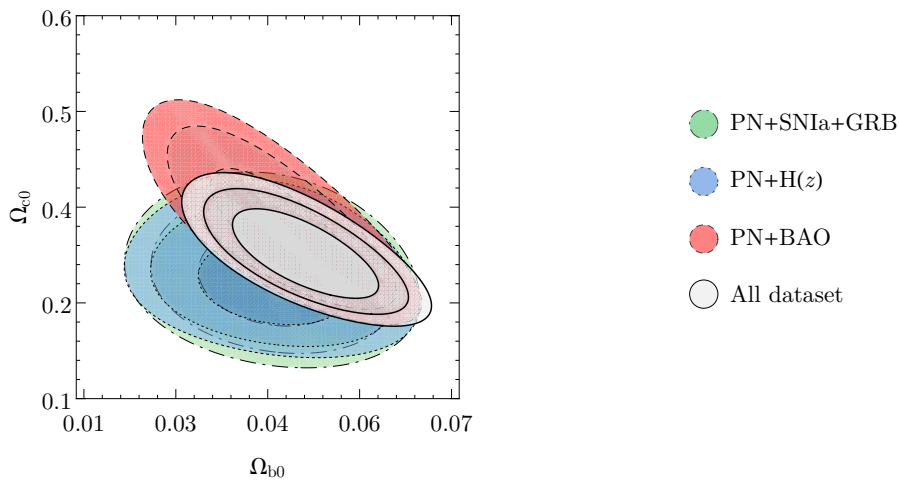


Figura 15 – Comparação das regiões de confiança das PDF de cada conjunto de dados com a PDF completa, todas calculadas com o modelo Λ CDM . A designação PN vem do inglês *primordial nucleosynthesis* e indica a consideração do prior no parâmetro de densidade da matéria bariônica.

Fonte: (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

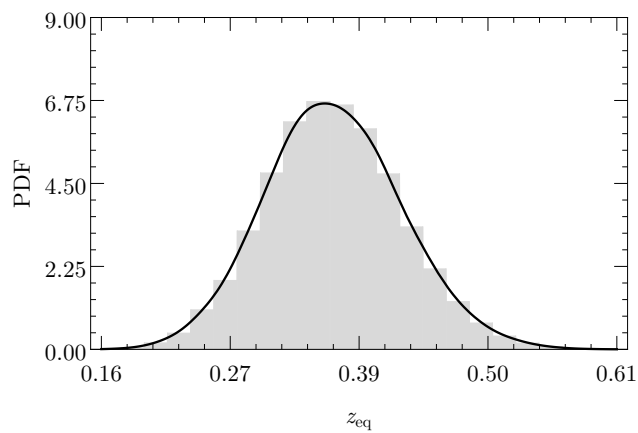


Figura 16 – Histograma para o redshift de equivalência segundo o modelo Λ CDM.

Fonte: Do autor.

5.2.2 Modelo Unificado

Para o Modelo Unificado, a configuração paramétrica de máxima probabilidade é:

$$\Omega_{b0} = 0.0453 \quad , \quad \alpha = 2.71 \quad \text{e} \quad \beta = 1.15 \quad (5.56)$$

com um $\chi_{\min}^2 = 633.3$ e $\chi_{\text{red}}^2 = 0.910$. Analogamente ao ΛCDM , as médias dos parâmetros foram calculadas, e obteve-se como resultados:

$$\Omega_{\text{b}0} = 0.0447 \pm 0.0074 \quad , \quad \alpha = 2.87 \pm 0.44 \quad \text{e} \quad \beta = 1.23 \pm 0.24 \quad . \quad (5.57)$$

As covariâncias entre os parâmetros são dadas pela matriz:

$$C_{\text{UM}} = \begin{pmatrix} 0.000054 & -0.0021 & -0.00052 \\ -0.0021 & 0.19 & 0.092 \\ -0.00052 & 0.092 & 0.073 \end{pmatrix} . \quad (5.58)$$

Com a PDF a posteriori, foi obtida a PDF marginal de cada parâmetro conforme (4.4), cujos comportamentos podem ser verificados na diagonal principal da estrutura de gráficos da Fig. 18. Com essas funções, foi possível estimar o intervalo de confiança uniparamétrico:

$$\Omega_{\text{b}0} = 0.0443_{-0.0075}^{+0.0075} \quad , \quad \alpha = 2.71_{-0.39}^{+0.46} \quad \text{e} \quad \beta = 1.17_{-0.25}^{+0.28} \quad . \quad (5.59)$$

Assim como no ΛCDM , os valores de $\Omega_{\text{b}0}$ encontrados são um pouco maiores que o valor central do prior; cerca de 9%. Ainda nesse parâmetro, as incertezas são levemente mais restritivas do que a largura de 0.0079 do prior. De certa forma, esse resultado reproduz o prior com um deslocamento do valor central. Outra característica notável são as incertezas assimétricas apontadas pelas estimativas uniparamétricas de α e β .

Como o Modelo Unificado depende de três parâmetros, é possível calcular as probabilidades marginais biparamétricas através de combinações 2 a 2 nos parâmetros. As regiões de confiança de 1σ , 2σ e 3σ dessas PDFs bivariadas estão ilustradas nos gráficos não diagonais da Fig. 18. É possível perceber uma correlação negativa discreta entre $\Omega_{\text{b}0}$ e α assim como uma correlação negativa desprezível entre os parâmetros $\Omega_{\text{b}0}$ e β . Obviamente, esta informação está quantificada na matriz de covariância da Eq. (5.58). Já para os parâmetros α e β , a correlação obtida é positiva e bastante significativa.

Foram estudadas as regiões de confiança obtidas com as funções χ^2 isoladas de BAO e $H(z)$ e da combinação SNIa+GRB. Esses gráficos podem ser conferidos na Fig. 19. Note que os dados de $H(z)$ e SNIa+GRB não são restritivos o suficiente para truncar suas respectivas PDFs dentro dos limites dos priors (vide Tabela 3). Uma análise estatística com essas PDFs seria incoerente. No entanto, elas foram geradas para ilustrar a região do espaço de parâmetros que os conjuntos de dados observacionais selecionam individualmente, para com isso, estimar sua contribuição na PDF completa.

Para o cálculo da região de confiança de 1σ do redshift de equivalência do Modelo Unificado, foi gerado uma amostra de dados aleatórios com o algoritmo de Metropolis-Hastings. Com esses dados, foi produzido um histograma do redshift de equivalência (c.f. Fig. 20) e as estimativas obtidas são de $z_{\text{eq}} = 0.432_{-0.063}^{+0.062}$. Embora esse resultado esteja coerente dentro do intervalo de 1σ com o Λ CDM, ele apresenta um deslocamento relativo do ponto de máximo tendendo ao passado. Isso indica que no Modelo Unificado, a transição entre um comportamento tipo matéria para um tipo constante cosmológica ocorreu mais cedo na história cósmica do que no Λ CDM. Com os dados dessa amostra, foram calculadas as regiões de confiança de 1σ do módulo de distância, razão de escala de distância e função de Hubble para comparar o modelo teórico com os dados observacionais (vide Fig. 21).

5.2.3 Comparações entre modelos

Nas duas seções anteriores, calculamos algumas propriedades estatísticas do Modelo Unificado e Λ CDM, realizando discretas comparações entre eles. Um resumo dos resultados lá apresentados consta da Tabela 9. Com as funções de distribuição de probabilidades de cada um dos modelos, foi possível calcular as bandas de confiança para o parâmetro efetivo da equação de estado das componentes escuras w_{eff} (no Λ CDM) e w_u (UM) das componentes escuras em termos do redshift, Eqs. (3.2) e (3.20). Esses gráficos podem ser visualizados na Fig. 22. Nota-se pela Fig. 22a que dentro do intervalo $0 \lesssim z \lesssim 6$, os modelos são condizentes com confiança de 99%. Com 1σ de confiança, há equivalência entre modelos nas regiões de $0 \lesssim z \lesssim 0.7$, com o modelo unificado evoluindo por meio de uma transição mais rápida. Por conta disso, os comportamentos deixam de ser equivalentes em $z \approx 0.7$, com o modelo unificado apresentando valor mais alto de w . Esse cenário se mantém até $z \approx 2.5$, tal que no regime de $2.5 \lesssim z \lesssim 3.5$ os modelos são novamente equivalentes com confiança de 68%. Nesse intervalo, o Λ CDM apresenta taxa de variação mais acentuada. Ainda com 1σ de confiança, para $z > 3.5$, é nítido que em ambos os modelos, w_{dark} tende a zero, mas com o Modelo Unificado evoluindo de maneira mais lenta. Para valores de $z > 6$, os modelos são distintos com confiança de 3σ .

Nesta seção, objetivamos realizar algumas outras comparações para estabelecer um panorama geral sobre a viabilidade do Modelo Unificado em detrimento no modelo Λ CDM. Em primeiro lugar, vamos compará-los de maneira qualitativa através da tabela de evidência bayesiana para avaliação do parâmetro de Bayes (c.f. Tabela 2). De acordo com a Eq.(4.11), o cálculo da evidência bayesiana utilizando PDF's completas fornece:

$$P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_{\Lambda\text{CDM}}) = 2.076 \times 10^{-141}$$

para o modelo Λ CDM; e

Tabela 9 – Resultados obtidos da função de distribuição de probabilidades a posteriori definida na Eq.(5.47) para o modelo Λ CDM e Modelo Unificado. O valores de best-fit dos parâmetros são aqueles que maximizam a PDF. As média são obtidas integrando o produto da PDF com o parâmetro de interesse em todo o espaço de parâmetros. Já as estimativas uni paramétricas foram obtidas a partir da PDF marginal de cada parâmetro.

| Modelo | Grandeza | Best-fit | Média | Esimativa Uniparamétrica |
|---------------|----------------|----------|---------------------|------------------------------|
| Λ CDM | Ω_{b0} | 0.0482 | 0.0481 ± 0.0064 | $0.0480^{+0.0063}_{-0.0064}$ |
| | Ω_{c0} | 0.268 | 0.270 ± 0.026 | $0.268^{+0.027}_{-0.026}$ |
| | z_{eq} | 0.324 | – | $0.360^{+0.059}_{-0.054}$ |
| | χ^2_{min} | 632.7 | – | – |
| | χ^2_{red} | 0.916 | – | – |
| UM | Ω_{b0} | 0.0454 | 0.0447 ± 0.0074 | $0.0443^{+0.0075}_{-0.0075}$ |
| | α | 2.71 | 2.87 ± 0.44 | $2.75^{+0.46}_{-0.39}$ |
| | β | 1.15 | 1.23 ± 0.27 | $1.17^{+0.28}_{-0.25}$ |
| | z_{eq} | 0.404 | – | $0.410^{+0.58}_{-0.59}$ |
| | χ^2_{min} | 628.2 | – | – |
| | χ^2_{red} | 0.910 | – | – |

Fonte: (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016)

$$P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_{UM}) = 1.34 \times 10^{-140}$$

para o Modelo Unificado. Pela Eq. (4.14), o fator de Bayes do Modelo Unificado em relação ao Λ CDM será:

$$B_{UM/\Lambda\text{CDM}} = \frac{P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_{UM})}{P(\{Y_i\} | \mathfrak{M}_{\Lambda\text{CDM}})} = 6.5 \quad ,$$

que de acordo com a Tabela 2, reflete uma fraca evidência de que o Modelo Unificado está mais condizente com os dados observacionais do que o modelo Λ CDM. É importante nesse ponto saber distinguir se esse resultado tem alguma significância ou se é apenas reflexo de um acaso estatístico.

Na tentativa de responder essa questão, existe um outro aspecto que pode ser levado em consideração. Todo o estudo realizado até agora assumiu o princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia espacial. No entanto, um dos mais poderosos recursos da cosmologia atual é a possibilidade de se obter informações cosmológicas a partir de heterogeneidade da distribuição de matéria, com a chamada *cosmologia perturbativa*. Um

forte argumento para comprovação de um modelo cosmológico é seu potencial de predição do *power spectrum* de matéria, como um indicativo direto do processo de formação e evolução das estruturas (DODELSON, 2003). Nesse estudo, conclui-se que para prever os dados dos *contrastos de densidade*,¹¹ o modelo deve apresentar uma velocidade do som nula durante um intervalo de tempo específico a medida que olhamos ao passado. Aqueles modelos cosmológicos cujos valores de w_{dark} tendem a zero mais rapidamente mostram maior coerência com os dados (SANDVIK et al., 2004). Analisando a Fig. 22b, é possível verificar que o parâmetro da equação de estado para as componentes escuras tende a zero de maneira mais rápida no Λ CDM do que no Modelo Unificado. Visto que já foi mostrado por Sandvik et al. (2004) que o *Power Spectrum* de matéria é bem instável sob grandes variações do regime Λ CDM, é bem provável que o Modelo Unificado não seja capaz de prever os dados de *Power Spectrum*. Abordaremos esse problema com mais detalhes no próximo capítulo.

¹¹ O contraste de densidade quantifica a perturbação no campo de densidade de energia. É definido pela razão entre a perturbação para com a densidade de energia de fundo.

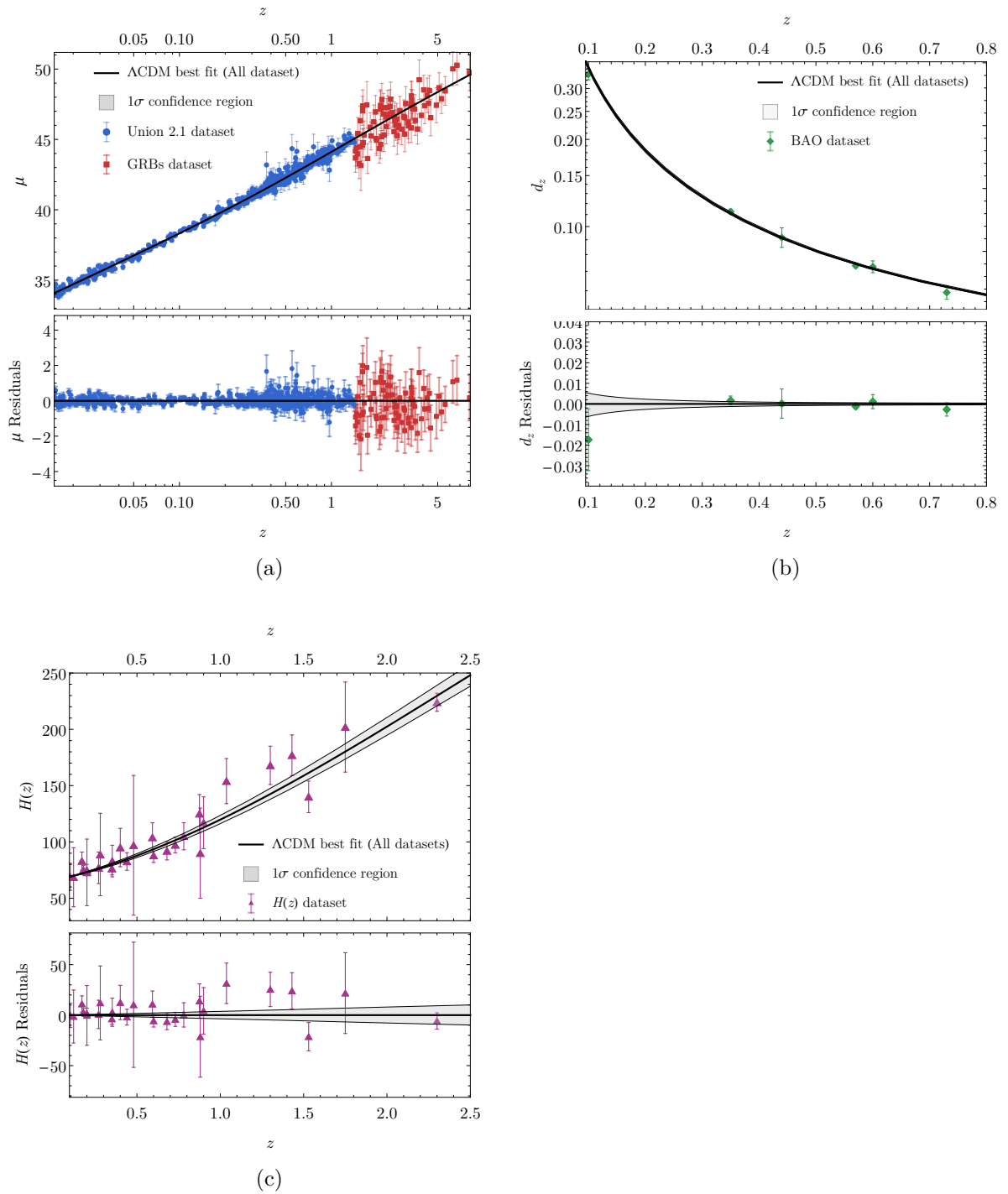


Figura 17 – Bandas de confiança de 68% para (a) o módulo de distância, (b) razão de escala de distância e (c) função de Hubble. A linha contínua mostrada nos gráficos diz respeito as previsões do modelo Λ CDM utilizando os valores paramétricos de best-fit, conforme a Eq.(5.52).

Fonte: Do autor.

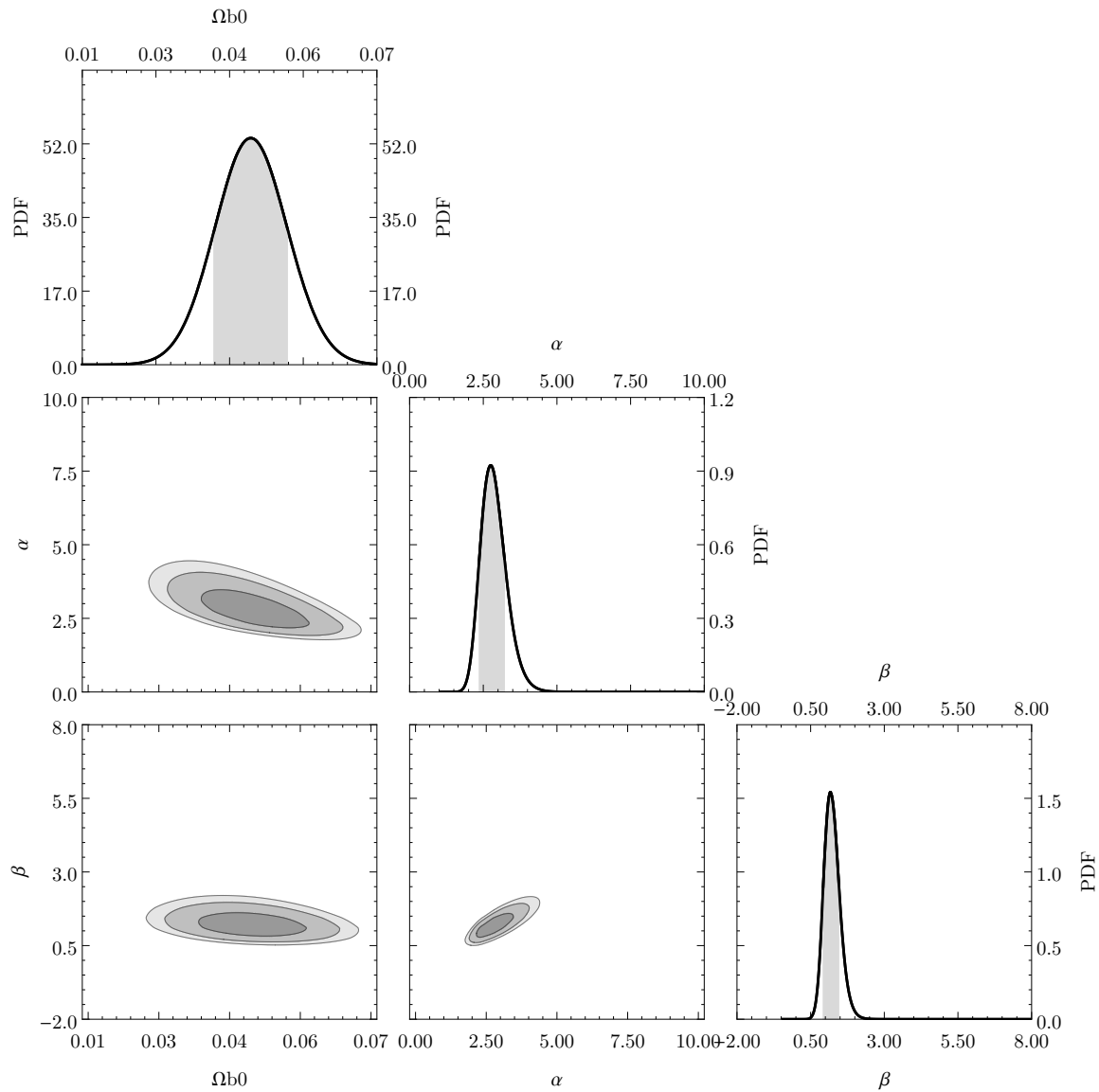


Figura 18 – Funções de distribuição de probabilidade para os parâmetros do Modelo Unificado. A diagonal principal traz os gráficos das PDFs marginais uniparamétricas. Os demais gráficos ilustram as regiões de confiança de 68%, 95% e 99% das PDF's marginais bivariadas calculadas para cada par de parâmetros. Fonte: (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

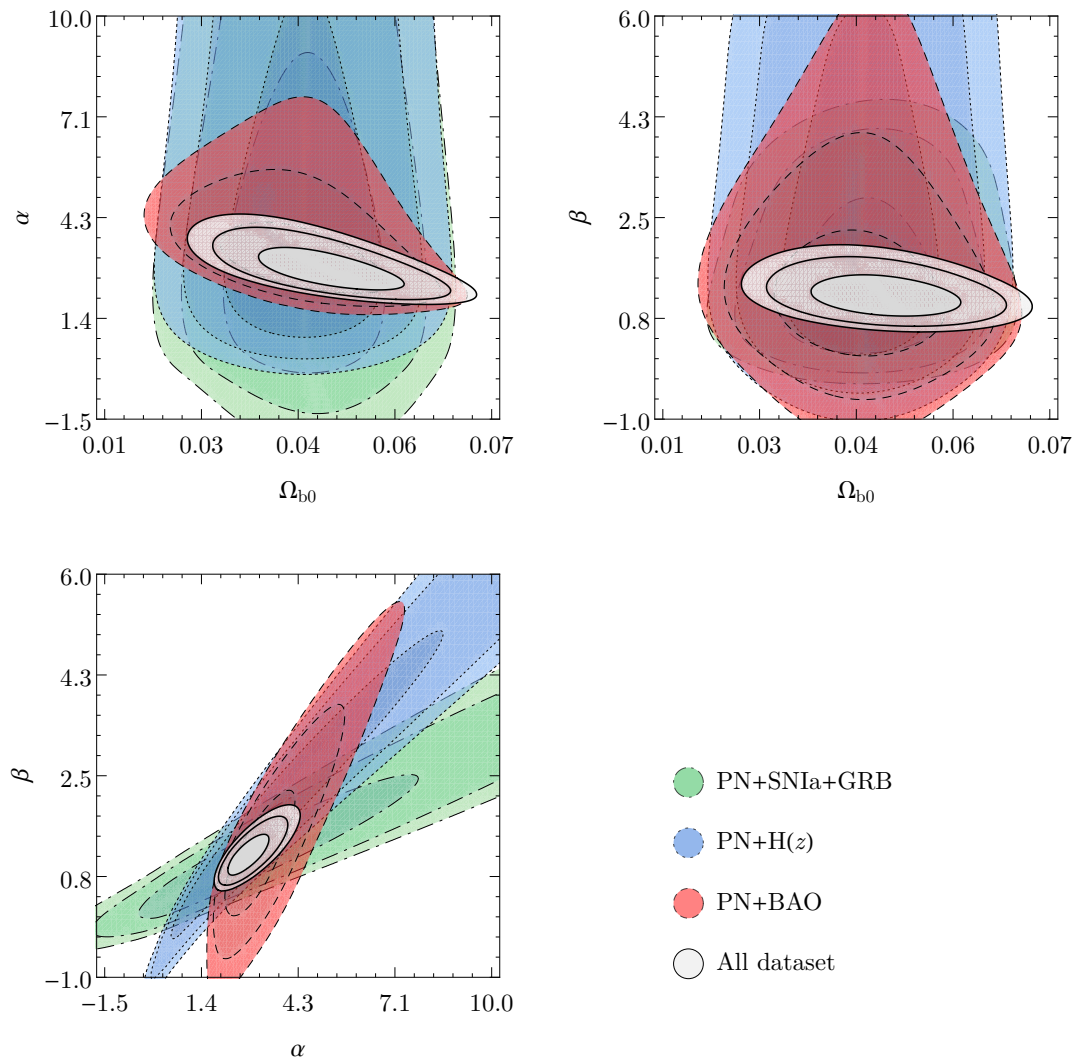


Figura 19 – Comparação das regiões de confiança entre a PDF completa do UM e as PDFs individuais de cada conjunto de dados no mesmo modelo.
Fonte: Do autor.

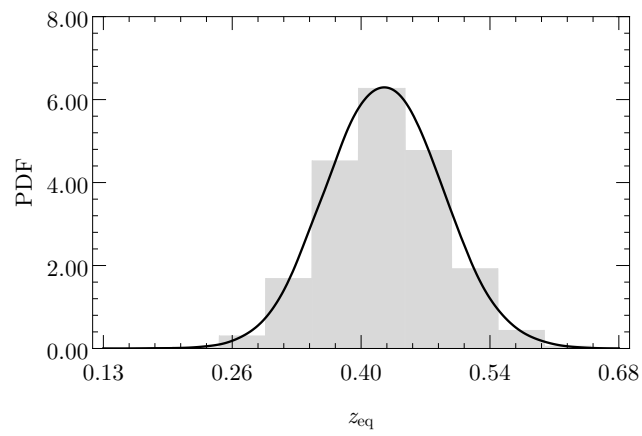


Figura 20 – Histograma para o redshift de equivalência segundo o Modelo Unificado.
Fonte: Do autor.

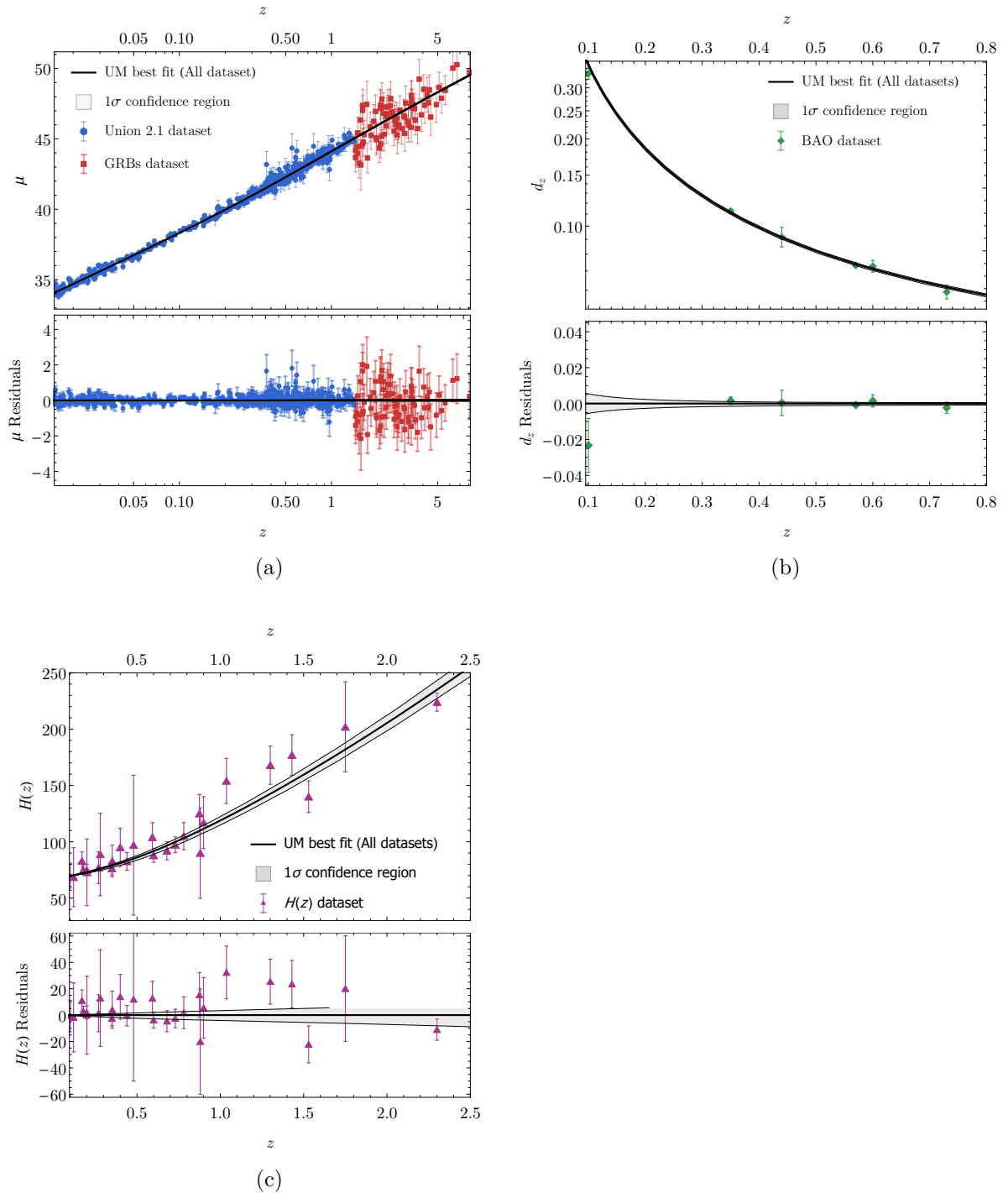


Figura 21 – Comparação entre a previsão teórica do modelo unificado / best-fit com os dados observacionais. São apresentadas bandas de confiança de 68% para (a) o módulo de distância, (b) razão de escala de distância e (c) função de Hubble. Fonte: Do autor.

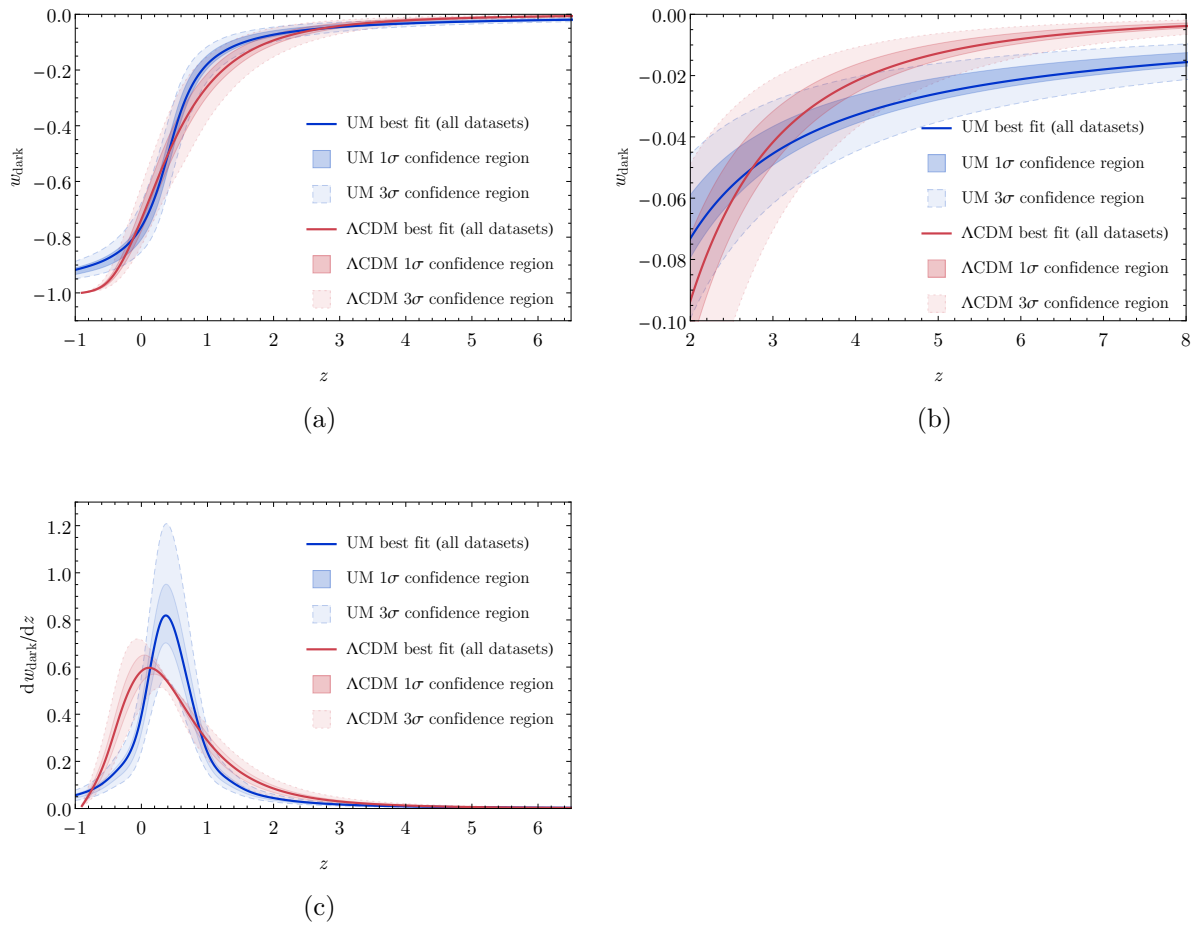


Figura 22 – (a) Comportamento do parâmetro efetivo da equação de estado para componentes escuras no Modelo Unificado, w_u , e modelo Λ CDM, w_{eff} . No eixo y , w_{dark} é um nome genérico para w_u (curva azul) e w_{eff} (curva vermelha). (b) Foi selecionada uma região que ilustra $w(z)$ tendendo a zero a medida que consideramos maiores redshifts. (c) Comportamento da taxa de variação $w(z)$ em função do redshift.

Fonte: Do autor.

6 COSMOLOGIA PERTURBATIVA

Até agora, todo o estudo realizado leva em conta o princípio de homogeneidade e isotropia do universo. Esse estudo cosmológico por muitas vezes é denominado *cosmologia de background*. Com essa premissa, comparamos a resposta do modelo Λ CDM e Modelo Unificado aos dados observacionais e verificamos que, em essência, não existem diferenças significativas em seus comportamentos. Apesar disso, existem algumas diferenças.

Como mostra a Fig. 22 para w das componentes escuras, no Modelo Unificado, a transição entre um período de expansão desacelerada para um período acelerado é mais rápida do que a do Λ CDM. Além disso, as estimativas do redshift em que o fluido composto pelas componentes escuras deixa de ser efetivamente matéria passando a ser efetivamente constante cosmológica ocorre pouco mais cedo no UM do que no Λ CDM. Apesar da análise cosmológica ter apresentado essas diferenças, um estudo de evidências bayesianas não foi restritivo o suficiente para apontar a preferência de um modelo em detrimento ao outro.

Na parte do trabalho que se inicia agora, vamos lidar com a não homogeneidade do universo. Nela, é possível estudar a formação de galáxias, aglomerados galácticos e estruturas filamentosas nas quais a matéria se distribui. Esse estudo é conhecido como *Teoria de Perturbações Cosmológicas* ou *Cosmologia Perturbativa*. Sob essa ótica, o modelo cosmológico que guia a evolução cósmica afeta fortemente a distribuição de matéria no universo. Por conta disso, se espera que pequenas diferenças entre modelos cosmológicos possam levar a grandes discrepâncias na evolução das quantidades perturbadas.

Em cosmologia perturbativa, os resultados de background continuam válidos pois são considerados como aproximações de ordem zero. Dessa maneira, o trabalho que se segue seria aplicar perturbações lineares tanto na curvatura quanto no tensor energia momento e estudar a evolução dessas perturbações ao longo do tempo. Todavia, um cuidado extremo deve ser tomado. Em cosmologia de background, as simetrias de homogeneidade e isotropia impostas sobre o espaço-tempo privilegiavam o sistema de referencial comóvel. Em cosmologia perturbativa, surge uma dificuldade a mais que reside na liberdade de escolha do referencial para descrição das variáveis perturbadas. Para resolver esse problema, é necessário reescrever as perturbações de maneira invariante à escolha de referencial. Isso pode ser feito decompondo as quantidades perturbadas em componentes irreduzíveis, na chamada decomposição SVT (*scalar-vector-tensor decomposition*) (BARDEEN, 1980). Veremos como tudo isso acontece nas próximas seções.

6.1 CONSIDERAÇÕES ACERCA DO UNIVERSO HOMOGÊNIO E ISOTRÓPICO

Apesar de já termos estudado a cosmologia de background na primeira parte desse trabalho, é necessário efetuar algumas alterações nas equações da dinâmica cósmica para

servirem de suporte à teoria de de perturbações.

Antes de prosseguirmos, vale salientar que sob vários aspectos, é mais vantajoso estudarmos a evolução das perturbações em termos de outro parâmetro temporal, conhecido como tempo conforme (η). A relação entre ele e o tempo próprio é dada por:

$$d\eta = \frac{dt}{a}. \quad (6.1)$$

Além disso, a parte espacial da Eq.(2.2) pode ser escrita em coordenadas retangulares em vez das coordenadas esféricas. Substituindo essas alterações na definição no elemento de linha FLRW dado em Eq.(2.2), temos o elemento de linha de background:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[(dx^0)^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (6.2)$$

Essa substituição de variáveis $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ para $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ não é estritamente necessária mas foi considerada pois culmina em um procedimento de cálculos mais simplificado. Adotaremos daqui em diante a convenção de $c = 1$. Nesse novo sistema de unidades, podemos reescrever a métrica de background como:

$$[\tilde{g}_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} a^2(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(\eta) \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

O “~” acima da métrica indica que esta quantidade está associada ao background. Ou seja, é a métrica quando as perturbações são nulas.

Para obter as equações da dinâmica cósmica, devemos calcular primeiramente os coeficientes da conexão:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_{00}^0 = \mathcal{H} & \tilde{\Gamma}_{00}^i = 0 \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^0 = \mathcal{H}\delta_{ij} & \tilde{\Gamma}_{0i}^0 = 0 \\ \tilde{\Gamma}_{0i}^j = \mathcal{H}\delta_i^j & \tilde{\Gamma}_{jk}^i = 0 \end{cases}, \quad (6.4)$$

em que se definiu o parâmetro de Hubble conforme (\mathcal{H}) como:

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a} = aH, \quad (6.5)$$

onde “ ’ ” indica a derivação em relação ao tempo conforme:

$$() \equiv \frac{d()}{d\eta}. \quad (6.6)$$

Com a conexão, é possível calcular o tensor de Einstein – vide Eqs. (2.1), (2.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{G}^0_0 = 3 \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} \\ \tilde{G}^0_i = 0 \\ \tilde{G}^i_j = \frac{1}{a^2} (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \delta^i_j \end{array} \right. . \quad (6.7)$$

Utilizando o tensor de Einstein juntamente com o tensor energia momento de fluido perfeito (2.11) nas Equações de Campo de Einstein (2.1), obtemos a *primeira equação de Friedmann*:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \tilde{\rho}(a) , \quad (6.8)$$

e a *segunda equação de Friedmann*:

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -8\pi G a^2 \tilde{p} , \quad (6.9)$$

calculadas com o tempo conforme.

Continuamos interessados em equações de estado do tipo barotrópica, Eq. (2.22):

$$\tilde{p}(a) = w(a) \tilde{\rho}(a) . \quad (6.10)$$

Assim como foi feito na Sec. 2.1.3, será mais vantajoso trabalharmos com a equação de conservação covariante do tensor energia momento (2.13) em vez da segunda equação de Friedmann (6.9). Portanto, as equações que vão determinar a dinâmica cósmica em termos do tempo conforme serão:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_i(a) \quad (6.11)$$

e

$$\tilde{\rho}_i(a) = \tilde{\rho}_{i0} a^{-3} \exp\left(-3 \int_0^a \frac{w_i(a')}{a'} da'\right) , \quad (6.12)$$

em que $\tilde{\rho}_i$ é a densidade de energia de cada componente do fluido cósmico.

Da combinação da Eq.(6.8) com a equação de conservação covariante do tensor energia momento de fluido perfeito:

$$\tilde{\rho} = -3\mathcal{H}(\tilde{p} + \tilde{\rho}) , \quad (6.13)$$

podemos obter várias relações de background que serão uteis posteriormente. São elas:

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}a^2(\tilde{\rho} + 3\tilde{p}) ; \quad (6.14)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^2(1 + 3w) ; \quad (6.15)$$

$$\frac{w'}{1+w} = 3\mathcal{H}\left(w - \frac{p'}{\rho'}\right) ; \quad (6.16)$$

$$p' = -3\tilde{\rho}\mathcal{H}(1+w)\frac{p'}{\rho'}. \quad (6.17)$$

Nesse capítulo, e adiante na dissertação, vamos utilizar uma notação que até agora não foi apresentada formalmente. Sempre que uma quantidade qualquer aparecer com um “~”, ela estará sendo calculada no background, ao passo que as derivações parciais com respeito as coordenadas espaciais serão:

$$(),_{,i} \Rightarrow \frac{\partial ()}{\partial x^i} \quad (6.18)$$

6.2 ESPAÇO-TEMPO PERTURBADO

Estabelecido o panorama da cosmologia de background, precisamos dar início as considerações voltadas a cosmologia perturbativa. *A priori*, é importante salientar que em nosso estudo, frequentemente faremos distinção de dois espaços pseudo-riemannianos distintos: o *background* que é aquele espaço-tempo descrito pela métrica FLRW e o espaço-tempo perturbado, que é o espaço-tempo real (não aproximado). A perturbação de uma determinada quantidade é dada pela diferença entre o valor que tal quantidade assume no espaço real e o valor de background. E primeiro lugar, vamos supor uma métrica perturbada composta pela soma da métrica de Friedmann e um termo de perturbação:

$$ds^2 = [\tilde{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(x^\lambda)] dx^\mu dx^\nu, \quad (6.19)$$

onde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ representa o background e $\delta g_{\mu\nu}$ representa a perturbação, com $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |\tilde{g}_{\mu\nu}|$. Ou seja, estamos assumindo termos lineares de perturbação. Essa contribuição perturbativa é um tensor simétrico que contém 10 funções independentes. Ela é decomposta em três entidades distintas: uma escalar (ϕ), uma vetorial (C_i) e uma tensorial (γ_{ij}):

$$\delta g_{\mu\nu}(x^\lambda) = a(\eta)^2 \left(\begin{array}{c|ccc} 2\phi & 2C_1 & 2C_2 & 2C_3 \\ \hline 2C_1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ 2C_2 & \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 2C_3 & \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{array} \right). \quad (6.20)$$

Note que o elemento $\delta g_{00} = 2a^2\phi$ carrega um grau de liberdade, $\delta g_{0i} = 2a^2C_i$ carrega três e $\delta g_{ij} = a^2\gamma_{ij}$ leva os 6 graus de liberdade restantes. As entidades C_i e γ_{ij} são tensores no espaço euclidiano, cujos índices pode ser levantados ou abaixados através de δ_{ij} (MUKHANOV, 2005).

Com as Eqs. (6.3) e (6.20), o elemento de linha (6.19) pode ser reescrito de forma mais geral através de:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[(1 + 2\phi) d\eta^2 + 2C_i dx^i d\eta + (\gamma_{ij} - \delta_{ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (6.21)$$

Nesse ponto, devemos decompor as quantidades perturbadas em partes irreduzíveis. A parte puramente temporal δg_{00} da perturbação já se apresenta em sua forma irreduzível por depender exclusivamente da quantidade escalar ϕ . Em contrapartida, a componente vetorial δg_{i0} contém o 3-vetor C_i que pode ser decomposto no divergente de uma função escalar (B) somado a um vetor (\hat{S}_i) de divergência nula. Ou seja:

$$\delta g_{i0} = 2C_i a^2 = 2a^2 (B_{,i} + \hat{S}_i) \quad (6.22)$$

onde:

$$\hat{S}^i_{,i} = 0. \quad (6.23)$$

Embora o vetor \hat{S}_i tenha três componentes, ele carrega apenas dois graus de liberdade devido ao vínculo (6.23). Somando-se o grau de liberdade referente ao escalar B , recuperamos os três graus de liberdade associados a C_i . Ressalta-se que daqui em diante, as quantidades com divergência nula estarão representadas com um “^” acima.

As componentes δg_{ij} que se comportam como tensor sob rotações em 3D podem ser escritas em partes irreduzíveis:

$$\delta g_{ij} = a^2\gamma_{ij} = a^2 \left(2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + \hat{F}_{i,j} + \hat{F}_{j,i} + \hat{h}_{ij} \right), \quad (6.24)$$

onde ψ e E são escalares, \hat{F}_i é um 3-vetor de divergência nula

$$\hat{F}^i_{,i} = 0, \quad (6.25)$$

e h_{ij} é um 3-tensor transverso e de traço nulo:

$$\begin{cases} \hat{h}^i_{j,i} = 0 \\ \hat{h}^i_i = 0 \end{cases}. \quad (6.26)$$

As quantidades ψ e E carregam um grau de liberdade cada. O 3-vetor \hat{F}^i acopla dois graus de liberdade em virtude de apresentar o vínculo dado na Eq.(6.25). Por fim, os dois graus de liberdade restantes estão presentes no tensor h_{ij} : apenas 6 dos 9 elementos de

h_{ij} de são independentes pelo fato dele ser um tensor simétrico; a primeira das Eqs.(6.26) impõe três vínculos ao tensor e a segunda impõe mais um, eliminando assim mais quatro graus de liberdade, resultando nos dois graus liberdade esperados.

Substituindo (6.22) e (6.24) em (6.21), temos:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[(1 + 2\phi) d\eta^2 + 2(B_{,i} + \hat{S}_i) dx^i d\eta + \right. \\ \left. - (1 - 2\psi) \delta_{ij} dx^i dx^j + (2E_{,ij} + \hat{F}_{i,j} + \hat{F}_{j,i} + \hat{h}_{ij}) dx^i dx^j \right]$$

que pode ainda ser reescrito como:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j \right] + \\ + 2a(\eta)^2 \left[\phi d\eta^2 + B_{,i} dx^i d\eta + (E_{,ij} + \psi \delta_{ij}) dx^i dx^j \right] + \\ + 2a(\eta)^2 \left[\hat{S}_i dx^i d\eta + \frac{1}{2} (\hat{F}_{i,j} + \hat{F}_{j,i}) dx^i dx^j \right] + \\ + a(\eta)^2 \hat{h}_{ij} dx^i dx^j . \quad (6.27)$$

Analisando a Eq.(6.27), podemos simplificar o elemento de linha de acordo com:

$$ds^2 = [\tilde{g}_{\mu\nu} + \delta g s_{\mu\nu} + \delta g v_{\mu\nu} + \delta g t_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu \quad (6.28)$$

em que $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é dada na Eq.(6.3), $\delta g s_{\mu\nu}$ dado por:

$$[\delta g s_{\mu\nu}] = 2a^2(\eta) \left(\begin{array}{c|ccc} \phi & \frac{1}{2}B_{,1} & \frac{1}{2}B_{,2} & \frac{1}{2}B_{,3} \\ \hline \frac{1}{2}B_{,1} & \psi + E_{,11} & E_{,12} & E_{,13} \\ \frac{1}{2}B_{,2} & E_{,12} & \psi + E_{,22} & E_{,23} \\ \frac{1}{2}B_{,3} & E_{,13} & E_{,23} & \psi + E_{,33} \end{array} \right), \quad (6.29)$$

a parte vetorial $\delta g v_{\mu\nu}$ escrita como:

$$[\delta g v_{\mu\nu}] = 2a^2(\eta) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \hat{S}_1 & \hat{S}_2 & \hat{S}_3 \\ \hline \hat{S}_1 & \hat{F}_{1,1} & \frac{1}{2}(\hat{F}_{1,2} + \hat{F}_{2,1}) & \frac{1}{2}(\hat{F}_{1,3} + \hat{F}_{3,1}) \\ \hat{S}_2 & \frac{1}{2}(\hat{F}_{2,1} + \hat{F}_{1,2}) & \hat{F}_{2,2} & \frac{1}{2}(\hat{F}_{2,3} + \hat{F}_{3,2}) \\ \hat{S}_3 & \frac{1}{2}(\hat{F}_{3,1} + \hat{F}_{1,3}) & \frac{1}{2}(\hat{F}_{3,2} + \hat{F}_{2,3}) & \hat{F}_{3,3} \end{array} \right), \quad (6.30)$$

e a contribuição tensorial $\delta g_{t_{\mu\nu}}$ dada por:

$$[\delta g_{t_{\mu\nu}}] = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \hat{h}_{13} \\ 0 & \hat{h}_{12} & \hat{h}_{22} & \hat{h}_{23} \\ 0 & \hat{h}_{13} & \hat{h}_{23} & \hat{h}_{33} \end{array} \right) \quad (6.31)$$

A decomposição SVT mostra-se uma ferramenta muito poderosa pois, na teoria de perturbações lineares, a evolução das perturbações escalares, vetoriais e tensoriais não se misturam e podem ser tratadas separadamente. Nesse contexto, podemos descrever algumas características de cada uma delas (MUKHANOV, 2005):

- **Perturbações escalares:** são caracterizadas pelos quatro escalares ϕ , ψ , B e E . Elas são induzidas por inhomogeneidades na densidade de energia. Essas perturbações são as mais importantes porque exibem instabilidade gravitacional e são responsáveis pela formação de estruturas do universo.
- **Perturbações vetoriais:** são descritas pelos dois vetores de divergência nula \hat{S}_i e \hat{F}_i e estão relacionadas aos movimentos rotacionais do fluido. Estas decaem muito rapidamente e não têm interesse cosmológico.
- **Perturbações tensoriais:** associadas ao tensor \hat{h}_{ij} , descrevem ondas gravitacionais, que são os graus de liberdade do próprio campo gravitacional. Na aproximação linear, as ondas gravitacionais não induzem nenhuma perturbação no fluido perfeito.

As variáveis de perturbação são entendidas como a diferença entre o valor calculado no espaço-tempo real e o background. Essa definição só faz sentido se a comparação for feita no mesmo ponto. Uma vez que esses valores estão em espaço-tempos diferentes, seria necessário estabelecer um mapeamento que ligue dois pontos em espaço-tempos distintos de maneira unívoca. Essa correspondência é chamada *escolha de gauge* e mudar o mapeamento implica em realizar uma *transformação de gauge* (RIOTTO, 2002)

As perturbações da maneira como estão escritas carregam cargas de perturbações fictícias, que não estão atreladas a nenhuma quantidade física e só aparecem devido a efeitos de mudança de coordenadas (MUKHANOV, 2005). Isso é consequência direta do fato de que não é possível associar univocamente um ponto do background com um ponto do espaço-tempo perturbado através de uma transformação de gauge.

Para eliminar esse problema, são adotados usualmente duas abordagens:

- Escolher um determinado gauge. Ou seja, escolher uma forma para as perturbações vinculando transformações de coordenadas específicas. Por exemplo, escolha de um sistema de referencial onde apenas as componentes diagonais da métrica possuem termos de perturbação.

- Identificar combinações de variáveis perturbadas que são invariantes de gauge.

Ambos os procedimentos possuem vantagens e desvantagens. Nesse trabalho, vamos utilizar sobretudo um gauge específico conhecido como *gauge newtoniano* ou *gauge longitudinal* (RIOTTO, 2002).

Nas próximas seções, vamos quantificar as alterações que uma mudança de gauge inflige nas perturbações da métrica, e nas perturbações de quantidades escalares, vetoriais e tensoriais.

6.2.1 Transformações de Gauge

As perturbações de uma determinada quantidade $Q(\eta, x^\mu)$ são definidas no mesmo ponto da seguinte maneira:

$$\delta Q(\eta, x^\mu) = Q(\eta, x^\mu) - \tilde{Q}(\eta, x^\mu),$$

sendo que $\tilde{Q}(\eta, x^\mu)$ está representando a quantidade não perturbada. Em Relatividade Geral, a abordagem correta necessita de um maior cuidado para estar de acordo com o Princípio da Covariância Geral (PETER, 2009). Até agora, tudo o que consideramos é que o espaço-tempo perturbado é próximo ao espaço-tempo FLRW. No entanto, existem infinitas maneiras de se estabelecer sistemas de coordenadas com métricas próximas à métrica de fundo. Nas seções posteriores, vamos definir um método de determinar perturbações que independam de transformações entre sistemas de coordenadas perturbados.

Dado um ponto \tilde{P} no referencial de background, existe um ponto em cada referencial perturbado que é relacionado à \tilde{P} . As transformações que mapeiam esses pontos entre os diversos sistemas de referencial perturbados são conhecidas como *transformações de gauge* (vide Fig. 23). Nesta seção, vamos nos referir as coordenadas do espaço-tempo de background como sendo \tilde{x}^μ , e dois sistemas de coordenadas no espaço-tempo perturbado dados por $x_{(A)}^\mu$ e $x_{(B)}^\mu$.

O sistema de coordenadas $\{x_{(A)}^\mu\}$ relaciona o ponto \tilde{P} no background com o ponto $P_{(A)}$ no espaço perturbado. Da mesma forma, o ponto $P_{(B)}$ no espaço-tempo perturbado é relacionado com o ponto \tilde{P} do background através das coordenadas perturbadas $\{x_{(B)}^\mu\}$. Essa associação pode ser formalizada através de:

$$\tilde{x}^\mu(\tilde{P}) = x_{(A)}^\nu(P_{(A)}) = x_{(B)}^\mu(P_{(B)}) . \quad (6.32)$$

Ou seja, na Fig. 23, supondo que cada linha do sistema de coordenadas $\{\tilde{x}^\mu\}$ represente uma unidade, o ponto \tilde{P} no background será dado pelo par coordenado (2, 3). No espaço-tempo perturbado, o par coordenado (2, 3) nos sistemas de coordenadas $\{x_{(A)}^\mu\}$ e $\{x_{(B)}^\mu\}$

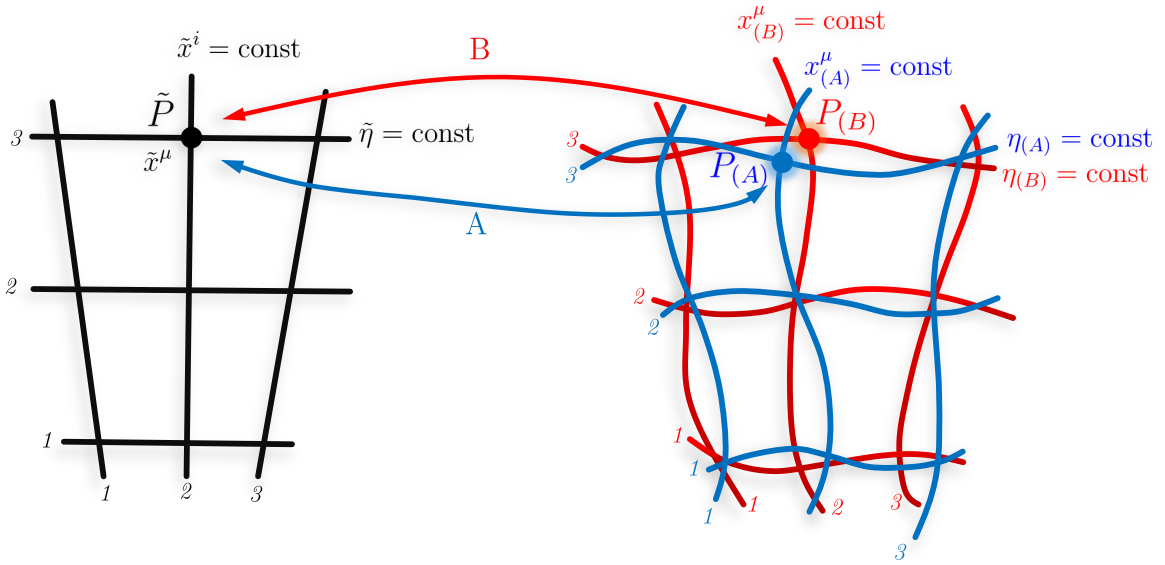


Figura 23 – Espaço-tempo de background ilustrado na esquerda com coordenadas \tilde{x}^μ e o espaço-tempo perturbado na direita com coordenadas $x_{(A)}^\mu$ e $x_{(B)}^\mu$.
Fonte: Do autor.

apontarão respectivamente os pontos distintos $P_{(A)}$ e $P_{(B)}$. A diferença entre esses dois pontos é o vetor ξ^μ , tal que: ¹

$$x_{(A)}^\mu (P_{(B)}) = x_{(A)}^\mu (P_{(A)}) + \xi^\mu \quad (6.33)$$

no sistema $\{x_{(A)}^\mu\}$; e

$$x_{(B)}^\mu (P_{(B)}) = x_{(B)}^\mu (P_{(A)}) + \xi^\mu \quad (6.34)$$

em $\{x_{(B)}^\mu\}$. Através da Eq.(6.32), as Eqs. (6.33) e (6.34) fornecem as transformações de gauge:

$$x_{(A)}^\mu (P_{(B)}) = x_{(B)}^\mu (P_{(B)}) + \xi^\mu \quad (6.35)$$

e

$$x_{(A)}^\mu (P_{(A)}) = x_{(B)}^\mu (P_{(A)}) + \xi^\mu \quad (6.36)$$

Das Eqs.(6.35) e (6.36), podemos estabelecer:

$$\frac{\partial x_{(A)}^\mu}{\partial x_{(B)}^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu \xi^\mu \quad (6.37)$$

¹ $x_{(A)}^\mu (P_{(B)})$ indica as coordenadas do ponto $P_{(B)}$ no sistema $\{x_{(A)}^\mu\}$.

e

$$\frac{\partial x_{(B)}^\mu}{\partial x_{(A)}^\nu} = \delta_\nu^\mu - \partial_\nu \xi^\mu. \quad (6.38)$$

As Eqs. (6.35) e (6.36) fornecem as transformações de coordenadas entre os sistemas referenciais do espaço-tempo perturbado. Nosso interesse nesse momento é obter as transformações de gauge para quantidades tensoriais de rank qualquer. Conforme demonstrado no Apêndice D, a lei de transformação de gauge para as perturbações de um escalar s , um 4-vetor v^μ , e para os tensores $T_{\mu\nu}$ (covariante) e $T^{\mu\nu}$ (contravariante) são:

$$\begin{cases} \delta s|_{(A)} = \delta s|_{(B)} - \partial_\mu \tilde{s} \xi^\mu \\ \delta v^\mu|_{(A)} = \delta v^\mu|_{(B)} + \partial_\lambda \xi^\mu \tilde{v}^\lambda - \partial_\lambda \tilde{v}^\mu \xi^\lambda \\ \delta T_{\mu\nu}|_{(A)} = \delta T_{\mu\nu}|_{(B)} - \partial_\nu \xi^\beta \tilde{T}_{\mu\beta} - \partial_\mu \xi^\alpha \tilde{T}_{\alpha\nu} - \partial_\rho \tilde{T}_{\mu\nu} \xi^\rho \\ \delta T^{\mu\nu}|_{(A)} = \delta T^{\mu\nu}|_{(B)} + \partial_\beta \xi^\nu \tilde{T}^{\mu\beta} + \partial_\alpha \xi^\mu \tilde{T}^{\alpha\nu} - \partial_\rho \tilde{T}^{\mu\nu} \xi^\rho \end{cases}, \quad (6.39)$$

onde \tilde{s} , \tilde{v}^μ , $\tilde{T}_{\mu\nu}$ e $\tilde{T}^{\mu\nu}$ estão definidos no background.

6.2.2 Transformações da Métrica

A métrica perturbada, como pode ser conferido na Eq.(6.19), é dada pela soma da métrica de background mais um termo de perturbação:

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}|_{(A)}. \quad (6.40)$$

Aqui, representamos a perturbação $\delta g_{\mu\nu}|_{(A)}$ dada num sistema de coordenadas genérico $\{x_{(A)}^\mu\}$. Visto que a perturbação é dependente de gauge, podemos realizar transformações entre gauges distintos através da Eq.(6.39):

$$\delta g_{\mu\nu}|_{(A)} = \delta g_{\mu\nu}|_{(B)} - (\partial_\nu \xi^\beta) \tilde{g}_{\mu\beta} - (\partial_\mu \xi^\alpha) \tilde{g}_{\alpha\nu} - (\partial_\rho \tilde{g}_{\mu\nu}) \xi^\rho. \quad (6.41)$$

De acordo com a decomposição **SVT**, temos que separar ξ^ρ em parte temporal e espacial:

$$\xi^\mu \equiv (\xi^0, \xi^i).$$

Além disso, temos que decompor os graus de liberdade de ξ^i em parte escalar e vetorial:

$$\xi^i = \pi^{,i} + \hat{\theta}^i = \pi_{,i} + \hat{\theta}_i, \quad (6.42)$$

onde π é um escalar e $\hat{\theta}^i$ é um 3-vetor de divergência nula ($\hat{\theta}^i_{,i} = 0$). O vetor $\hat{\theta}^i$ pode ter seus índices levantados ou baixados por δ^{ij} , i.e., $\hat{\theta}^i = \delta^{ij} \hat{\theta}_j$.

Portanto, as transformações de cada componentes da perturbação da métrica são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta g_{00}|_{(A)} = \delta g_{00}|_{(B)} - 2a (a\xi^0)' \\ \delta g_{0i}|_{(A)} = \delta g_{0i}|_{(B)} + a^2 [\hat{\theta}'_j + (\pi' - \xi^0)_{,i}] \\ \delta g_{ij}|_{(A)} = \delta g_{ij}|_{(B)} + a^2 \left[2\frac{a'}{a} \delta_{ij} \xi^0 + 2\pi_{,ij} + \hat{\theta}_{i,j} + \hat{\theta}_{j,i} \right] \end{array} \right. , \quad (6.43)$$

em que foram utilizadas as notações (6.6) e (6.18).

Com as Eqs.(6.43), temos as transformações de gauge das perturbações da métrica. Essas três equações descrevem as variações das perturbações da métrica devido a uma mudança de coordenada. Nota-se que em $\delta g_{00}|_{(A)}$ temos apenas variações escalares. Já em $\delta g_{0i}|_{(A)}$, temos duas variações escalares e uma vetorial. Por fim, em $\delta g_{ij}|_{(A)}$ temos duas variações do tipo escalar e duas do tipo vetorial.

No começo dessa seção, obtivemos as Eqs. (6.28), (6.29), (6.30) e (6.31) que descrevem as perturbações da métrica em termos das funções escalares ϕ , B , E , e ψ ; das funções vetoriais \hat{S}_i e \hat{F}_i ; e da função tensorial \hat{h}_{ij} . Em primeira ordem de aproximação, os modos de perturbação escalar, vetorial e tensorial evoluem independentemente (eles se desacoplam) e por conta disso, é possível analisá-los separadamente (MUKHANOV; FELDMAN; BRANDENBERGER, 1992).

Vamos focar no estudo das perturbações escalares. Isso porque as perturbações vetoriais decaem muito rapidamente e as perturbações tensoriais não induzem perturbações no tensor energia momento de fluido perfeito (MUKHANOV, 2005). Portanto, basta considerarmos na Eq.(6.28) a contribuição escalar, dada na Eq.(6.29).

6.2.3 Perturbações escalares

Conforme comentado, consideraremos apenas a contribuição das perturbações escalares em (6.27):

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[(1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} dx^i d\eta + (2E_{,ij} - (1 - 2\psi) \delta_{ij}) dx^i dx^j \right] \quad (6.44)$$

Nesse caso, a perturbação do tensor métrico é dada na Eq.(6.29), supondo que esta perturbação está definida num sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$. Portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta g_{00} = 2a\phi \\ \delta g_{0i} = 2B_{,i} \\ \delta g_{ij} = \psi\delta_{ij} + E_{,ij} \end{array} \right. . \quad (6.45)$$

De acordo com a Eq.(6.43), podemos obter a variação das perturbações da métrica devido a uma transformação de gauge que leva ao referencial $\{x_{(A)}^\mu\}$. Para perturbações puramente escalares, temos $\hat{\theta}^i = 0$ e com isso, a Eq.(6.43) se simplifica em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta g_{00}|_{(A)} = \delta g_{00} - 2a (a\xi^0)' \\ \delta g_{0i}|_{(A)} = \delta g_{0i} + a^2 (\pi' - \xi^0)_{,i} \\ \delta g_{ij}|_{(A)} = \delta g_{ij} + a^2 \left(2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\xi^0 + 2\pi_{,ij} \right) \end{array} \right. . \quad (6.46)$$

Ao aplicar a transformação (6.46) em (6.45), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{(A)} = \phi - \frac{1}{a} (a\xi^0)' \quad ; \quad \psi_{(A)} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0 \\ B_{(A)} = B + \pi' - \xi^0 \quad ; \quad E_{(A)} = E + \pi \end{array} \right. \quad (6.47)$$

Note que apenas as variáveis π e ξ^0 contribuem para as perturbações escalares. É possível escolher seus valores de forma a anular duas das quatro funções ϕ , ψ , B e E . A combinação linear invariante de gauge mais simples destas quatro funções que determinam as perturbações físicas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \phi - \frac{1}{a} [a(B - E)]' \\ \Psi = \psi + \frac{a'}{a} (B - E) \end{array} \right. \quad (6.48)$$

Essas variáveis não se alteram sobre transformações de gauge. Portanto, se elas se anularem em um sistema de coordenadas, elas serão nulas em qualquer outro sistema. Com isso, é possível distinguir as inomogeneidades físicas das perturbações fictícias geradas por transformações infinitesimais de coordenadas (MUKHANOV; FELDMAN; BRANDENBERGER, 1992). Uma outra variável invariante de gauge de interesse é:

$$\bar{\delta\rho} = \delta\rho - \tilde{\rho}' (B - E'), \quad (6.49)$$

que está relacionada com a perturbação da densidade de energia.

A abordagem de maior praticidade é a fixação de um gauge específico, escolhido de acordo com os objetivos do estudo. No nosso caso, vamos utilizar a liberdade de gauge para definir o *gauge conforme-newtoniano*, que será aquele no qual encontraremos as equações da cosmologia perturbativa. O gauge newtoniano é definido por $E = B = 0$. Essa condição fixa o sistema de coordenadas de forma única e através da Eq.(6.44), produz um elemento de linha:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[(1 + 2\phi) d\eta^2 - (1 - 2\psi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right] \quad (6.50)$$

Com essa métrica, se o tensor energia momento for diagonal, temos a equivalência $\phi = \psi$, restando apenas uma variável descrevendo as perturbações escalares da métrica. A variável ϕ é a generalização do potencial newtoniano, que justifica o nome do sistema de coordenadas (gauge newtoniano). Pelas Eqs. (6.48) e (6.49), podemos notar que as variáveis invariantes de gauge apresentam uma interpretação muito simples: são as amplitudes da métrica e a perturbação na densidade de energia.

Uma vez definido o gauge, vamos nos concentrar em obter a forma perturbada das Equações de Einstein para possibilitar o estudo da evolução das variáveis perturbadas.

6.3 EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES

No regime linear, as equações da cosmologia podem ser obtidas da linearização das equações de Einstein:

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\nu R = 8\pi G T^\mu{}_\nu. \quad (6.51)$$

É válido salientar que tanto $G^\mu{}_\nu$ quanto $T^\mu{}_\nu$ são tensores covariantemente conservados:

$$\nabla_\mu G^\mu{}_\nu = \nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0. \quad (6.52)$$

A fim de determinar as equações perturbadas, podemos dissociar os tensores $G^\mu{}_\nu$ e $T^\mu{}_\nu$ bem como o operador de derivação covariante ∇_μ em uma parte de background mais perturbação. Ou seja:

$$\begin{cases} G^\mu{}_\nu = \tilde{G}^\mu{}_\nu + \delta G^\mu{}_\nu \\ T^\mu{}_\nu = \tilde{T}^\mu{}_\nu + \delta T^\mu{}_\nu \\ \nabla_\mu = \tilde{\nabla}_\mu + \delta \nabla_\mu \end{cases} \quad (6.53)$$

Substituindo (6.53) em (6.51), obtemos duas equações. A primeira delas:

$$\tilde{G}^\mu{}_\nu = 8\pi G \tilde{T}^\mu{}_\nu \quad (6.54)$$

são as Equações de Campo de Einstein no background, que como já vimos, dão origem as Eqs. (6.8) e (6.9). A segunda equação fornece a dinâmica das perturbações:

$$\delta G^\mu{}_\nu = 8\pi G \delta T^\mu{}_\nu. \quad (6.55)$$

Podemos aplicar a (6.53) na equação de conservação covariante do tensor energia momento (6.52). Os resultados obtidos serão:

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^\mu{}_\nu = 0 ,$$

para a parte de background; e:

$$\tilde{\nabla}_\mu \delta T^\mu{}_\nu + \delta \nabla_\mu \tilde{T}^\mu{}_\nu = 0 , \quad (6.56)$$

para a parte perturbativa.

Do elemento de linha dado na Eq.(6.50), obtemos a métrica do espaço tempo perturbado. Com ela, calcula-se os coeficientes da conexão :

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} + \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} , \quad (6.57)$$

onde a parte de background está dada em (6.4) e suas perturbações calculadas por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta \Gamma^0{}_{00} = \phi' & \delta \Gamma^i{}_{00} = \phi^{,i} \\ \delta \Gamma^0{}_{ij} = -2[\psi' + 2\mathcal{H}(\phi + \psi)] \delta_{ij} & \delta \Gamma^0{}_{0i} = \phi_{,i} \\ \delta \Gamma^j{}_{0i} = -\psi' \delta_i^j & \delta \Gamma^i{}_{jk} = -\psi_{,j} \delta_k^i - \psi_{,k} \delta_j^i - \psi^{,i} \delta_{jk} \end{array} \right. \quad (6.58)$$

Substituindo (6.57) em (6.56), encontra-se:

$$\partial_\mu \delta T^\mu{}_\nu + \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\mu\alpha} \delta T^\alpha{}_\nu - \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu} \delta T^\mu{}_\alpha + \delta \Gamma^\mu{}_{\mu\alpha} \tilde{T}^\alpha{}_\nu - \delta \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \tilde{T}^\mu{}_\alpha = 0 . \quad (6.59)$$

Por fim, para obtermos as equações da dinâmica cósmica perturbada, devemos calcular as perturbações do tensor de Einstein ($\delta G^\mu{}_\nu$) e no tensor energia momento ($\delta T^\mu{}_\nu$) para depois aplicá-las nas Eqs. (6.55) e (6.59). Essa sequência nos dará um conjunto de equações diferenciais acopladas que guiam a dinâmica.

Concentrando-nos no tensor energia momento do fluido perfeito:

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p) u^\mu u_\nu - p \delta^\mu{}_\nu ,$$

com ρ e p sendo densidade de energia e pressão como usual, e u^μ a 4-velocidade do fluido. Vamos adotar o procedimento padrão de perturbação que consiste em interpretar cada

quantidade como sendo a soma de um termo de background com um termo de perturbação. Ou seja:

$$T^\mu_\nu = \tilde{T}^\mu_\nu + \delta T^\mu_\nu$$

$$\rho = \tilde{\rho} + \delta\rho$$

$$p = \tilde{p} + \delta p$$

$$u^\mu = \tilde{u}^\mu + \delta u^\mu$$

Desse procedimento, segue que:

$$\tilde{T}^\mu_\nu = (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \tilde{u}^\mu \tilde{u}_\nu - \tilde{p} \delta^\mu_\nu, \quad (6.60)$$

e a relação das perturbações:

$$\delta T^\mu_\nu = (\tilde{\rho} + \tilde{p}) (\tilde{u}^\mu \delta u_\nu + \delta u^\mu \tilde{u}_\nu) + (\delta\rho + \delta p) \tilde{u}^\mu \tilde{u}_\nu - \delta p \delta^\mu_\nu, \quad (6.61)$$

Em primeiro lugar, num sistema referencial com o tempo próprio $(t, x^\mu_{(F)})$,² as coordenadas espaciais $x^\mu_{(F)}$ são comóveis a expansão. Nesse caso específico, a 4-velocidade não perturbada pode ser escrita como:

$$\tilde{u}^\mu_{(F)} = \frac{dx^\mu_{(F)}}{dt} = \delta^\mu_0 = (1, 0, 0, 0).$$

Realizando uma transformação de coordenadas para o referencial definido em termos do tempo conforme η , temos a 4-velocidade:

$$\tilde{u}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu_{(F)}} \tilde{u}^\nu_{(F)} = \frac{1}{a} \delta^\mu_0$$

onde foi utilizado $\partial x^0 / \partial x^0_{(F)} = d\eta/dt = 1/a$ e $dx^i/dt = 0$. A condição de normalização $\tilde{u}^\mu \tilde{u}_\mu = 1$ para as 4-velocidades no background resulta em:

$$\begin{cases} \tilde{u}^\mu = \frac{1}{a} \delta^\mu_0 \\ \tilde{u}_\mu = a \delta^0_\mu \end{cases}. \quad (6.62)$$

A 4-velocidade perturbada também deve satisfazer a condição de normalização. Ou seja $u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$. Aplicando a linearização nessa equivalência, obtemos:

$$(\tilde{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) (\tilde{u}^\mu + \delta u^\mu) (\tilde{u}^\nu + \delta u^\nu) = 1$$

² A designação (F) indica o sistema de coordenadas da métrica FLRW.

que em primeira ordem de aproximação, implica em:

$$\delta g_{\mu\nu} \tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu + 2\tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{u}^\nu \delta u^\mu = 0. \quad (6.63)$$

Combinando as Eqs. (6.62) e (6.63), temos a expressão:

$$a\delta^0_\mu \delta u^\mu = -\frac{1}{2a^2} \delta^\mu_0 \delta^\nu_0 \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2a^2} \delta g_{00},$$

que resulta em

$$\delta u^0 = -\frac{\phi}{a}. \quad (6.64)$$

Vamos definir o 3-vetor V^i de acordo com:

$$V^i \equiv a\delta u^i, \quad (6.65)$$

tal que as perturbações da 4-velocidade possam ser simplificadas de acordo com:

$$\delta u^\mu = -\frac{1}{a} (\phi, -V^i). \quad (6.66)$$

Contraindo (6.66) com a métrica perturbada, podemos obter a forma covariante da perturbação da 4-velocidade:

$$\delta u_\mu = a (\phi, -V_i), \quad (6.67)$$

em que $V_i = V^i$.

Para estarmos condizentes com a decomposição SVT, vamos dividir os 3 novos graus de liberdade contidos em V_i em partes escalar e vetorial, através da decomposição:

$$V_i = v_{,i} + \hat{\omega}_i \quad (6.68)$$

onde v é um escalar e $\hat{\omega}_i$ é um 3-vetor de divergência nula ($\partial_i \hat{\omega}^i = 0$).

Portanto, o tensor de energia momento dependerá das perturbações escalares $\delta\rho$, δp , v e a perturbação vetorial $\hat{\omega}$. Munidos do conhecimento de que as perturbações vetoriais não influenciam a dinâmica das perturbações escalares, podemos negligenciar o termos de perturbação vetorial. Portanto:

$$\begin{cases} \delta u^\mu = -\frac{1}{a} (\phi, -v_{,i}) \\ \delta u_\mu = a (\phi, -v_{,i}) \end{cases}. \quad (6.69)$$

Considerando as Eqs. (6.62) e (6.69) em (6.61), obtemos:

$$\begin{cases} \delta T^0_0 = \delta\rho \\ \delta T^0_i = -\delta T^i_0 = -(\tilde{\rho} + \tilde{p}) v_{,i} \\ \delta T^i_j = -\delta p \delta^i_j \end{cases} \quad (6.70)$$

ou explicitamente:

$$[\delta T^\mu_\nu] = \begin{pmatrix} \delta\rho & -(\tilde{\rho} + \tilde{p})v_{,1} & -(\tilde{\rho} + \tilde{p})v_{,2} & -(\tilde{\rho} + \tilde{p})v_{,3} \\ (\tilde{\rho} + \tilde{p})v_{,1} & -\delta p & 0 & 0 \\ (\tilde{\rho} + \tilde{p})v_{,2} & 0 & -\delta p & 0 \\ (\tilde{\rho} + \tilde{p})v_{,3} & 0 & 0 & -\delta p \end{pmatrix}. \quad (6.71)$$

Essa é a perturbação no tensor energia momento útil no estudo da dinâmica das perturbações cosmológicas escalares.

Com a definição das perturbações do tensor energia momento, podemos obter o primeiro conjunto de equações que guiam a evolução das variáveis perturbadas escalares. Para isso, devemos combinar as Eqs. (6.70) com as Eqs.(6.58) e (6.4) e utilizá-las para o desenvolvimento da Eq.(6.59):

$$\partial_\mu \delta T^\mu_\nu + \tilde{\Gamma}^\mu_{\mu\alpha} \delta T^\alpha_\nu - \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \delta T^\mu_\alpha + \delta \Gamma^\mu_{\mu\alpha} \tilde{T}^\alpha_\nu - \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \tilde{T}^\mu_\alpha = 0. \quad (6.72)$$

Para a parte temporal, fazemos $\nu = 0$. Logo:

$$\delta\rho' + (\tilde{\rho} + \tilde{p}) (\nabla^2 v - 3\psi') + 3\mathcal{H} (\delta\rho + \delta p) = 0. \quad (6.73)$$

Da mesma maneira, quando o índice ν em (6.72) percorre as coordenada espaciais ($\nu = i$), obtém-se:

$$[v (\tilde{\rho} + \tilde{p})]' + (\tilde{\rho} + \tilde{p}) (4\mathcal{H}v + \phi) + \delta p = 0. \quad (6.74)$$

O próximo passo consiste em calcular as perturbações δG^μ_ν , do tensor de Einstein, de maneira análoga ao que foi feito com a equação de conservação. Após um longo desenvolvimento, obtém-se (MUKHANOV; FELDMAN; BRANDENBERGER, 1992):

$$\begin{cases} \delta G^0_0 = \frac{2}{a^2} [\nabla^2 v - 3\mathcal{H} (\psi' + \mathcal{H}\phi)] \\ \delta G^0_i = \frac{2}{a^2} (\psi' + \mathcal{H}\phi)_{,i} \\ \delta G^i_j = -\frac{2}{a^2} [\psi'' + \mathcal{H} (2\psi + \phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \phi + \frac{1}{2} \nabla^2 (\phi - \psi)] \delta^i_j - \frac{1}{2} \delta^{ik} (\phi - \psi)_{,kj} \end{cases}. \quad (6.75)$$

Como já temos a forma perturbada tanto do tensor energia momento quanto do tensor de Einstein, basta considerá-los na forma perturbada das equações de Einstein.(6.55):

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi G \delta T^\mu_\nu.$$

Analisando primeiramente δG^i_i quando $i \neq j$, temos:

$$-\frac{1}{2}(\phi - \psi)_{,ij} = 0.$$

A única solução fisicamente coerente dessa equação é

$$\phi = \psi. \quad (6.76)$$

As outras equações perturbadas podem ser obtidas substituindo (6.70) e (6.75) em (6.55). Os resultados obtidos são:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi G a^2 \delta\rho \\ \frac{1}{a}(a\phi)'_{,i} = -4\pi G a^2 (\tilde{\rho} + \tilde{p}) v_{,i} \\ \phi'' + 3\mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi = 4\pi G a^2 \delta p \end{cases}. \quad (6.77)$$

Nesse contexto, podemos reconhecer a variável ϕ como o análogo relativístico do potencial gravitacional newtoniano.

Se contabilizarmos, temos quatro variáveis de perturbação: ϕ , $\delta\rho$, δp e v . Todavia, com as Eqs. (6.73), (6.74) e (6.77) temos cinco equações perturbadas. Apesar do sistema estar aparentemente sobredefinido, não existe nenhum erro em nossa abordagem. Essa ambiguidade se deve ao fato de que, as Eqs. (6.73) e (6.74) obtidas pela conservação do tensor energia momento estão completamente contidas em (6.77). Isto ocorre pois o conceito de conservação covariante está intrínseco nas equações de Einstein. Logo, nestas cinco equações, temos a vinculação de três graus de liberdade, de modo que, a escolha de quaisquer três delas produzirá a mesma dinâmica de evolução. O último grau de liberdade é satisfeito considerando-se uma equação de estado junto a esse sistema.

Uma importante observação deve ser feita: até agora, lidamos com a perturbação do tensor energia momento de fluido perfeito. Em nosso caso, o tensor energia momento referente as componentes do universo é dado pela contribuição de dois ou mais fluidos. Apoiando-nos na hipótese de fluidos não interagentes, o tensor energia momento total será dado pela soma dos tensores energia-momento de cada fluido, cada um sendo covariantemente conservado. Desse modo, as Eqs. (6.73) e (6.74) são válidas para cada componente do fluido cósmico.

$$\begin{cases} \delta\rho'_{(i)} + (\tilde{\rho}_{(i)} + \tilde{p}_{(i)}) (\nabla^2 v_{(i)} - 3\phi') + 3\mathcal{H}(\delta\rho_{(i)} + \delta p_{(i)}) = 0 \\ [v_{(i)} (\tilde{\rho}_{(i)} + \tilde{p}_{(i)})]' + (\tilde{\rho}_{(i)} + \tilde{p}_{(i)}) (4\mathcal{H}v_{(i)} + \phi) + \delta p_{(i)} = 0 \end{cases}. \quad (6.78)$$

De maneira distinta, as equações perturbadas de Einstein em (6.77) são definidas para o conteúdo energético total. As variáveis termodinâmicas presentes são tomadas pela soma das propriedades intensivas dos fluidos individuais. Em um universo com N componentes, temos:

$$\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_{(i)} ; \quad \tilde{p} = \sum_{i=1}^N \tilde{p}_{(i)}$$

e

$$\delta\rho = \sum_{i=1}^N \delta\rho_{(i)} ; \quad \delta p = \sum_{i=1}^N \delta p_{(i)} ; \quad v = \sum_{i=1}^N v_{(i)}.$$

Dos conjuntos definidos, a escolha de equações mais favorável é dada pela primeira das Eqs.(6.77) e um par das Eqs. (6.78) para cada componente do fluido cósmico. No estudo da evolução das variáveis perturbadas, é vantajoso em muitos aspectos reescrever essa equações em termos novas variáveis relacionadas as perturbações de densidade de energia ($\delta\rho$) e velocidades (v). Nesse sentido, definimos o *contraste de densidade*:

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}. \quad (6.79)$$

e a *divergência da velocidade* (θ), em que o vetor 3-velocidade está definido na Eq. (6.68). Visto que $\hat{\omega}^i$ é de divergência nula por definição, tem-se:

$$\theta \equiv \partial_i V^i = \partial_i \partial^i v. \quad (6.80)$$

Desse modo, a primeira das equações perturbadas de Einstein pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \phi - 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi G a^2 \sum_{i=1}^N \tilde{\rho}_{(i)} \delta_{(i)}. \quad (6.81)$$

A dinâmica da perturbação da densidade de energia reescrita em termos do contraste de densidade é dada por:

$$\delta'_{(i)} + 3\mathcal{H} \left(\frac{\delta p_{(i)}}{\delta\rho_{(i)}} - \frac{\tilde{p}_{(i)}}{\tilde{\rho}_{(i)}} \right) \delta_{(i)} + \left(1 + \frac{\tilde{p}_{(i)}}{\tilde{\rho}_{(i)}} \right) (\theta_{(i)} - 3\phi') = 0, \quad (6.82)$$

onde foi utilizada a equação de continuidade para as variáveis do background ($\tilde{\rho}' + 3\mathcal{H}(\tilde{p} + \tilde{\rho}) = 0$). Tomando o laplaciano da segunda das Eqs. (6.78), obtém-se:

$$\theta'_{(i)} + \theta_{(i)} \mathcal{H} \left(1 - 3 \frac{\tilde{p}'_{(i)}}{\tilde{\rho}'_{(i)}} \right) + \nabla^2 \phi_{(i)} + \frac{\nabla^2 (\delta p_{(i)})}{\tilde{\rho}_{(i)} + \tilde{p}_{(i)}} = 0. \quad (6.83)$$

Em ambas as Eqs. (6.82) e (6.83), as perturbações de pressão se relacionam com as perturbações na densidade de energia através de:³

$$\delta p_{(i)} = c_{s,(i)}^2 \delta \rho_{(i)}, \quad (6.84)$$

em que:

$$c_{s,(i)}^2 = \frac{\partial \tilde{p}_{(i)}}{\partial \tilde{\rho}_{(i)}} = \frac{\tilde{p}'_{(i)}}{\tilde{\rho}'_{(i)}} \quad (6.85)$$

pode ser interpretado como a velocidade do som. Assumindo que os fluidos possuem equação de estado tal como dada em (6.10), juntamente com as definições (6.84) e (6.85), o conjunto de equações que guiam a evolução das perturbações escalares será:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi - 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi G a_{(i)}^2 \sum_{j=1}^N \tilde{\rho}_{(j)} \delta_{(j)} \\ \delta'_{(1)} + 3\mathcal{H}(c_{s,(1)}^2 - w_{(1)})\delta_{(1)} + (1 + w_{(1)})(\theta_{(1)} - 3\phi') = 0 \\ \theta'_{(1)} + \mathcal{H}(1 - 3c_{s,(1)}^2)\theta_{(1)} + \nabla^2 \phi + \frac{\nabla^2(c_{s,(1)}^2 \delta_{(1)})}{(1+w_{(1)})} = 0 \\ \vdots \\ \delta'_{(n)} + 3\mathcal{H}(c_{s,(n)}^2 - w_{(n)})\delta_{(n)} + (1 + w_{(n)})(\theta_{(n)} - 3\phi') = 0 \\ \theta'_{(n)} + \mathcal{H}(1 - 3c_{s,(n)}^2)\theta_{(n)} + \nabla^2 \phi + \frac{\nabla^2(c_{s,(n)}^2 \delta_{(n)})}{(1+w_{(n)})} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Primeiro fluido} \\ \vdots \\ \text{\(n\)-ésimo fluido} \end{array} \quad (6.86)$$

Antes de prosseguirmos, é importante entender como efetuar a ponte entre teoria e observação. Quando estudamos cosmologia de background, conseguimos mensurar quantidades médias de maneira muito simples. Por exemplo, a densidade de galáxias na cosmologia de Friedmann pode ser encarada como a o número total de galáxias no universo observável sobre o volume cósmico. Obtemos então uma quantidade $\tilde{\rho}(\eta)$, que hipoteticamente está uniformemente distribuída por todo o universo, que evolui no tempo mas independe das coordenadas espaciais. Em teoria de perturbações cosmológicas lineares,

³ Em geral, para um universo com multicomponentes, as perturbações de pressão devem ser descritas por:

$$\delta p = c_s^2 \delta \rho + \frac{\partial p}{\partial s} \delta s,$$

onde s é a entropia (MUKHANOV; FELDMAN; BRANDENBERGER, 1992). No entanto, assumimos a hipótese de trabalho de que as perturbações de entropia são desprezíveis e podem ser negligenciadas. Tal atitude é válida ao menos como uma primeira ordem de aproximação.

a densidade de galáxias $\rho(\eta, x^\mu)$, dada por

$$\rho(\eta, x^\mu) = \tilde{\rho}(\eta) + \delta\rho(\eta, x^\mu) ,$$

depende tanto do tempo quanto das coordenadas espaciais. Num primeiro momento, o estudo perturbativo se mostraria impossível. Não é praticável definir uma função ρ por meios teóricos que seja capaz de prever as coordenadas exatas de uma determinada galáxia ou estrela. Obviamente, como ρ é um campo contínuo de infinitos graus de liberdade, seria necessário impor infinitas condições iniciais para que isso fosse possível.

Uma alternativa coerente consiste em trabalhar com propriedades estatísticas da distribuição cósmica de galáxias. Nessa abordagem, onde podemos considerar as galáxias como partículas pontuais, dividimos o universo em regiões de volume dV_i , com ponto médio nas coordenadas \mathbf{x}_i . Então,

$$n_a = \rho(\mathbf{x}_a) dV_a \approx \tilde{\rho} dV_a$$

é o número de galáxias no volume dV_a ; e

$$n_b = \rho(\mathbf{x}_b) dV_b \approx \tilde{\rho} dV_b$$

é o número de galáxias em dV_b . Essas duas regiões estão afastadas por uma distância $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a$.

Se os pontos são distribuídos aleatoriamente no espaço, então, a probabilidade de se encontrar uma galáxia no volume dV_a é proporcional ao número de galáxias n_a nesse volume. Ou seja, $dP_a = N\tilde{\rho}dV_a$. Do mesmo modo, a probabilidade de encontrar duas galáxias, cada uma em um volume distinto, digamos dV_a e dV_b , será dada por $dP_{ab} = N\tilde{\rho}^2 dV_a dV_b$. Como as galáxias estão (nesse toy model) distribuídas aleatoriamente pelo espaço, não há razões para que um lugar tenha densidade de pontos maior que outro. Portanto, a probabilidade dP_{ab} não depende da distância \mathbf{r}_{ab} entre os volumes (REIS, 2007).

No caso real, a distribuição de galáxias no espaço não é aleatória. A probabilidade de que as duas galáxias estejam em dV_a e dV_b simultaneamente é dada por (RIVOLO, 1986):

$$dP_{ab} = N\tilde{\rho}^2 [1 + \xi(\mathbf{r}_{ab})] dV_a dV_b,$$

em que $\xi(\mathbf{r}_{ab})$ é a função de correlação de dois pontos. No caso isotrópico, tal função depende do módulo da distância entre os pontos e trás a informação sobre o modo como as galáxias estão aglomeradas. Caso $\xi = 0$, temos galáxias descorrelacionadas. Se $\xi > 0$, temos uma distribuição aglomerada em que as galáxias encontram-se preferencialmente próximas. No entanto, se $\xi < 0$, temos uma distribuição segregada, onde as galáxias estão distantes umas das outras (LOPES, 2011). A função de correlação pode também ser entendida como a média sobre todos os pares de posições possíveis:

$$\xi(\mathbf{r}) = \int \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) dV,$$

onde $\delta(\mathbf{x})$ é a função delta de Dirac. É possível estimar a $\xi(\mathbf{r})$ para a distribuição de galáxias no universo através do método de Rivolo (1986).

Outra quantidade útil no estudo da evolução de perturbações de matéria é o *power spectrum*. Ele tem um papel central na cosmologia devido a seu potencial de descrever a aglomeração de matéria no regime linear (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010). Sua definição é dada por:

$$P(k) = V |\delta_k|^2, \quad (6.87)$$

e está relacionado com a função de correlação através de uma transformação de Fourier:

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\delta_k|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k};$$

i.e.

$$P(k) = V |\delta_k|^2 = \int \xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}.$$

Note que $P(k)$ tem unidades do cubo do comprimento. Como o power spectrum e a função de correlação destoam entre si apenas por uma decomposição de Fourier, devem apresentar as mesmas informações estatísticas (ANDRADE, 2004). Além disso, é comum definir o power spectrum adimensional através de (MUKHANOV, 2005):

$$\Delta(k) = \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2}. \quad (6.88)$$

Valores observacionais do power spectrum da distribuição de galáxias (P_{gal}) podem ser obtidos da análise da estrutura em grande escala do universo. Os conjuntos que vamos utilizar são o SDSS (TEGMARK et al., 2004a) e 2dFGRS (COLE et al., 2005), cujos os dados podem ser visualizados na Fig. 24.

Nas regiões de grandes escalas (quando k é pequeno), é válida a aproximação linear. No entanto, para maiores escalas, o comportamento não linear passa a ser significativo. Nesse caso, a comparação entre o power spectrum observado e o power spectrum teórico deve ser feita com uma correção. Nesse trabalho, vamos adotar o procedimento proposto por Cole et al. (2005) que consiste em corrigir power spectrum linear P_{lin} por:

$$P_{\text{gal}}(k) = b^2 \frac{1 + Qk^2}{1 + A_g k} P_{\text{lin}}(k). \quad (6.89)$$

onde

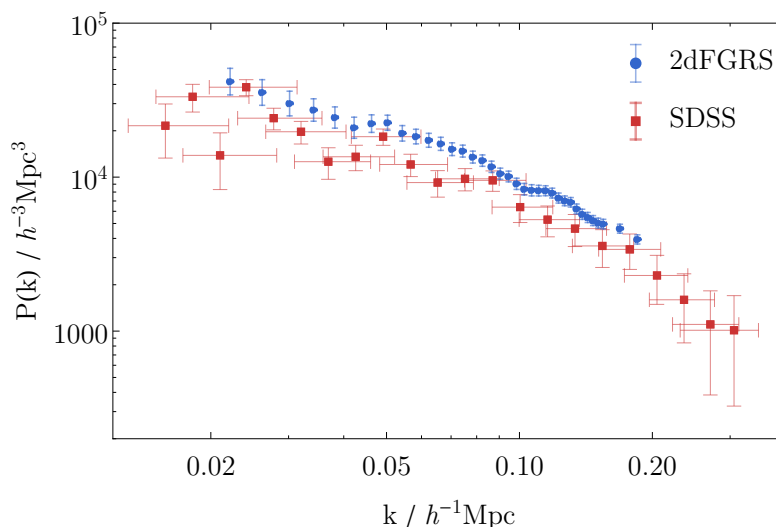


Figura 24 – Comparação entre os dados de power spectrum do 2dFGRS e SDSS.
Fonte: Do autor.

$$A_g = 1.4 \quad , \quad Q = 4.6 \quad .$$

A constante b^2 é um fator de enviesamento, conhecida na literatura como *bias factor*. Em análise bayesiana, frequentemente marginaliza-se o bias factor da função de verossimilhança. Contudo, como estamos realizando um estudo qualitativo, vamos escolhê-lo com o valor que promove o melhor ajuste.

Precisamos reescrever as Eqs. (6.86) no espaço de Fourier a fim de comparar $P_{\text{lin}}(k)$ com o power spectrum de galáxias. Isso implica em definir variáveis de perturbações ϕ_k , $\delta_{(i),k}$ e $\theta_{(i),k}$ que estão relacionadas com ϕ , $\delta_{(i)}$ e $\theta_{(i)}$ através de:

$$\begin{cases} \phi = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \phi_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \\ \delta_{(i)} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_{(i),k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \\ \theta_{(i)} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \theta_{(i),k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \end{cases} \quad (6.90)$$

em que o subscrito k representa um modo de Fourier para cada número de onda k . Todavia, como daqui para frente sempre estaremos trabalhando com perturbações associadas a um modo de Fourier específico, tomamos a liberdade de banir o índice k das variáveis para compactação de notação. Portanto, nos cálculos à frente, entenda-se ϕ como sendo definido no espaço de Fourier, assim como todas as outras variáveis perturbadas.

Existe uma maneira mais prática de obter as equações no espaço de Fourier sem ter que substituir as Eqs. (6.90) em (6.86). Para isso, dada uma variável perturbada qualquer

π , basta realizar as substituições:

$$\begin{cases} \pi(\eta, \mathbf{x}) \rightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\pi(\eta, \mathbf{k}) \\ \nabla\pi(\eta, \mathbf{x}) \rightarrow ie^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\pi(\eta, \mathbf{k})\mathbf{k} \\ \nabla^2\pi(\eta, \mathbf{x}) \rightarrow -k^2e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\pi(\eta, \mathbf{k}) \end{cases} \quad (6.91)$$

As equações perturbadas tornam-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2\phi + 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\phi) = -4\pi Ga^2 \sum_{j=1}^N \tilde{\rho}_{(j)}\delta_{(j)} \\ \delta'_{(1)} + 3\mathcal{H}(c_{s,(1)}^2 - w_{(1)})\delta_{(1)} + (1 + w_{(1)})(\theta_{(1)} - 3\phi') = 0 \\ \theta'_{(1)} + \mathcal{H}(1 - 3c_{s,(1)}^2)\theta_{(1)} - k^2\phi - \frac{k^2c_{s,(1)}^2}{(1+w_{(1)})}\delta_{(1)} = 0 \\ \vdots \\ \delta'_{(n)} + 3\mathcal{H}(c_{s,(n)}^2 - w_{(n)})\delta_{(n)} + (1 + w_{(n)})(\theta_{(n)} - 3\phi') = 0 \\ \theta'_{(n)} + \mathcal{H}(1 - 3c_{s,(n)}^2)\theta_{(n)} - k^2\phi + \frac{k^2c_{s,(n)}^2}{(1+w_{(n)})}\delta_{(n)} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Primeiro fluido} \\ \vdots \\ n\text{-ésimo fluido} \end{array} \quad (6.92)$$

Para que a solução numérica dessas equações possa ser realizada, é necessário determinar as condições iniciais. Quando o modelo cosmológico em questão tende a ter um comportamento tipo Λ CDM no passado, existe um procedimento comum na literatura para obtenção de vínculos iniciais (FABRIS; SHAPIRO; SOLÀ, 2007; BORGES et al., 2008; REIS, 2007; HIPÓLITO-RICALDI; VELTEN; ZIMDAHL, 2010; VELTEN; WAMBA, 2012). Este procedimento consiste em assumir um power spectrum primordial invariante de escala ($P \sim k$) e utilizar a função de transferência BBKS, conforme Bardeen et al. (1986), para calcular o power spectrum atual. Como o o modelo Λ CDM prediz muito bem o power spectrum atual, ele é utilizado nas Eqs.(6.92) para realizar uma integração reversa no tempo até um redshift no passado da ordem de $z \sim 10^2$. A escolha de z inicial não deve afetar o resultado final do power spectrum desde que seja assegurado que o valor esteja num regime de domínio de matéria. Nesse redshift, toma-se as variáveis perturbadas do Λ CDM que são utilizadas como condição inicial na integração das variáveis perturbadas de outros modelos.

Acontece que tal método depende da eficácia do cálculo do power spectrum atual oriundo da função de transferência BBKS. Atualmente, existem códigos numéricos que calculam a função de transferência com precisão bastante alta. Aqui, chamamos atenção ao CAMB⁴ (LEWIS; CHALLINOR; LASENBY, 2000) e o CLASS⁵ (LESGOURGUES,

⁴ <<http://camb.info/>>

⁵ <<http://class-code.net/>>

2011a), que foram desenvolvidos em linguagens de programação diferentes mas que retornam resultados equivalentes (LESGOURGUES, 2011b). Tais softwares resolvem as equações de Boltzmann oriundas dos processos físicos que ocorrem desde o final do período inflacionário até o regime atual. A vantagem da utilização do software em detrimento da função de transferência, é que, com ele, é possível acessar as variáveis perturbadas em qualquer período cosmológico. Em contrapartida, a função de transferência fornece apenas o power spectrum de matéria no tempo atual, sendo necessário realizar aproximações para obter o valor das as outras variáveis perturbadas, e , depois disso, realizar um integração inversa até o redshift de interesse, utilizando o modelo Λ CDM.

O CLASS foi executado utilizando um modelo Λ CDM fiducial: $h = 0.68$, $\Omega_{b0} = 0.047$, $\Omega_{c0} = 0.25$ e $\Omega_{r0} = 9.24 \times 10^{-5}$ (PLANCK Collaboration et al., 2001). Para tomar as condições iniciais em um redshift adequado, precisamos obter um período em que a dinâmica cósmica para ambos os modelos dependa apenas da matéria tipo poeira. Nesse regime, o tempo deve ser tardio o suficiente para que a contribuição da radiação seja negligenciável ao passo que suficientemente cedo para desprezar os efeitos de aceleração cósmica. Para encontrar tal intervalo, estudamos como evolui a razão de densidades radiação/matéria (ρ_r/ρ_m) e constante cosmológica/matéria (ρ_Λ/ρ_m) ao longo do tempo conforme, de acordo com as densidades fornecidas pelo CLASS. Como pode ser observado na Fig. 25, no intervalo $6 \text{ Gy} < \eta < 20 \text{ Gy}$,⁶ a densidade de matéria é mais que 100 vezes maior que a densidade da radiação ou da constante cosmológica. Portanto, vamos tomar as variáveis perturbadas no tempo conforme $\eta_{ini} = 6 \text{ Gy}$, que remete ao redshift $z_{ini} = 56.4$. Esse valor destoa um pouco daquele utilizado na literatura de $z \approx 500$ (FABRIS; SHAPIRO; SOLÀ, 2007; HIPÓLITO-RICALDI; VELTEN; ZIMDAHL, 2010; VELTEN; WAMBA, 2012). Nesse redshift, a densidade da radiação é cerca de 9% da densidade de matéria. Apesar de ser baixo, consideramos tal valor significativo preferindo o valor $z_{ini} = 56.4$ à $z \approx 500$.

6.3.1 Equações Perturbadas dos Modelos Cosmológicos

Pela definição do modelo Λ CDM dada no Cap. 5, temos três componentes: matérias bariônica e escura, com $w = 0$, e constante cosmológica com $w = -1$. Vamos adotar o índice subscripto “ b ” para as variáveis da matéria bariônica, “ c ” para a matéria escura e “ Λ ” para constante cosmológica. As perturbações associadas a constante cosmológica são nulas. Em contrapartida, a evolução das perturbações $\delta_b, \theta_b, \delta_c, \theta_c$ e ϕ dependem da evolução das variáveis de background $\tilde{\rho}_b, \tilde{\rho}_c, \tilde{\rho}_\Lambda$ e a . Por isso, devemos resolver as equações de background simultaneamente as equações perturbadas (6.92):

⁶ Gy é a abreviação para *gigayears*, que equivale a 1 bilhão de anos.

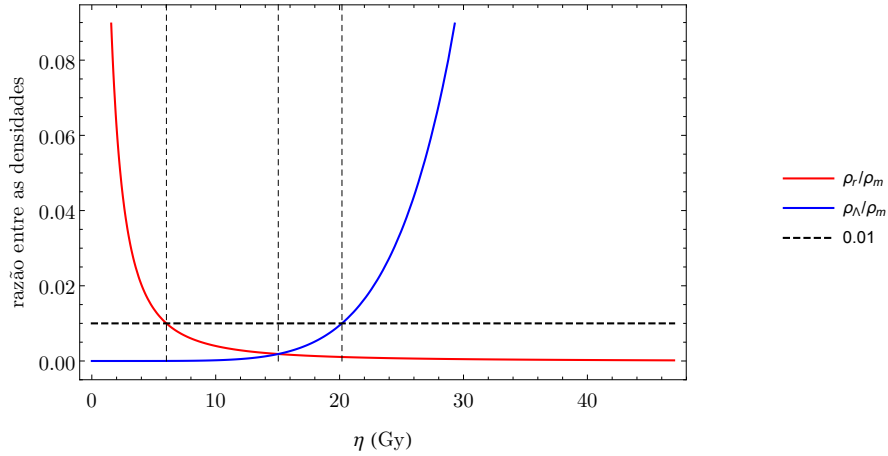


Figura 25 – Comportamento da razão entre as densidades ρ_r/ρ_m e ρ_Λ/ρ_m onde ρ_m leva em consideração tanto a contribuição bariônica quanto a de matéria escura:

$$\rho_m = \rho_b + \rho_c.$$

Fonte: Do autor.

Modelo Λ CDM

$$\begin{aligned}
 a' &= a\mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}} \\
 k^2\phi + 3\mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}}(\phi' + \mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}}\phi) &= -4\pi G a^2 (\tilde{\rho}_b\delta_b + \tilde{\rho}_c\delta_c) \\
 \tilde{\rho}_b' &= -3\mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}}\tilde{\rho}_b \\
 \delta_b' + \theta_b - 3\phi' &= 0 \\
 \theta_b' + \mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}}\theta_b - k^2\phi &= 0 \\
 \tilde{\rho}_c' &= -3\mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}}\tilde{\rho}_c \\
 \delta_c' + \theta_c - 3\phi' &= 0 \\
 \theta_c' + \mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}}\theta_c - k^2\phi &= 0 \\
 \tilde{\rho}_\Lambda' &= 0 \\
 \delta_\Lambda' &= 0 \\
 \delta_\Lambda &= 0
 \end{aligned} \tag{6.93}$$

com a função de Hubble no tempo conforme sendo definida por:

$$\mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}} = a\sqrt{\frac{8\pi G}{3} [\tilde{\rho}_b(a) + \tilde{\rho}_c(a) + \tilde{\rho}_\Lambda(a)]}. \tag{6.94}$$

Note que algumas das equações, como por exemplo $\tilde{\rho}_b' = -3\mathcal{H}_{\Lambda\text{CDM}}\tilde{\rho}_b$, estão desacopladas e poderiam ser resolvidas analiticamente, ou ao menos, de maneira isolada. Contudo, essa é uma particularidade da componente bariônica presente no modelo Λ CDM. Para casos gerais, não é possível garantir que a equação de fluido seja resolvida analiticamente.

Logo, com o intuito de padronização de procedimento, decidimos considerar a equação de conservação covariante do tensor energia como uma componente do sistema de equações diferenciais acopladas.

Para o Modelo Unificado, a evolução das perturbações relacionadas a matéria bariônica e componente unificada é guiada pelas equações:

Modelo Unificado

$$\begin{aligned}
 a' &= a\mathcal{H}_{\text{UM}} \\
 k^2\phi + 3\mathcal{H}_{\text{UM}}(\phi' + \mathcal{H}_{\text{UM}}\phi) &= -4\pi G a^2 (\tilde{\rho}_b\delta_b + \tilde{\rho}_u\delta_u) \\
 \tilde{\rho}'_b &= -3\mathcal{H}_{\text{UM}}\tilde{\rho}_b \\
 \delta'_b + \theta_b - 3\phi' &= 0 \\
 \theta'_b + \mathcal{H}_{\text{UM}}\theta_b - k^2\phi &= 0 \\
 \tilde{\rho}'_u &= -3\mathcal{H}_{\text{UM}}\tilde{\rho}_u(1 + w_u) \\
 \delta'_u + 3\mathcal{H}_{\text{UM}}(c_{s,u}^2 - w_u)\delta_u + (1 + w_u)(\theta_u - 3\phi') &= 0 \\
 \theta'_u + \mathcal{H}_{\text{UM}}\left(1 - 3c_{s,u}^2\right)\theta_u - k^2\phi - \frac{k^2c_{s,u}^2}{(1+w_u)}\delta_u &= 0
 \end{aligned}
 \tag{6.95}$$

em que:

$$\mathcal{H}_{\text{UM}} = a\sqrt{\frac{8\pi G}{3}[\tilde{\rho}_b(a) + \tilde{\rho}_u(a)]}. \tag{6.96}$$

O próximo passo consiste em tomar as variáveis perturbadas $\delta_b^{CI}, \delta_c^{CI}, \theta_b^{CI}, \theta_c^{CI}$ e ϕ^{CI} , fornecidas pelo CLASS em $z = 56.4$. No modelo Λ CDM, esses valores já são as condições iniciais para as variáveis perturbadas contidas na Eq.(6.93). Para as variáveis de background, $\tilde{\rho}_b$ e $\tilde{\rho}_c$, as condições são tais que, no fator de escala $a = 1$, elas assumam valores que reproduzam os parâmetros de densidade que obtivemos da análise de background ($\Omega_{b0} = 0.048$ e $\Omega_{c0} = 0.268$, contidos na Tab. 9).

No UM, as condições iniciais para as variáveis de background devem estar de acordo com as estimativas paramétricas $\Omega_{b0} = 0.045$ e $\Omega_{u0} = 1 - \Omega_{b0} = 0.955$, presentes na Tabela 9. Para as variáveis perturbadas, é necessário realizar um cálculo para obter as condições iniciais da componente unificada. No Λ CDM, o análogo da componente unificada é dado pela soma das contribuições de matéria e energia escuras. A perturbação no gradiente de velocidade será dado trivialmente por $\theta_u^{CI} = \theta_c^{CI} + \theta_\Lambda^{CI}$. Todavia, como as perturbações da constante cosmológica são nulas, temos:

$$\theta_u^{CI} = \theta_c^{CI}. \tag{6.97}$$

Do mesmo modo, a perturbação na densidade de energia seria $\delta\rho_u = \delta\rho_c + \delta\rho_\Lambda$. Como não existem perturbações na densidade de energia da constante cosmológica, torna-se válida a

associação $\delta\rho_u = \delta\rho_c$. Escrevendo em termos dos contrastes de densidade:

$$\delta_u^{CI} = \frac{\delta\rho_u}{\rho_u(z=56.4)} = \frac{\rho_c(z=56.4)}{\rho_c(z=56.4) + \rho_\Lambda(z=56.4)} \delta_c^{CI} = \delta_c^{CI}, \quad (6.98)$$

onde consideramos o fato de que a densidade de energia da constante cosmológica é irrelevante para grandes redshifts, $\rho_\Lambda(z=56.4) \ll \rho_c(z=56.4)$.

Definidas as condições iniciais, integra-se as Eqs.(6.93) e (6.95) do redshift 56.4 até 0 para valores de escala no intervalo entre $0.001 \text{ Mpc}^{-1} < k < 0.5 \text{ Mpc}^{-1}$. As evoluções do quadrado das variáveis δ_b , δ_c e ϕ ao longo do tempo conforme η estão ilustradas na Fig. 27, 28 e 29 para oito modos de Fourier distintos. Para realizar comparações entre as variáveis perturbadas δ_u e θ_u do Modelo Unificado com as quantidades δ_c e θ_c do Λ CDM, definiu-se para o Λ CDM as variáveis unificadas efetivas de acordo com $\delta_u^{\Lambda\text{CDM}} \equiv \frac{\rho_c}{\rho_c + \rho_\Lambda} \delta_c$ e $\theta_u^{\Lambda\text{CDM}} \equiv \theta_c$. Com isso, foi possível obter os gráficos da Fig. 30 que fornece o quadrado de δ_u ao longo do tempo; e os da Fig. 31 que exhibe a evolução temporal do quadrado de θ_u .

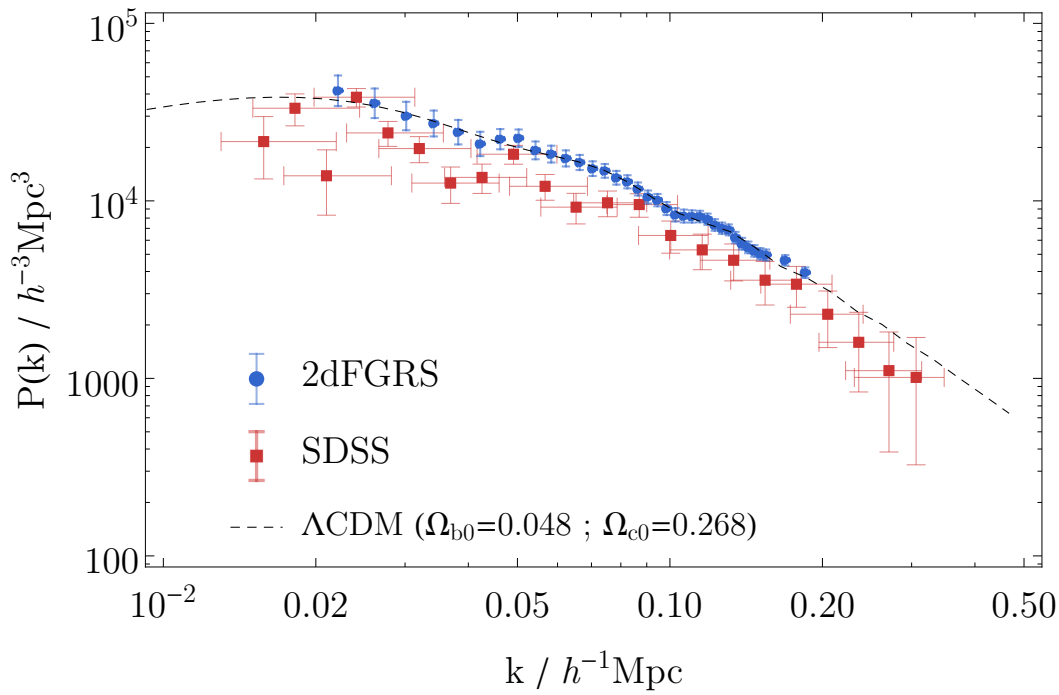
Com os gráficos da Fig. 27, nota-se que o potencial gravitacional para o Λ CDM, obtido da solução das Eqs. (6.93) segue de perto a evolução de ϕ fornecida pelo CLASS. Obviamente, isso não é surpreendente pois em ambos os casos são considerados o mesmo modelo. Em todas as escalas analisadas, o potencial gravitacional é aproximadamente constante para valores baixos de η , durante o período de domínio de matéria de ambos os modelos. Apesar de, nesse regime, o valor de ϕ no UM estar em um valor diferente daquele do Λ CDM, os modelos cosmológicos são equivalentes pois aparecem estabilizados. No entanto, a medida que o tempo cosmológico avança, o comportamento do potencial gravitacional do UM cresce exponencialmente e se torna distinto do comportamento de ϕ segundo o modelo Λ CDM. Quanto maior a escala (menores valores de k), mais tardio será o início da desestabilização de ϕ no Modelo Unificado. Este é um indicativo de que, a nível perturbativo, o Modelo Unificado equivale ao Λ CDM somente em escalas muito grandes.

Para o contraste de densidade de matéria bariônica, na Fig. 28, ambos os modelos são equivalentes em larga escala ($k < 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$). A medida que se considera escalas menores no Modelo Unificado, temos um desvio na evolução de δ_b^2 que apresenta um comportamento crescente muito incisivo, diferentemente da evolução de δ_b^2 do Λ CDM, que se caracteriza por uma expansão polinomial. Tal resultado se replica na evolução do contraste de densidade δ_u das componentes escuras unificadas, que pode ser visualizado na Fig. 30.

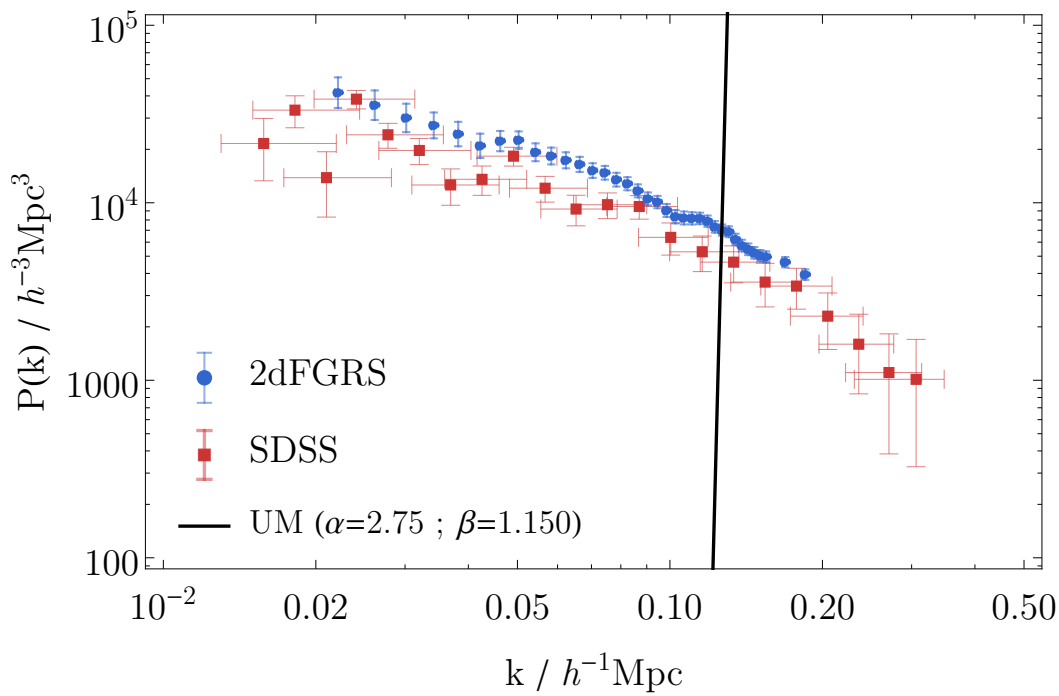
O comportamento de θ_b para a componente bariônica é bem distinto nos dois modelos, mesmo em larga escala. Para valores de tempos mais avançados, essa discrepância se agrava ainda mais, visto que θ_b do UM desestabiliza e passa a crescer exponencialmente com o tempo, enquanto que θ_b se mantém em crescimento polinomial. Interpretações semelhantes surgem da análise dos comportamentos do divergente da velocidade das componentes escuras, dados na Fig. 31.

O power spectrum de matéria de cada modelo, c.f. Eqs. (6.87) e (6.89), está na Fig. 26. Conforme já comentado, o comportamento de δ_b no Modelo Unificado é instável para grandes valores de η . Consequentemente, o power spectrum de matéria (que é dado no tempo atual), quando calculado a partir dos dados do UM, é igualmente instável, conforme mostra Fig. 26b. Em contrapartida, o power spectrum do modelo Λ CDM ajusta-se da maneira satisfatória aos dados de $P(k)$, conforme Fig. 26a. Vale lembrar que, nesse caso, o valor do bias factor b^2 – c.f. Eq.(6.89) – foi escolhido de modo a proporcionar um bom ajuste visual.

A guisa de comparação, o procedimento foi aplicado também a um modelo de quartessência do tipo gás de Chaplygin, conforme descrito na Sec. 3.1.1. Os resultados são apresentados no Apêndice E. Conforme ilustrado na Fig. 39, o power spectrum oriundo do GCG descreve os dados de $P(k)$ do 2dFGRS e SDSS de maneira satisfatória. Nesse sentido, o fato do Modelo Unificado não reproduzir power spectrum de matéria não é um problema associado ao procedimento de descrição cósmica via componentes unificadas, mas sim da forma funcional particular escolhida para o nosso modelo fenomenológico.



(a)



(b)

Figura 26 – Power Spectrum de matéria no (a) Modelo ΛCDM ; e (b) Modelo Unificado. No caso do UM, o power spectrum se mostra completamente instável, aparecendo como uma linha vertical preta, sem qualquer relação com os dados de $P(k)$ do 2dFGRS e do SDSS.

Fonte: Do autor.

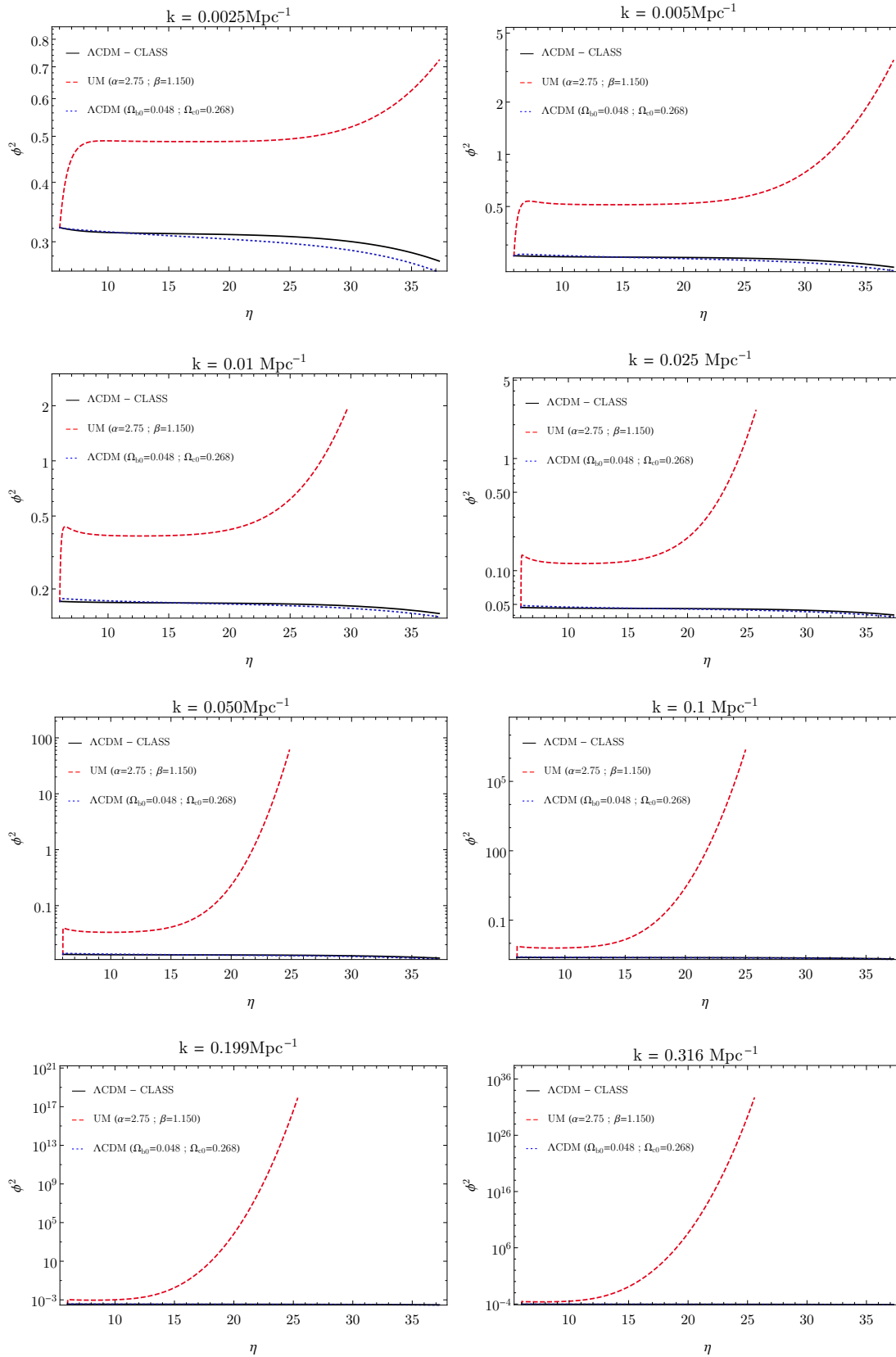


Figura 27 – Quadrado do potencial gravitacional para oito modos de Fourier no intervalo $0.0025 \text{ Mpc}^{-1} < k < 0.32 \text{ Mpc}^{-1}$. Os resultados obtidos para os dois modelos são comparados com aqueles fornecidos pelo CLASS.

Fonte: Do autor.

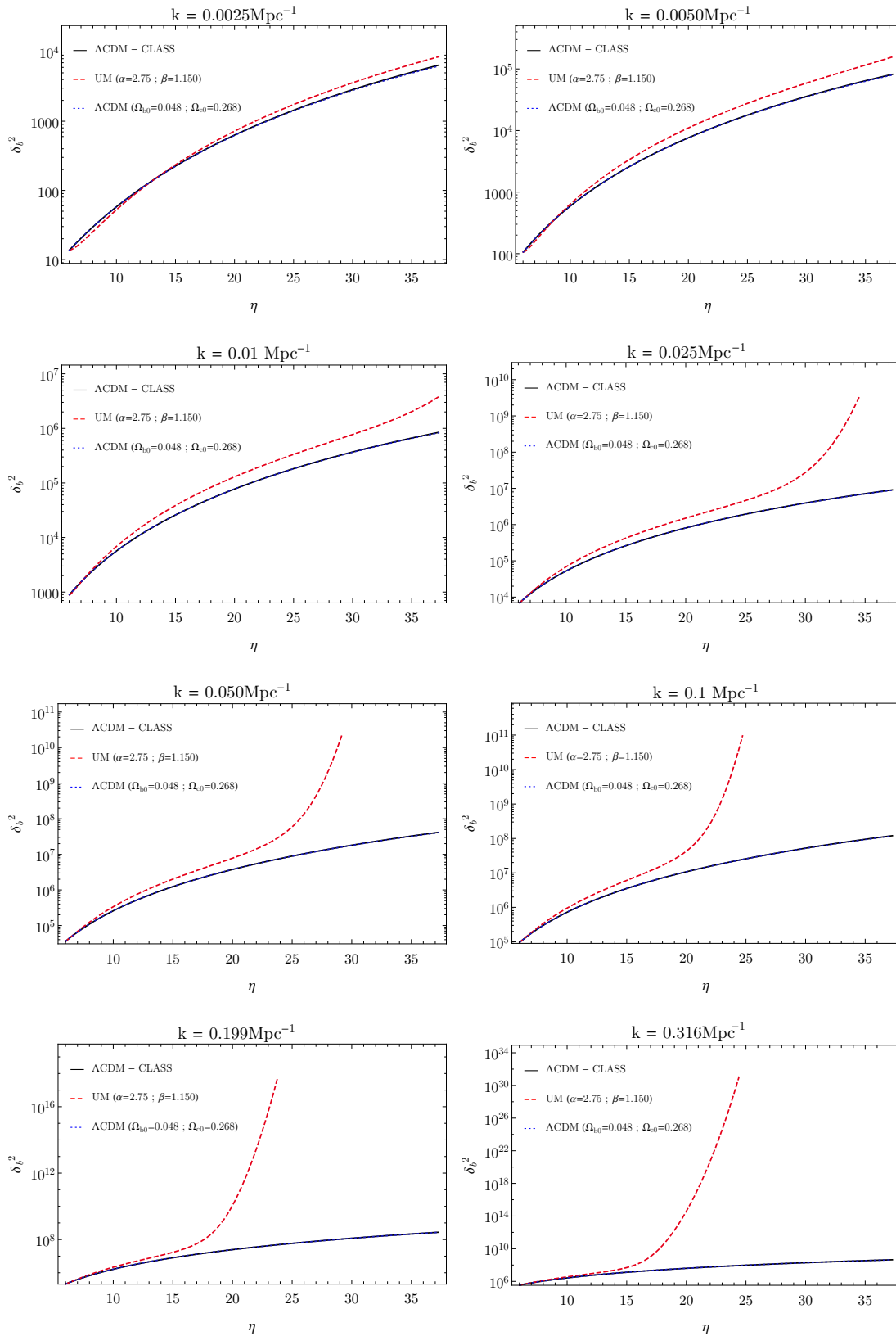


Figura 28 – Quadrado do contraste de densidade de bárions para diversos modos de Fourier.

Fonte: Do autor.

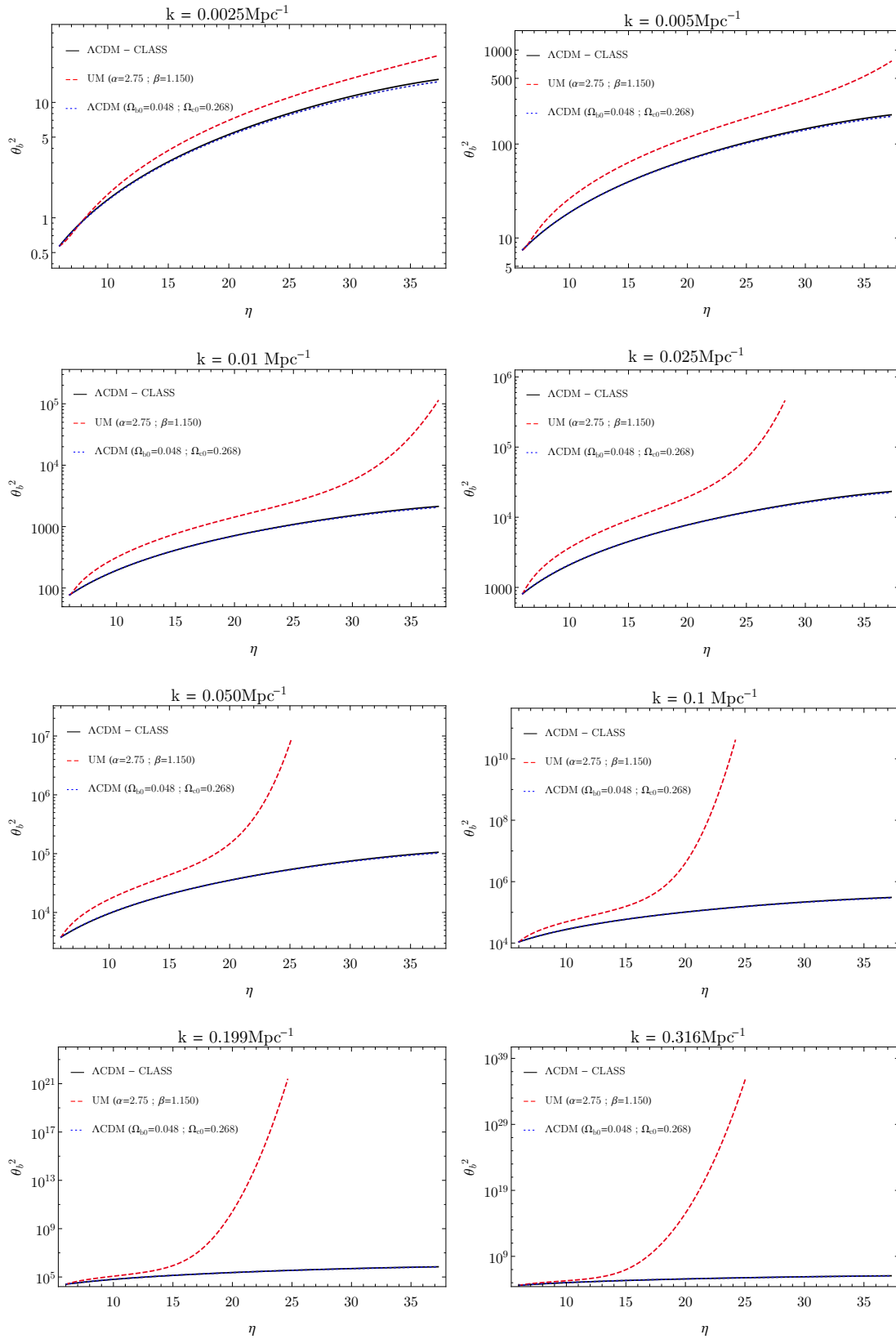


Figura 29 – Quadrado do divergente de velocidade bárions para oito modos de Fourier.
Fonte: Do autor.

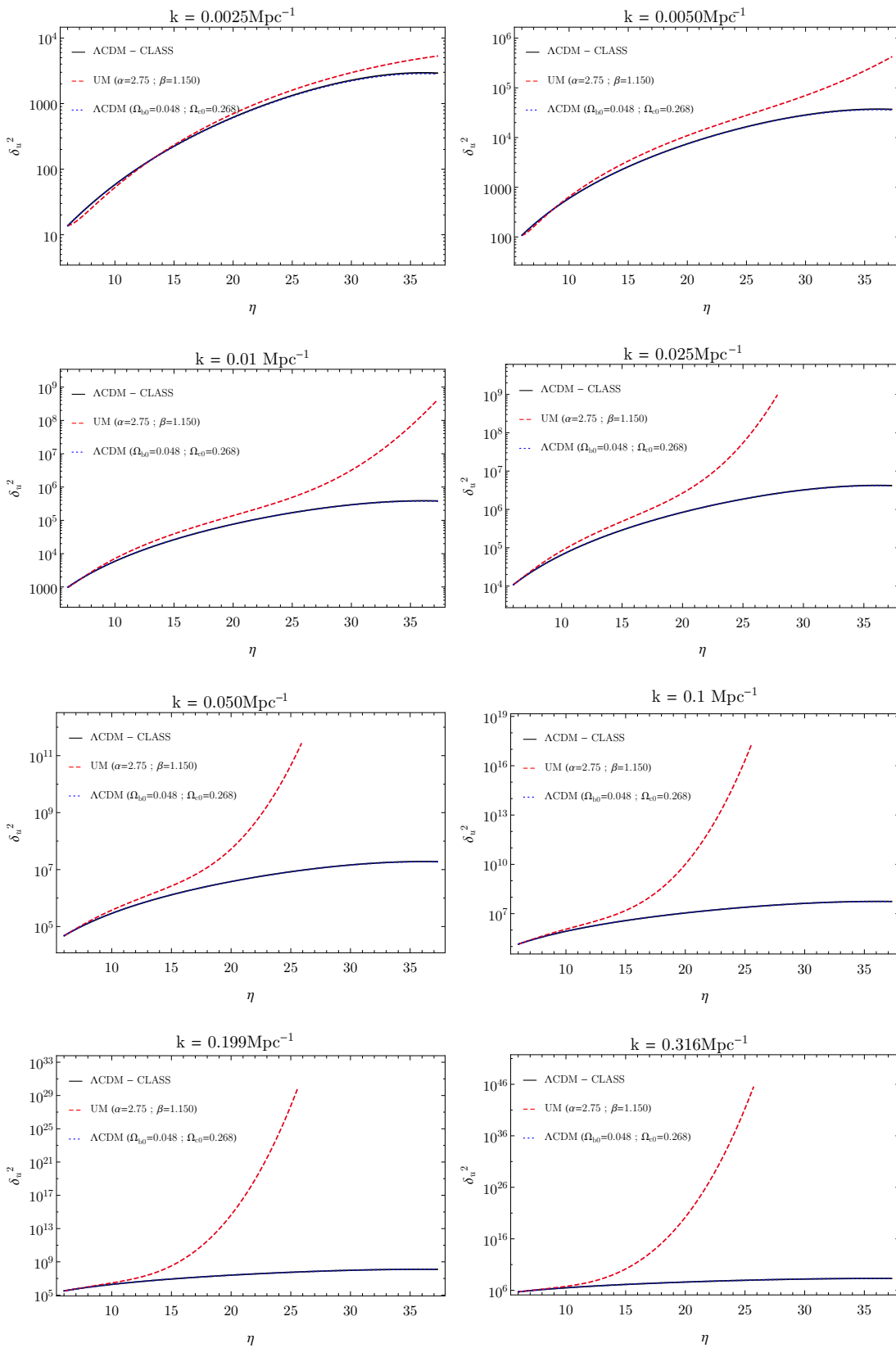


Figura 30 – Quadrado do contraste de densidade da componente unificada para diversos modos de Fourier. No ΛCDM , δ_u é uma variável efetiva dada por $\delta_u^{\Lambda\text{CDM}} \equiv$

$$\frac{\rho_c}{\rho_c + \rho_\Lambda} \delta_c.$$

Fonte: Do autor.

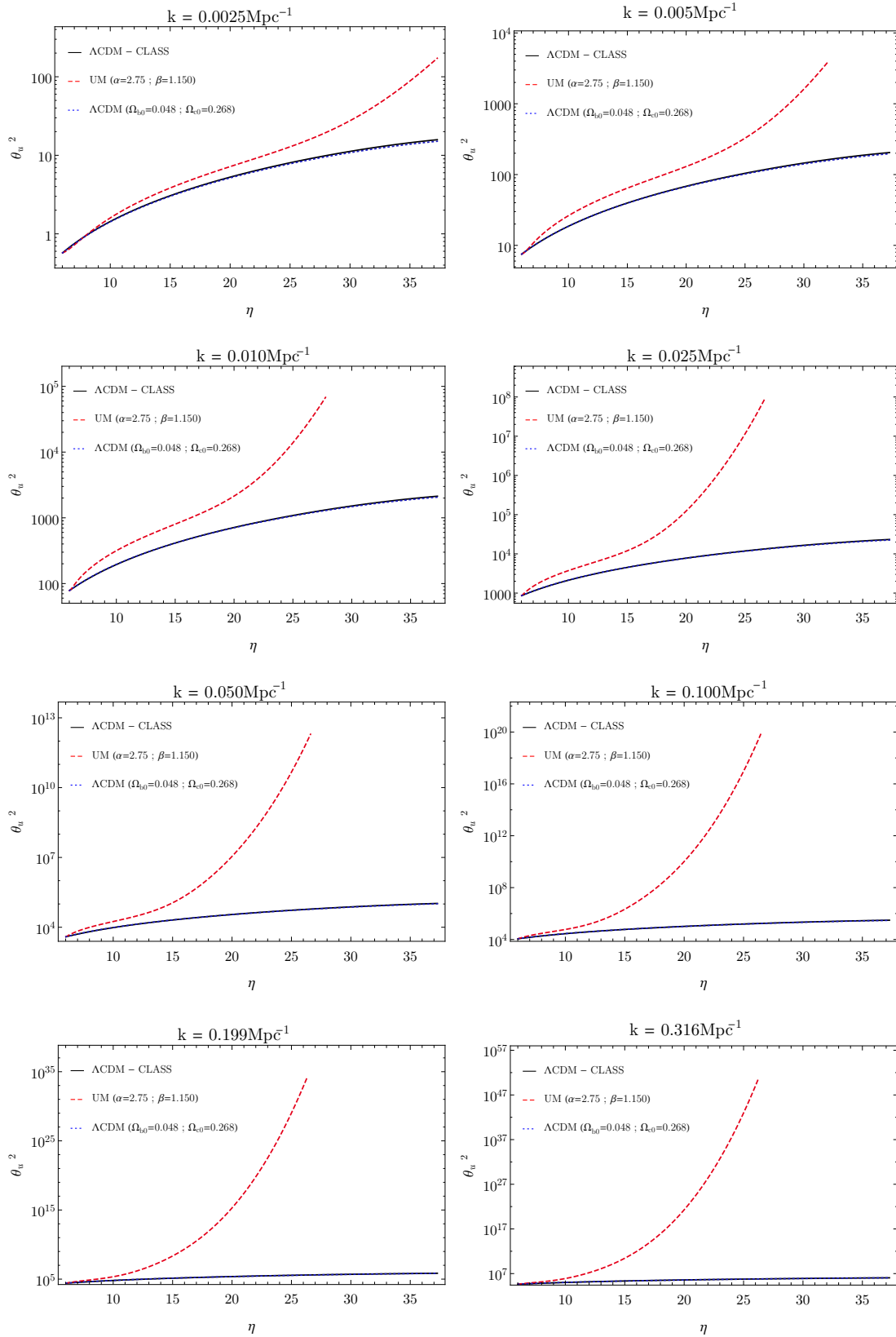


Figura 31 – Quadrado do divergente da velocidade da componente unificada para oito valores de escala contidas no intervalo $0.0025 \text{Mpc}^{-1} < k < 0.32 \text{Mpc}^{-1}$. Para o Λ CDM, temos $\theta_u^{\Lambda\text{CDM}} = \theta_c$.

Fonte: Do autor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados cosmológicos mostram que habitamos em um universo composto de 95% de componentes desconhecidas. Estas, por sua vez, são inferidas pela existência de efeitos gravitacionais que não podem ser relacionados a nenhum dos fenômenos associados as quatro interações fundamentais conhecidas. O modelo cosmológico padrão aponta duas componentes distintas para compor esse setor escuro: a matéria escura, necessária para a compreensão da formação das estruturas cósmicas e curvas de velocidade de rotação das galáxias; e a energia escura, responsável pela aceleração cósmica atual.

Um importante setor da pesquisa em cosmologia se empenha em encontrar uma componente unificada capaz de explicar esses dois comportamentos. Tal tarefa pode apresentar motivações filosóficas, teóricas ou fenomenológicas. Nesse trabalho, estudamos um modelo fenomenológico que unifica termodinamicamente os comportamentos de matéria e energia escura, gerando uma equação de estado, parametrizada em termos da função \arctan . Para testar a sua viabilidade, o modelo teve seus parâmetros ajustados com a utilização de dados observacionais, dentre eles destacamos os de supernovas do tipo Ia, explosões de raios gamma, oscilações acústicas de bárions, medições direta do parâmetro de Hubble e nucleossíntese primordial. No fim, estudamos também os efeitos desse modelo unificado fenomenológico na estrutura cosmológica não homogênea usando teoria de perturbações.

Na primeira parte desse texto, abordamos o nosso modelo fenomenológico unificado sob um ótica de background. Partindo da hipótese de isotropia e homogeneidade espacial, derivamos as equações de Friedmann. Tais equações foram as ferramentas necessárias para o estudo cosmológico de modelos de universo compostos por equações de estado de tipo $p(z) = w(z)\rho(z)$. Aplicado a um caso geral, resolvemos as equações da dinâmica cósmica para definir formalmente o modelo cosmológico padrão, ou Λ CDM.

O Cap. 3 mostra que o modelo Λ CDM apresenta incoerências, fato esse que justifica o estudo de modelos cosmológicos alternativos. Uma possibilidade são os modelos de quartessência, que consistem em adotar uma componente escura que unifica os comportamentos de matéria escura e energia escura como proposta de solução do problema da coincidência cósmica. Após uma revisão bibliográfica de componentes quartessenciais, um modelo fenomenológico parametrizado em termos da função \arctan é apresentado (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

Para testar a qualidade do Modelo Unificado em detrimento do modelo cosmológico padrão, foi necessária a utilização de vários conjuntos de dados observacionais obtidos de formas distintas, conforme comentado no Cap. 5. As técnicas estatísticas necessárias para esse estudo foram apresentadas no Cap. 4 e permitiram calcular a função de distribuição de probabilidades do Modelo Unificado e do Λ CDM em termos dos parâmetros cosmológicos.

Com as funções de distribuição de probabilidades, foram obtidas a configuração paramétrica de melhor ajuste dos modelos aos dados, as estimativas uniparamétrica para cada um dos parâmetros do modelo e os gráficos de mancha indicando as PDFs marginais, tomadas a cada combinação de dois parâmetros. Verificou-se que os modelos MU e Λ CDM são equivalentes em essência (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016). A escala de Jeffrey selecionou o modelo unificado em detrimento do Λ CDM como aquele modelo que melhor se ajusta aos diversos conjuntos de dados disponíveis, mas com uma evidência bastante fraca.

Na parte final do trabalho, testamos se o fato da evidência para o UM ser maior do que a evidência para o Λ CDM é um indicativo real da qualidade superior do nosso modelo, ou se isso aparece como fruto de um acaso estatístico. Para tanto, estudamos no Cap. 6 a teoria de perturbações cosmológicas. Como a dinâmica de evolução das variáveis perturbadas é muito mais sensível ao modelo cosmológico do que as variáveis de background, tal estudo pode fornecer informações importantes sobre a viabilidade de modelos. Reproduzir o power spectrum de matéria mensurados pelos surveys 2dFGRS e SDSS é requisito necessário para consolidação de um modelo cosmológico. Nesse estudo, a evolução do Modelo Unificado se mostrou altamente instável, incapaz de descrever o processo de formação de estruturas.

A conclusão imediata é de que o Modelo Unificado, mesmo estando de acordo com os dados de cosmologia de background, não é uma alternativa viável ao modelo Λ CDM. Esse resultado é consequência direta do fato de que o UM foi concebido para reproduzir um comportamento de largas escalas. Verifica-se no Apêndice E que o modelo de unificação pelo Gás de Chaplygin é capaz de reproduzir o power spectrum de matéria. Isso nos leva a concluir que o fato de UM não predizer o power spectrum não está atrelado a uma característica intrínseca a todos os modelos quartessenciais, mas sim, à forma funcional da componente unificada empregada.

O possível próximo passo no contexto desse trabalho é um estudo teórico buscando delimitar quais são os fatores que impedem a evolução das perturbações do UM de estarem de acordo com o processo de formação de estruturas. Uma hipótese atualmente considerada é de que a velocidade com que w_u tende a zero a medida que olhamos ao passado seja de importância bem elevada. Com esse estudo será possível delimitar famílias de funções $w_u(z)$ que definem modelo unificados coerentes com o processo de formação das estruturas.

REFERÊNCIAS

LESGOURGUES, Julien. Nenhuma citação no texto.

ADAMS, J. F. The detectability of deuterium lyman alpha in QSOs. *A&A*, v. 50, p. 461, 1976. Citado na página 80.

ADLER, R. J.; CASEY, B.; JACOB, O. C. Vacuum catastrophe: an elementary exposition of the cosmological constant problem. *American Journal of Physics*, v. 63, p. 620–626, 1995. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1995AmJPh..63..620A>>. Acesso em: 28 jan. 2016. Citado na página 53.

AKERIB, D. et al. The large underground xenon (lux) experiment. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, v. 704, p. 111 – 126, 2013. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168900212014829>>. Acesso em: 17 abr. 2016. Citado na página 53.

AKERIB, D. S. et al. First results from the lux dark matter experiment at the sanford underground research facility. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 112, p. 091303, 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.091303>>. Acesso em: 30 abr. 2016. Citado na página 53.

AKIMA, H. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *J. ACM*, v. 17, n. 4, p. 589–602, 1970. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/321607.321609>>. Acesso em: 16 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 181.

ALDROVANDI, R.; CUZINATTO, R.; MEDEIROS, L. Analytic solutions for the Λ -FRW model. *Foundations of Physics*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 36, n. 11, p. 1736–1752, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10701-006-9076-6>>. Acesso em: 16 fev. 2016. Citado na página 44.

ALPHER, R. A.; BETHE, H.; GAMOW, G. The origin of chemical elements. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 73, p. 803–804, 1948. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.73.803>>. Acesso em: 27 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 37.

AMANULLAH, R. et al. Spectra and Hubble space telescope light curves of six type Ia supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the union2 compilation. *The Astrophysical Journal*, v. 716, n. 1, p. 712, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/716/i=1/a=712>>. Acesso em: 5 jan. 2016. Citado na página 82.

AMATI, L. et al. Intrinsic spectra and energetics of BeppoSAX gamma-ray bursts with known redshifts. *A&A*, v. 390, n. 1, p. 81–89, 2002. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20020722>>. Acesso em: 20 abr. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 88.

AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark energy: theory and observations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 134.

ANDERSON, L. et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 427, n. 4, p. 3435–3467, 2012. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/427/4/3435.abstract>>. Acesso em: 5 mar. 2016. Citado na página 94.

ANDRADE, A. P. de A. *Análise do modelo de mistura não gaussiana para o campo de flutuações da Radiação Cósmica de Fundo*. 2004. 226f. Tese (Doutorado em Astrofísica) – INPE. São José dos Campos, Brasil, 2004. Citado na página 134.

ANGLE, J. et al. First results from the xenon10 dark matter experiment at the gran sasso national laboratory. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 100, p. 021303, 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.021303>>. Acesso em: 18 mar. 2016. Citado na página 53.

ANGLE, J. et al. Limits on spin-dependent wimp-nucleon cross sections from the xenon10 experiment. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 101, p. 091301, 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.091301>>. Acesso em: 2 mar. 2016. Citado na página 53.

APRILE, E. et al. Dark matter results from 225 live days of XENON100 data. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 109, p. 181301, 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.181301>>. Acesso em: 1 fev. 2016. Citado na página 53.

APRILE, E. et al. The XENON100 Dark Matter experiment. *Astroparticle Physics*, v. 35, n. 9, p. 573 – 590, 2012. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927650512000059>>. Acesso em: 7 mai. 2016. Citado na página 53.

ASTIER, P. et al. The supernova legacy survey: measurement of ω_m , ω_Λ and w from the first year data set. *A&A*, v. 447, n. 1, p. 31–48, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20054185>>. Acesso em: 22 mar. 2016. Citado na página 82.

BÖRNER, G.; SEILER, E. Problems with the concept of the inflationary universe. *Adv. Space. Res.*, v. 3, p. 441, 1994. Citado na página 24.

BARDEEN, J. et al. The statistics of peaks of Gaussian random fields. *The Astrophysical Journal*, v. 304, p. 15–61, 1986. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1986TheAstrophysicalJournal...304...15B>>. Acesso em: 12 fev. 2016. Citado na página 136.

BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 22, p. 1882–1905, 1980. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.1882>>. Acesso em: 8 jan. 2016. Citado na página 113.

BATTYE, R. A.; MOSS, A. Evidence for massive neutrinos from Cosmic Microwave Background and lensing observations. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 112, p. 051303, 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.051303>>. Acesso em: 20 mar. 2016. Citado na página 77.

BAUDIS, L. The XENON10 WIMP search experiment at the Gran Sasso Underground Laboratory. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 65, n. 1, p. 012015, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1742-6596/65/i=1/a=012015>>. Acesso em: 10 abr. 2016. Citado na página 53.

BAUMANN, D. Cosmology, part iii mathematical tripos. *University lecture notes*, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 46, 48 e 52.

BAUMONT, S. et al. Photometry assisted spectral extraction (phase) and identification of snls supernovae. *A&A*, v. 491, n. 2, p. 567–585, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:200810210>>. Acesso em: 14 jan. 2016. Citado na página 82.

BEKENSTEIN, J. D. Relativistic Gravitation Theory for the modified Newtonian dynamics paradigm. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 083509, 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.083509>>. Acesso em: 14 abr. 2016. Citado na página 39.

BENNETT, C. L. et al. Four-year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations: maps and basic results. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 464, n. 1, p. L1, 1996. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-4357/464/i=1/a=L1>>. Acesso em: 4 jan. 2016. Citado na página 37.

BENNETT, C. L. et al. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 208, n. 2, p. 20, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0067-0049/208/i=2/a=20>>. Acesso em: 2 mar. 2016. Citado 5 vezes nas páginas 37, 77, 81, 93 e 94.

BENNETT, C. L. et al. The 1% concordance Hubble Constant. *The Astrophysical Journal*, v. 794, n. 2, p. 135, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/794/i=2/a=135>>. Acesso em: 4 fev. 2016. Citado na página 75.

BENTO, M. C.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 66, p. 043507, 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.043507>>. Acesso em: 12 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.

BERINGER, J. Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 86, p. 010001, 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.010001>>. Acesso em: 16 jan. 2016. Citado na página 93.

BERTACCA, D.; BARTOLO, N.; MATARRESE, S. Unified Dark Matter scalar field models. *Advances in Astronomy*, v. 2010, p. 904379, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1155/2010/904379>>. Acesso em: 20 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 60.

BERTACCA, D. et al. Unified Dark Matter scalar field models with fast transition. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2011, n. 02, p. 018, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2011/i=02/a=018>>. Acesso em: 13 fev. 2016. Citado na página 25.

- BEUTLER, F. et al. The 6dF Galaxy Survey: baryon acoustic oscillations and the local Hubble Constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 416, n. 4, p. 3017–3032, 2011. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/416/4/3017.abstract>>. Acesso em: 4 jan. 2016. Citado na página 94.
- BILIĆ, N.; TUPPER, G. B.; VIOLLIER, R. D. Unification of Dark Matter and Dark Energy: the inhomogeneous Chaplygin gas. *Physics Letters B*, v. 535, n. 1–4, p. 17 – 21, 2002. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269302017161>>. Acesso em: 17 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- BLAKE, C. et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: joint measurements of the expansion and growth history at $z < 1$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 425, n. 1, p. 405–414, 2012. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/425/1/405.abstract>>. Acesso em: 12 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 97.
- BLAKE, C. et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: mapping the distance–redshift relation with baryon acoustic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 418, n. 3, p. 1707–1724, 2011. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/418/3/1707.abstract>>. Acesso em: 2 jan. 2016. Citado na página 94.
- BORGES, H. A. et al. Evolution of density perturbations in decaying vacuum cosmology. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 77, p. 043513, 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.043513>>. Acesso em: 4 jan. 2016. Citado na página 136.
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 124, p. 925–935, 1961. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925>>. Acesso em: 21 abr. 2016. Citado na página 39.
- BROMM, V.; LOEB, A. The expected redshift distribution of gamma-ray bursts. *The Astrophysical Journal*, v. 575, n. 1, p. 111, 2002. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/575/i=1/a=111>>. Acesso em: 14 fev. 2016. Citado na página 87.
- BRUNI, M.; LAZKOZ, R.; ROZAS-FERNÁNDEZ, A. Phenomenological models for unified Dark Matter with fast transition. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 431, n. 3, p. 2907–2916, 2013. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/431/3/2907.abstract>>. Acesso em: 7 mai. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- BUCHDAHL, H. A. Non-linear lagrangians and cosmological theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 150, n. 1, p. 1–8, 1970. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/150/1/1.abstract>>. Acesso em: 24 jan. 2016. Citado na página 39.
- BUSCA, N. G. et al. Baryon Acoustic Oscillations in the Ly- α forest of BOSS quasars. *Astron. Astrophys.*, v. 552, p. A96, 2013. Citado na página 97.

- CAMPOS, G. C. *Parâmetros cosmológicos e medidas de SNIa: estudando o efeito do acoplamento matéria-energia escura*. Dissertação de Mestrado — Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 65, 66, 81 e 82.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry. An introduction to General Relativity*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 1. Citado na página 28.
- CHEVALLIER, M.; POLARSKI, D. Accelerating universes with scaling Dark Matter. *International Journal of Modern Physics D*, v. 10, n. 02, p. 213–223, 2001. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271801000822>>. Acesso em: 9 jan. 2016. Citado na página 39.
- CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician*, v. 49, n. 4, p. 327–335, 1995. Disponível em: <<http://amstat.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00031305.1995.10476177>>. Acesso em: 6 jan. 2016. Citado na página 101.
- CHUANG, C.-H.; WANG, Y. Modelling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and single-probe measurements of $H(z)$, $D_A(z)$ and $f(z)\sigma_8(z)$ from the sloan digital sky survey dr7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 435, n. 1, p. 255–262, 2013. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/435/1/255.abstract>>. Acesso em: 9 mai. 2016. Citado na página 97.
- COLE, S. et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 362, n. 2, p. 505–534, 2005. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/362/2/505.abstract>>. Acesso em: 26 fev. 2016. Citado na página 134.
- CONTRERAS, C. et al. The Carnegie Supernova Project: first photometry data release of low-redshift type Ia supernovae. *The Astronomical Journal*, v. 139, n. 2, p. 519, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-3881/139/i=2/a=519>>. Acesso em: 27 fev. 2016. Citado na página 82.
- COORAY, A. R.; HUTERER, D. Gravitational lensing as a probe of quintessence. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 513, n. 2, p. L95, 1999. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-4357/513/i=2/a=L95>>. Acesso em: 14 mar. 2016. Citado na página 39.
- CUZINATTO, R.; de MORAIS, E. Software MUFCCosm como ferramenta de estudo dos modelos da cosmologia padrão. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 36, p. 1 – 7, 2014. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172014000100012&nrm=iso>. Acesso em: 13 fev. 2016. Citado na página 39.
- CUZINATTO, R. R.; de MORAIS, E. M.; MEDEIROS, L. G. Observational constraints to a unified cosmological model. *Astroparticle Physics*, v. 73, p. 52 – 61, 2016. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0927650515001279>>. Acesso em: 30 abr. 2016. Citado 20 vezes nas páginas 61, 73, 78, 81, 83, 84, 88, 89, 90, 92, 93, 100, 101, 102, 105, 108, 149, 150, 182 e 185.

DAVIS, T. M. et al. Scrutinizing exotic cosmological models using ESSENCE Supernova Data combined with other cosmological probes. *The Astrophysical Journal*, v. 666, n. 2, p. 716, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/666/i=2/a=716>>. Acesso em: 25 mar. 2016. Citado na página 57.

D'INVERNO, R. *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure*. New York, USA: Oxford University Press, 1992. Citado na página 27.

DODELSON, S. *Modern cosmology*. 1. ed. [S.l.]: Academic Press, 2003. ISBN 0122191412,9780122191411,9780080511979. Citado na página 106.

DVORKIN, C. et al. Neutrinos help reconcile planck measurements with both the early and local universe. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 90, p. 083503, 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.083503>>. Acesso em: 11 mar. 2016. Citado na página 77.

EFSTATHIOU, G. H_0 revisited. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 440, n. 2, p. 1138–1152, 2014. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/440/2/1138.abstract>>. Acesso em: 28 mar. 2016. Citado na página 77.

EINSTEIN, A. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss.*, v. 1, p. 142–152, 1918. Citado na página 23.

EISENSTEIN, D. J. et al. Improving cosmological distance measurements by reconstruction of the baryon acoustic peak. *The Astrophysical Journal*, v. 664, n. 2, p. 675, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/664/i=2/a=675>>. Acesso em: 21 mar. 2016. Citado na página 94.

ELLIS, G.; MAARTENS, R.; MACCALLUM, M. *Relativistic Cosmology*. New York, USA: Cambridge University Press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.

FABRIS, J. C.; SHAPIRO, I. L.; SOLà, J. Density perturbations for a running cosmological constant. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2007, n. 02, p. 016, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2007/i=02/a=016>>. Acesso em: 9 mai. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 136 e 137.

FAROOQ, M. O. *Observational constraints on Dark Energy cosmological model parameters*. 2013. 305f. Tese (Doutorado em Física) – KSU. Manhattan, EUA, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 92, 93 e 97.

FAROOQ, O.; RATRA, B. Hubble parameter measurement constraints on the cosmological deceleration-acceleration transition redshift. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 766, n. 1, p. L7, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/2041-8205/766/i=1/a=L7>>. Acesso em: 13 fev. 2016. Citado na página 95.

FELICE, A. D.; NESSERIS, S.; TSUJIKAWA, S. Observational constraints on Dark Energy with a fast varying equation of state. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2012, n. 05, p. 029, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2012/i=05/a=029>>. Acesso em: 20 jan. 2016. Citado na página 57.

- FIRMANI, C. et al. A new method optimized to use gamma-ray bursts as cosmic rulers. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, v. 360, n. 1, p. L1–L5, 2005. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/360/1/L1.abstract>>. Acesso em: 15 fev. 2016. Citado na página 87.
- FIXSEN, D. J. The temperature of the Cosmic Microwave Background. *The Astrophysical Journal*, v. 707, n. 2, p. 916, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/707/i=2/a=916>>. Acesso em: 8 jan. 2016. Citado na página 43.
- FOLATELLI, G. et al. The Carnegie Supernova Project: analysis of the first sample of low-redshift type-ia supernovae. *The Astronomical Journal*, v. 139, n. 1, p. 120, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-3881/139/i=1/a=120>>. Acesso em: 21 jan. 2016. Citado na página 82.
- FREEDMAN, W. L. et al. Final results from the Hubble Space Telescope Key Project to measure the Hubble Constant. *The Astrophysical Journal*, v. 553, n. 1, p. 47, 2001. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/553/i=1/a=47>>. Acesso em: 9 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 76.
- FREEDMAN, W. L. et al. Carnegie Hubble Program: a mid-infrared calibration of the Hubble Constant. *The Astrophysical Journal*, v. 758, n. 1, p. 24, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/758/i=1/a=24>>. Acesso em: 26 mar. 2016. Citado 3 vezes nas páginas 76, 77 e 78.
- FRIEDMANN, A. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik.*, v. 10, p. 377–386, 1922. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01332580>>. Acesso em: 1 abr. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 30.
- FRIEDMANN, A. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung desraumes. *Zeitschrift für Physik*, v. 21, n. 1, p. 326–332, 1924. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01328280>>. Acesso em: 18 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 30.
- GAO, Q.; GONG, Y. The tension on the cosmological parameters from different observational data. *Classical and Quantum Gravity*, v. 31, n. 10, p. 105007, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/31/i=10/a=105007>>. Acesso em: 12 mai. 2016. Citado na página 77.
- GAZTANAGA, E.; CABRE, A.; HUI, L. Clustering of luminous red galaxies – iv. baryon acoustic peak in the line-of-sight direction and a direct measurement of $h(z)$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 399, n. 3, p. 1663–1680, 2009. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/399/3/1663.abstract>>. Acesso em: 6 jan. 2016. Citado na página 95.
- GERKE, B. F.; EFSTATHIOU, G. Probing quintessence: reconstruction and parameter estimation from supernovae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Science Ltd, v. 335, n. 1, p. 33–43, 2002. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05612.x>>. Acesso em: 5 mai. 2016. Citado na página 39.
- GHIRLANDA, G.; GHISELLINI, G.; FIRMANI, C. Gamma-ray bursts as standard candles to constrain the cosmological parameters. *New Journal of Physics*, v. 8, n. 7,

p. 123, 2006. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1367-2630/8/i=7/a=123>>. Acesso em: 10 abr. 2016. Citado na página 87.

GHIRLANDA, G.; GHISELLINI, G.; LAZZATI, D. The collimation-corrected gamma-ray burst energies correlate with the peak energy of their νf_ν spectrum. *The Astrophysical Journal*, v. 616, n. 1, p. 331, 2004. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/616/i=1/a=331>>. Acesso em: 5 mar. 2016. Citado na página 87.

GHIRLANDA, G. et al. Gamma-ray bursts: new rulers to measure the universe. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 613, n. 1, p. L13, 2004. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-4357/613/i=1/a=L13>>. Acesso em: 21 mar. 2016. Citado na página 87.

GRAZIANI, C. GRBs as standard candles: there is no “circularity problem”(and there never was). *New Astronomy*, v. 16, n. 2, p. 57 – 64, 2011. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1384107610000898>>. Acesso em: 8 abr. 2016. Citado na página 87.

GREEN, S. R.; WALD, R. M. How well is our Universe described by an FLRW model? *Classical and Quantum Gravity*, v. 31, n. 23, p. 234003, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/31/i=23/a=234003>>. Acesso em: 29 jan. 2016. Citado na página 30.

GUTH, A. H. Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 23, p. 347–356, 1981. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>>. Acesso em: 16 mar. 2016. Citado na página 24.

HAMANN, J.; HASENKAMP, J. A new life for sterile neutrinos: resolving inconsistencies using hot Dark Matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2013, n. 10, p. 044, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2013/i=10/a=044>>. Acesso em: 23 jan. 2016. Citado na página 77.

HANNESTAD, S.; MÖRTSELL, E. Probing the dark side: constraints on the Dark Energy equation of state from CMB, large scale structure, and type Ia supernovae. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 66, p. 063508, 2002. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.66.063508>>. Acesso em: 21 abr. 2016. Citado na página 39.

HIPÓLITO-RICALDI, W. S.; VELTEN, H. E. S.; ZIMDAHL, W. Viscous dark fluid universe. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 82, p. 063507, 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.063507>>. Acesso em: 24 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 136 e 137.

HOGG, D. W. Distance measures in cosmology. *arXiv:astro-ph/9905116*, 1999. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9905116>>. Acesso em: 12 fev. 2016. Citado na página 46.

HOLTZMAN, J. A. et al. The Sloan Digital Sky Survey-II: Photometry and supernova Ia light curves from the 2005 data. *The Astronomical Journal*, v. 136, n. 6, p. 2306, 2008. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-3881/136/i=6/a=2306>>. Acesso em: 5 abr. 2016. Citado na página 82.

- HOYLE, F. A new model for the expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 108, p. 372, 1948. Citado na página 24.
- HU, W. et al. Effect of physical assumptions on the calculation of microwave background anisotropies. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 52, p. 5498–5515, 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.5498>>. Acesso em: 3 abr. 2016. Citado na página 87.
- HU, W.; SUGIYAMA, N. Small-scale cosmological perturbations: an analytic approach. *Astrophys. J.*, IOP Publishing, v. 471, n. 2, p. 542, 1996. Citado na página 91.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Disponível em: <<http://www.pnas.org/content/15/3/168.short>>. Acesso em: 4 mai. 2016. Citado 4 vezes nas páginas 15, 23, 75 e 76.
- ICHIKAWA, K.; SEKIGUCHI, T.; TAKAHASHI, T. Probing the effective number of neutrino species with the Cosmic Microwave Background. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 083526, 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.083526>>. Acesso em: 12 abr. 2016. Citado na página 93.
- ISHIDA, E. E. O. *Aceleração cósmica aspectos fenomenológicos e estatísticos*. 2010. 141f. Tese (Doutorado em Física) – UFRJ . Rio de Janeiro, Brasil, 2010. Citado na página 49.
- ISHIDA Émille E. et al. When did cosmic acceleration start? how fast was the transition? *Astroparticle Physics*, v. 28, n. 6, p. 547 – 552, 2008. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092765050700148X>>. Acesso em: 10 fev. 2016. Citado na página 60.
- ISIDRO, E. G. C. *Modelos simples de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB)*. 2015. 116f. Dissertação (Mestrado em Física) – Centro de Ciências Exatas, UFES. Vitória, Brasil, 2015. Citado na página 68.
- ISOBE, T. et al. Linear regression in astronomy. *The Astrophysical Journal*, v. 364, p. 104–113, 1990. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1990ApJ...364..104I>>. Acesso em: 10 fev. 2016. Citado na página 88.
- JIMENEZ, R.; LOEB, A. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *The Astrophysical Journal*, v. 573, n. 1, p. 37, 2002. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/573/i=1/a=37>>. Acesso em: 15 mar. 2016. Citado na página 95.
- KAMENSHCHIK, A.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, v. 511, n. 2–4, p. 265 – 268, 2001. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269301005718>>. Acesso em: 17 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.
- KESSLER, R. et al. First-year Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Results: Hubble diagram and cosmological parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 185, n. 1, p. 32, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0067-0049/185/i=1/a=32>>. Acesso em: 21 fev. 2016. Citado na página 82.

- KIM, A. Stretched and non-stretched b-band supernova light curves. *LBNL Report LBNL-56164*, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 83.
- KIRKMAN, D. et al. The cosmological baryon density from the deuterium-to-hydrogen ratio in QSO absorption systems: D/H toward Q1243+3047. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 149, n. 1, p. 1, 2003. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0067-0049/149/i=1/a=1>>. Acesso em: 14 abr. 2016. Citado na página 79.
- KOLB, E. W.; TURNER, M. S. *The early universe*. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1990. v. 69. (Frontiers in Physics, v. 69). ISBN 0201626748, 9780201626742. Citado na página 78.
- KOMATSU, E. et al. Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 180, n. 2, p. 330, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0067-0049/180/i=2/a=330>>. Acesso em: 8 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 93.
- KOMATSU, E. et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 192, n. 2, p. 18, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0067-0049/192/i=2/a=18>>. Acesso em: 3 abr. 2016. Citado na página 25.
- KOWALSKI, M. et al. Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets. *The Astrophysical Journal*, v. 686, n. 2, p. 749, 2008. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/686/i=2/a=749>>. Acesso em: 18 fev. 2016. Citado na página 82.
- LAZKOZ, R.; LEANIZBARRUTIA, I.; SALZANO, V. Cosmological constraints on fast transition unified Dark Energy and Dark Matter models. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 93, p. 043537, 2016. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.043537>>. Acesso em: 8 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 60.
- LEAMAN, J. et al. Nearby supernova rates from the Lick Observatory Supernova Search – I. The methods and data base. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 412, n. 3, p. 1419–1440, 2011. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/412/3/1419.abstract>>. Acesso em: 30 mar. 2016. Citado na página 82.
- LEMAÎTRE, G. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, v. 47, p. 49–59, 1927. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1927ASSB...47...49L>>. Acesso em: 8 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 30.
- LEMAÎTRE, G. Expansion of the universe, a homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 91, p. 483–490, 1931. Citado na página 30.
- LEMAÎTRE, G. L'univers en expansion. In: *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*. [S.l.: s.n.], 1933. v. 53, p. 51. Citado na página 30.

LESGOURGUES, J. The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: overview. *arXiv:1104.2932*, 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1104.2932>>. Acesso em: 14 fev. 2016. Citado na página 137.

LESGOURGUES, J. The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) III: comparison with CAMB for LambdaCDM. *arXiv:1104.2934*, 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1104.2934>>. Acesso em: 13 fev. 2016. Citado na página 137.

LEWIS, A.; CHALLINOR, A.; LASENBY, A. Efficient computation of Cosmic Microwave Background anisotropies in closed Friedmann-Robertson-Walker models. *The Astrophysical Journal*, v. 538, n. 2, p. 473, 2000. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/538/i=2/a=473>>. Acesso em: 7 abr. 2016. Citado na página 136.

LI, H. et al. Overcoming the circular problem for gamma-ray bursts in cosmological global-fitting analysis. *The Astrophysical Journal*, v. 680, n. 1, p. 92, 2008. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/680/i=1/a=92>>. Acesso em: 21 mar. 2016. Citado na página 87.

LI, W. et al. Nearby supernova rates from the Lick Observatory Supernova Search – III. The rate–size relation, and the rates as a function of galaxy Hubble type and colour. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 412, n. 3, p. 1473–1507, 2011. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/412/3/1473.abstract>>. Acesso em: 12 mar. 2016. Citado na página 82.

LI, W. et al. Nearby supernova rates from the Lick Observatory Supernova Search – II. The observed luminosity functions and fractions of supernovae in a complete sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 412, n. 3, p. 1441–1472, 2011. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/412/3/1441.abstract>>. Acesso em: 26 abr. 2016. Citado na página 82.

LIANG, E.; ZHANG, B. Model-independent multivariable gamma-ray burst luminosity indicator and its possible cosmological implications. *The Astrophysical Journal*, v. 633, n. 2, p. 611, 2005. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/633/i=2/a=611>>. Acesso em: 18 jan. 2016. Citado na página 87.

LIANG, E.; ZHANG, B. Calibration of gamma-ray burst luminosity indicators. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, v. 369, n. 1, p. L37–L41, 2006. Disponível em: <<http://mnrasl.oxfordjournals.org/content/369/1/L37.abstract>>. Acesso em: 21 abr. 2016. Citado na página 87.

LIANG, F.; LIU, C.; CARROLL, R. J. The Metropolis-Hastings Algorithm. *Advanced Markov Chain Monte Carlo Methods: Learning from Past Samples*, Wiley Online Library, p. 59–84, 2010. Citado na página 101.

LIANG, N. et al. A cosmology-independent calibration of gamma-ray burst luminosity relations and the Hubble diagram. *The Astrophysical Journal*, v. 685, n. 1, p. 354, 2008. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/685/i=1/a=354>>. Acesso em: 2 abr. 2016. Citado na página 87.

LINDER, E. V. Exploring the expansion history of the Universe. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 90, p. 091301, 2003. Disponível em: <<http://>

[//link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.091301](http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.091301)>. Acesso em: 22 abr. 2016. Citado na página 39.

LISKE, J. *QSO absorption line projects*. 2009. Disponível em: <<http://www.hs.uni-hamburg.de/jliske/qsoal/>>. Acesso em: 24 fev. 2016. Citado na página 80.

LIU, J.; WEI, H. Cosmological models and gamma-ray bursts calibrated by using Padé method. *General Relativity and Gravitation*, v. 47, n. 11, p. 1–25, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-015-1986-1>>. Acesso em: 27 jan. 2016. Citado 3 vezes nas páginas 87, 88 e 183.

LIVIO, M. The world according to the Hubble Space Telescope. *astro-ph/0303500*, 2003. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0303500>>. Acesso em: 15 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 77.

LOPES, A. R. *Densidades numéricas e espectro de potência da distribuição de galáxias*. 2011. 110f. Dissertação (Mestrado em Astronomia) – Observatório do Valongo, UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil, 2011. Citado na página 133.

MANGANO, G. et al. A precision calculation of the effective number of cosmological neutrinos. *Physics Letters B*, v. 534, n. 1–4, p. 8 – 16, 2002. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269302016222>>. Acesso em: 31 mar. 2016. Citado na página 43.

MARCH, M. C. *Advanced statistical methods for astrophysical probes of cosmology*. 2013. 180f. Tese (Doutorado em Física) – Imperial College London. Londres, Inglaterra, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 65, 66, 67, 70, 71 e 81.

MARSH, G. E. The vacuum and the Cosmological Constant problem. *arXiv:0711.0220*, 2007. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/0711.0220>>. Acesso em: 23 mar. 2016. Citado na página 53.

MASSEY, R.; KITCHING, T.; RICHARD, J. The Dark Matter of gravitational lensing. *Reports on Progress in Physics*, v. 73, n. 8, p. 086901, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0034-4885/73/i=8/a=086901>>. Acesso em: 27 fev. 2016. Citado na página 38.

MCCABE, C. Prospects for Dark Matter detection with inelastic transitions of xenon. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2016, n. 05, p. 033, 2016. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2016/i=05/a=033>>. Acesso em: 7 jan. 2016. Citado na página 53.

MIAO, L. et al. Dark Energy. *Communications in Theoretical Physics*, v. 56, n. 3, p. 525, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0253-6102/56/i=3/a=24>>. Acesso em: 9 jan. 2016. Citado na página 58.

MIAO, L. et al. Dark Energy. *Communications in Theoretical Physics*, v. 56, n. 3, p. 525, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0253-6102/56/i=3/a=24>>. Acesso em: 11 mar. 2016. Citado na página 87.

MIAO, L. et al. *Dark Energy*. Pekin, China: World Scientific, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 84.

MIKNAITIS, G. et al. The ESSENCE Supernova Survey: Survey optimization, observations, and supernova photometry. *The Astrophysical Journal*, v. 666, n. 2, p. 674, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/666/i=2/a=674>>. Acesso em: 30 abr. 2016. Citado na página 82.

MILGROM, M. MOND – a pedagogical review. *Acta Phys. Pol. B*, v. 32, n. astro-ph/0112069, p. 3613, 2001. Citado na página 39.

MORAIS, A. M. Gravitação & cosmologia: uma introdução. São Paulo, ed. Livraria da Física. 1v. 169p, 2009. Citado na página 49.

MORESCO, M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to $z = 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2012, n. 08, p. 006, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2012/i=08/a=006>>. Acesso em: 13 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 97.

MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521563984,9780521563987,9780511136795. Citado 4 vezes nas páginas 117, 119, 123 e 134.

MUKHANOV, V.; FELDMAN, H.; BRANDENBERGER, R. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, v. 215, n. 5, p. 203 – 333, 1992. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739290044Z>>. Acesso em: 8 jan. 2016. Citado 4 vezes nas páginas 123, 124, 129 e 132.

NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. The structure of cold Dark Matter halos. *The Astrophysical Journal*, v. 462, p. 563, 1996. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1996TheAstrophysicalJournal...462..563N>>. Acesso em: 3 mai. 2016. Citado na página 54.

NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. A universal density profile from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, v. 490, n. 2, p. 493, 1997. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/490/i=2/a=493>>. Acesso em: 13 abr. 2016. Citado na página 54.

NCSA, U. o. I. *What is the Shape of the Cosmos*. 1995. <<http://archive.ncsa.illinois.edu/Cyberia/Cosmos/CosmosShape.html>>. Acesso em: 10 jan. 2016. Citado na página 30.

NEWTON, I. *The principia: mathematical principles of natural philosophy*. [S.l.]: Univ of California Press, 1999. Citado na página 29.

NOVELLO, M. et al. Programa mínimo de cosmologia. Rio de Janeiro: editora Jauá, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 38.

OLIVE, K. A. TASI lectures on astroparticle physics. *arXiv:astro-ph/0503065*, 2005. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0503065>>. Acesso em: 7 jan. 2016. Citado na página 24.

OLIVEIRA FILHO, K. d. S.; SARAIVA, M. d. F. O. *Astronomia e astrofísica*. [S.l.]: Ed. Universidade/UFRGS, 2000. Citado na página 49.

- PADMANABHAN, N. et al. A 2 per cent distance to $z = 0.35$ by reconstructing baryon acoustic oscillations – i. methods and application to the sloan digital sky survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 427, n. 3, p. 2132–2145, 2012. Disponível em: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/427/3/2132.abstract>. Acesso em: 29 mar. 2016. Citado na página 94.
- PADMANABHAN, T.; CHOUDHURY, T. R. A theoretician’s analysis of the supernova data and the limitations in determining the nature of Dark Energy. v. 344, n. 3, p. 823–834, 2003. Citado na página 39.
- PENZIAs, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, v. 142, p. 419–421, 1965. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1965ApJ...142..419P>. Acesso em: 15 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 37.
- PERCIVAL, W. J. et al. Baryon acoustic oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 401, n. 4, p. 2148–2168, 2010. Disponível em: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/401/4/2148.abstract>. Acesso em: 26 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 94.
- PERIVOLAROPOULOS, L. Six puzzles for LCDM cosmology. *arXiv:0711.0220*, 2008. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0811.4684>. Acesso em: 28 jan. 2016. Citado na página 54.
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, v. 517, n. 2, p. 565, 1999. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0004-637X/517/i=2/a=565>. Acesso em: 16 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 82.
- PETER, J.-P. U. P. *Primordial Cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2009. ISBN 019920991X,9780199209910. Citado na página 120.
- PETTINI, M.; COOKE, R. A new, precise measurement of the primordial abundance of deuterium. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 425, n. 4, p. 2477–2486, 2012. Citado na página 80.
- PHILLIPS, M. M. The absolute magnitudes of Type Ia supernovae. *Astrophys. J.*, v. 413, p. L105–L108, 1993. Citado na página 82.
- PIATTELLA, O. F. et al. Unified Dark Matter models with fast transition. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2010, n. 01, p. 014, 2010. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1475-7516/2010/i=01/a=014>. Acesso em: 17 abr. 2016. Citado na página 25.
- PIETROBON, D. et al. Affine parametrization of the dark sector: constraints from WMAP5 and SDSS. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 083510, 2008. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.083510>. Acesso em: 14 abr. 2016. Citado na página 25.
- PISANO, F.; REIS, N. O. Cosmological constant and spontaneous gauge symmetry breaking: the particle physics and cosmology interface charade. *arXiv:0711.0220*, 2001.

Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-ph/0105345>>. Acesso em: 8 mar. 2016. Citado na página 53.

PLANCK Collaboration et al. Planck 2013 results. XI. All-sky model of thermal dust emission. *A&A*, v. 571, p. A11, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201323195>>. Acesso em: 11 jan. 2016. Citado na página 92.

PLANCK Collaboration et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *arXiv:1502.01589*, 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1502.01589>>. Acesso em: 15 fev. 2016. Citado 3 vezes nas páginas 37, 43 e 137.

PLANCK Collaboration et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *A&A*, v. 571, p. A16, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201321591>>. Acesso em: 6 mai. 2016. Citado 5 vezes nas páginas 41, 42, 77, 78 e 81.

PRIMACK, J. R. Dark matter and structure formation in the Universe. *arXiv:astro-ph/9707285*, 1997. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9707285>>. Acesso em: 21 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 53.

QUARTIN, M. B. *Sobre desafios teóricos de modelos de matéria e energia escuras*. 2008. 150f. Tese (Doutorado em Física) – UFRJ . Rio de Janeiro, Brasil, 2008. Citado na página 32.

REIS, R. R. R. dos. *Em busca da unificação de matéria e energia escuras*. 2007. 140f. Tese (Doutorado em Física) – UFRJ . Rio de Janeiro, Brasil, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 32, 57, 61, 133 e 136.

RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-3881/116/i=3/a=1009>>. Acesso em: 5 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 82.

RIESS, A. G. et al. A 3% solution: determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and wide field camera 3. *The Astrophysical Journal*, v. 730, n. 2, p. 119, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/730/i=2/a=119>>. Acesso em: 10 abr. 2016. Citado 3 vezes nas páginas 75, 77 e 78.

RIESS, A. G. et al. The farthest known supernova: support for an accelerating universe and a glimpse of the epoch of deceleration. *The Astrophysical Journal*, v. 560, n. 1, p. 49, 2001. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/560/i=1/a=49>>. Acesso em: 14 jan. 2016. Citado na página 87.

RIESS, A. G. et al. New Hubble Space Telescope discoveries of type Ia supernovae at $z \geq 1$: Narrowing constraints on the early behavior of Dark Energy. *The Astrophysical Journal*, v. 659, n. 1, p. 98, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/659/i=1/a=98>>. Acesso em: 23 jan. 2016. Citado na página 82.

RIESS, A. G. et al. Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on Dark Energy evolution. *The Astrophysical Journal*, v. 607, n. 2, p. 665, 2004. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/607/i=2/a=665>>. Acesso em: 6 mai. 2016. Citado na página 82.

- RIOTTO, A. Inflation and the theory of cosmological perturbations. *arXiv:hep-ph/0210162*, 2002. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210162>>. Acesso em: 12 mai. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 119 e 120.
- RIVOLO, A. The two-point galaxy correlation function of the local supercluster. *The Astrophysical Journal*, v. 301, p. 70–76, 1986. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1986TheAstrophysicalJournal...301...70R>>. Acesso em: 30 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 133 e 134.
- ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure. *The Astrophysical Journal*, v. 82, p. 284, 1935. Citado na página 30.
- ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure ii. *The Astrophysical Journal*, v. 83, p. 187, 1936. Citado na página 30.
- ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure iii. *The Astrophysical Journal*, v. 83, p. 257, 1936. Citado na página 30.
- RUBIN, V. C.; FORD JR., W. K. Rotation of the Andromeda Nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, v. 159, p. 379, 1970. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1970TheAstrophysicalJournal...159..379R>>. Acesso em: 2 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 38.
- RYDEN, B. S. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.
- SABBATA, V. D.; GASPERINI, M. *Introduction to gravitation*. [S.l.]: World scientific, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 33.
- SANDVIK, H. B. et al. The end of unified Dark Matter? *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 69, p. 123524, 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.123524>>. Acesso em: 29 abr. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 106.
- SCALZO, R. A. et al. Nearby supernova factory observations of sn 2007if: First total mass measurement of a Super-Chandrasekhar-Mass progenitor. *The Astrophysical Journal*, v. 713, n. 2, p. 1073, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/713/i=2/a=1073>>. Acesso em: 15 fev. 2016. Citado na página 82.
- SCHAEFER, B. E. The Hubble diagram to redshift >6 from 69 gamma-ray bursts. *The Astrophysical Journal*, v. 660, n. 1, p. 16, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/660/i=1/a=16>>. Acesso em: 10 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 90.
- SCHMIDT, B. P. et al. The High-Z Supernova Search: measuring cosmic deceleration and global curvature of the Universe using type Ia supernovae. *The Astrophysical Journal*, v. 507, n. 1, p. 46, 1998. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/507/i=1/a=46>>. Acesso em: 11 fev. 2016. Citado na página 25.
- SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the Dark Energy potential. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 71, p. 123001, 2005. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.71.123001>>. Acesso em: 10 abr. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 97.

SPERGEL, D. N. et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: determination of cosmological parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 148, n. 1, p. 175, 2003. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0067-0049/148/i=1/a=175>>. Acesso em: 2 abr. 2016. Citado na página 25.

STEIGMAN, G. Neutrinos and Big Bang Nucleosynthesis. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2012, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 80.

STERN, D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of Dark Energy. i: H(z) measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2010, n. 02, p. 008, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 97.

SUZUKI, N. et al. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. improving the Dark Energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal*, v. 746, n. 1, p. 85, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/746/i=1/a=85>>. Acesso em: 7 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 82.

TEGMARK, M. et al. The three-dimensional power spectrum of galaxies from the Sloan Digital Sky Survey. *The Astrophysical Journal*, v. 606, n. 2, p. 702, 2004. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/606/i=2/a=702>>. Acesso em: 20 abr. 2016. Citado na página 134.

TEGMARK, M. et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 69, p. 103501, 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.69.103501>>. Acesso em: 10 mai. 2016. Citado na página 25.

TORIBIO, A. M. V. *Análise de Modelos cosmológicos de unificação de matéria e energia escuras no universo*. 2007. 185f. Tese (Doutorado em Física) – UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil, 2007. Citado na página 32.

TSUJIKAWA, S. Quintessence: a review. *Classical and Quantum Gravity*, v. 30, n. 21, p. 214003, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/30/i=21/a=214003>>. Acesso em: 6 abr. 2016. Citado na página 56.

TYTLER, D.; FAN, X. F.; BURLES, S. Cosmological baryon density derived from the deuterium abundance at redshift $z = 3.57$. *Nature*, v. 381, p. 207–209, 1996. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/381207a0>>. Acesso em: 20 abr. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 80.

TYTLER, D. et al. Review of Big Bang Nucleosynthesis and primordial abundances. *Physica Scripta*, v. 2000, n. T85, p. 12, 2000. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1402-4896/2000/i=T85/a=002>>. Acesso em: 23 jan. 2016. Citado na página 78.

VELTEN, H.; MARTTENS, R. vom; ZIMDAHL, W. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. *The European Physical Journal C*, Springer Berlin Heidelberg, v. 74, n. 11, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3160-4>>. Acesso em: 23 fev. 2016. Citado na página 54.

VELTEN, H.; WAMBA, E. Power spectrum for the bose–einstein condensate Dark Matter. *Physics Letters B*, v. 709, n. 1–2, p. 1 – 5, 2012. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312001128>>. Acesso em: 5 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 136 e 137.

VERDE, L.; PROTOPAPAS, P.; JIMENEZ, R. The expansion rate of the intermediate universe in light of planck. *Physics of the Dark Universe*, Elsevier, v. 5, p. 307–314, 2014. Citado na página 77.

WALKER, A. G. On Milne’s theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42, n. 1, p. 90–127, 1937. Disponível em: <<http://plms.oxfordjournals.org/content/s2-42/1/90.short>>. Acesso em: 2 fev. 2016. Citado na página 30.

WANG, Y. Model-independent distance measurements from gamma-ray bursts and constraints on Dark Energy. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 123532, 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.123532>>. Acesso em: 31 mar. 2016. Citado na página 87.

WEI, H. Observational constraints on cosmological models with the updated long gamma-ray bursts. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2010, n. 08, p. 020, 2010. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2010/i=08/a=020>>. Acesso em: 23 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 88.

WEI, H.; ZHANG, S. N. Reconstructing the cosmic expansion history up to redshift $z = 6.29$ with the calibrated gamma-ray bursts. *The European Physical Journal C*, v. 63, n. 1, p. 139–147, 2009. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1086-z>>. Acesso em: 10 jan. 2016. Citado na página 87.

WEINBERG, D. H. et al. Observational probes of cosmic acceleration. *Physics Reports*, v. 530, n. 2, p. 87 – 255, 2013. Observational Probes of Cosmic Acceleration. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157313001592>>. Acesso em: 6 fev. 2016. Citado na página 25.

WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. [S.l.]: Wiley New York, 1972. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 45.

WEINBERG, S. The Cosmological Constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, 1989. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>>. Acesso em: 24 fev. 2016. Citado na página 53.

WELFORD, W. Astrophysical formulae: a compendium for the physicist and astrophysicist. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 22, n. 12, p. 1043–1043, 1975. Citado na página 37.

WOOD-VASEY, W. M. et al. Observational constraints on the nature of dark energy: First cosmological results from the essence supernova survey. *The Astrophysical Journal*, v. 666, n. 2, p. 694, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0004-637X/666/i=2/a=694>>. Acesso em: 6 mai. 2016. Citado na página 82.

WYMAN, M. et al. Neutrinos help reconcile planck measurements with the local universe. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 112, p. 051302, 2014. Disponível em:

<<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.051302>>. Acesso em: 18 jan. 2016. Citado na página 77.

Zel'Dovich, Y. B. Cosmological Constant and elementary particles. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, v. 6, p. 883, 1967. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1967ZhPmR...6..883Z>>. Acesso em: 13 fev. 2016. Citado na página 53.

ZHANG, C. et al. Four new observational $h(z)$ data from luminous red galaxies in the sloan digital sky survey data release seven. *Research in Astronomy and Astrophysics*, v. 14, n. 10, p. 1221, 2014. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1674-4527/14/i=10/a=002>>. Acesso em: 26 mar. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 97.

ZHANG, Y.; ZHAO, Y. Unconventional Dark Matter models: a brief review. *Science Bulletin*, Science China Press, v. 60, n. 11, p. 986–994, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11434-015-0804-1>>. Acesso em: 8 fev. 2016. Citado na página 53.

ZHENG, W. et al. Constraints on cosmological models from Hubble parameters measurements. *International Journal of Modern Physics D*, v. 23, n. 05, p. 1450051, 2014. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271814500515>>. Acesso em: 3 mai. 2016. Citado na página 95.

ZWICKY, F. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. *Helv. Phys. Acta*, v. 6, p. 110–127, 1933. Citado na página 23.

ZWICKY, F. On the masses of nebulae and of clusters of nebulae. *The Astrophysical Journal*, v. 86, p. 217, 1937. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1937TheAstrophysicalJournal....86..217Z>>. Acesso em: 4 fev. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 38.

APÊNDICES

APÊNDICE A – GRÁFICOS DAS PDF'S MARGINALIZADAS

Na Sec. 5.2, foram realizados os ajustes dos parâmetros cosmológicos utilizando a função χ^2 total, dada pela soma dos χ^2 de cada conjunto de dados. Nesta seção, são apresentados os gráficos das probabilidades marginais obtidos com os χ^2 individuais de cada conjunto de dados. Em cada um deles, o prior no parâmetro de densidade de bárions definido em (5.46) foi considerado, tal que a distribuição de probabilidades a posteriori é dada por:

$$P_i(\vec{\theta} | \{Y_j\}) = N_i \exp \left[-\frac{1}{2} \chi_i^2(\vec{\theta}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{b0} - 0.0407}{0.0079} \right)^2 \right], \quad (\text{A.1})$$

onde o índice i em χ^2 pode assumir valores 1 a 3. O primeiro deles representa um χ^2 dada pela soma da Eq.(5.23) (dados de SNIa) com a Eq. (5.29) (dados de GRB). Nos outros dois casos, temos χ^2 definido respectivamente pelas Eqs. (5.37) (dados de BAO) e (5.43) (dados de $H(z)$). Com isso, temos 3 funções de distribuição de probabilidades através de (A.1).

A PDF obtida dos dados de SNIa+GRB com adição do prior de Ω_{b0} retornaram os dados dispostos na Tabela 10. As PDF's marginais são exibidas na Fig. 32 para o modelo Λ CDM, e na Fig. 33 para o Modelo Unificado. Note que os dados não foram suficientes para truncar a PDF do Modelo Unificado dentro dos intervalos dos priors considerados, diferentemente do que ocorre com o Λ CDM. Por conta disso, não foi possível obter as estimativas uniparamétricas para os parâmetros do Modelo Unificado, justificando a ausência desses dados na Tabela 10.

Os resultados para as distribuições de probabilidade com os dados de BAO estão organizados na Tabela 11. Os gráficos das probabilidades marginais estão dispostos nas Figs. 34 e 35.

Para a PDF obtida com os dados de medições do parâmetro de Hubble, $H(z)$, os resultados das estimativas estão dispostos na Tabela 12 e os gráficos das PDF's marginais nas Figs. 36 e 37 para o Λ CDM e o Modelo Unificado respectivamente. Assim como nos dados de SNIa+GRB, a PDF do Modelo Unificado não truncou dentro dos intervalos paramétricos considerados, justificando a ausência das estimativas uniparamétricas na Tabela 12.

Tabela 10 – Resultados para o modelo Λ CDM e Modelo Unificado obtidos da função de distribuição de probabilidades a posteriori, definida na Eq.(5.47), com dados de SNIa e GRB.

| SNIa+GRB+PN | | | | |
|---------------|----------------|----------|---------------------|------------------------------|
| Modelo | Grandeza | Best-fit | Média | Esimativa Uniparamétrica |
| Λ CDM | Ω_{b0} | 0.0407 | 0.0407 ± 0.0079 | $0.0407^{+0.0078}_{-0.0079}$ |
| | Ω_{c0} | 0.253 | 0.258 ± 0.042 | $0.253^{+0.043}_{-0.040}$ |
| | z_{eq} | 0.407 | – | $0.400^{+0.09}_{-0.11}$ |
| | χ^2_{min} | 613.2 | – | – |
| | χ^2_{red} | 0.933 | – | – |
| UM | Ω_{b0} | 0.0408 | – | – |
| | α | 2.27 | – | – |
| | β | 0.92 | – | – |
| | z_{eq} | 0.404 | – | – |
| | χ^2_{min} | 607.42 | – | – |
| | χ^2_{red} | 0.926 | – | – |

Fonte: Do autor

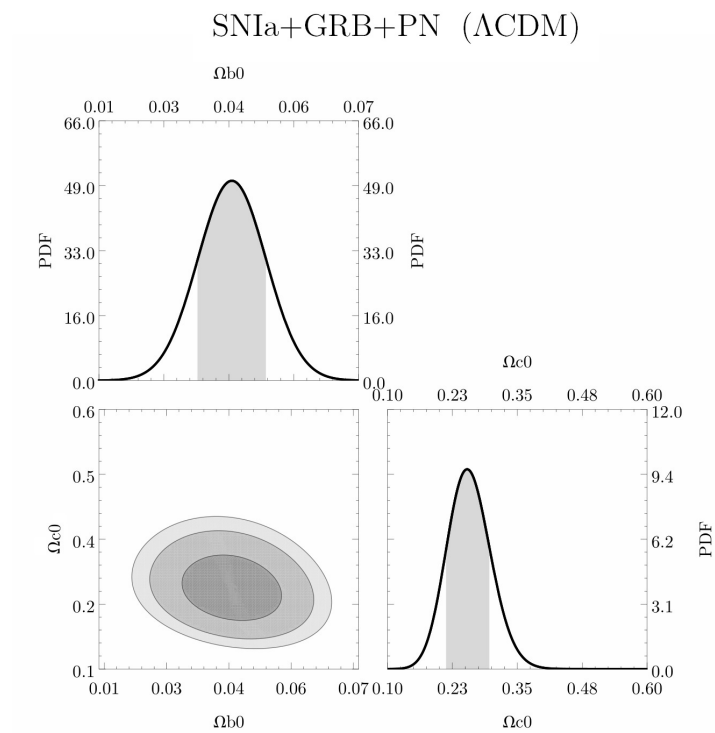


Figura 32 – Distribuições de probabilidades marginais para os parâmetros do modelo Λ CDM, considerando os dados de SNIa do Union 2.1 e os dados de GRB.
Fonte: Do autor.

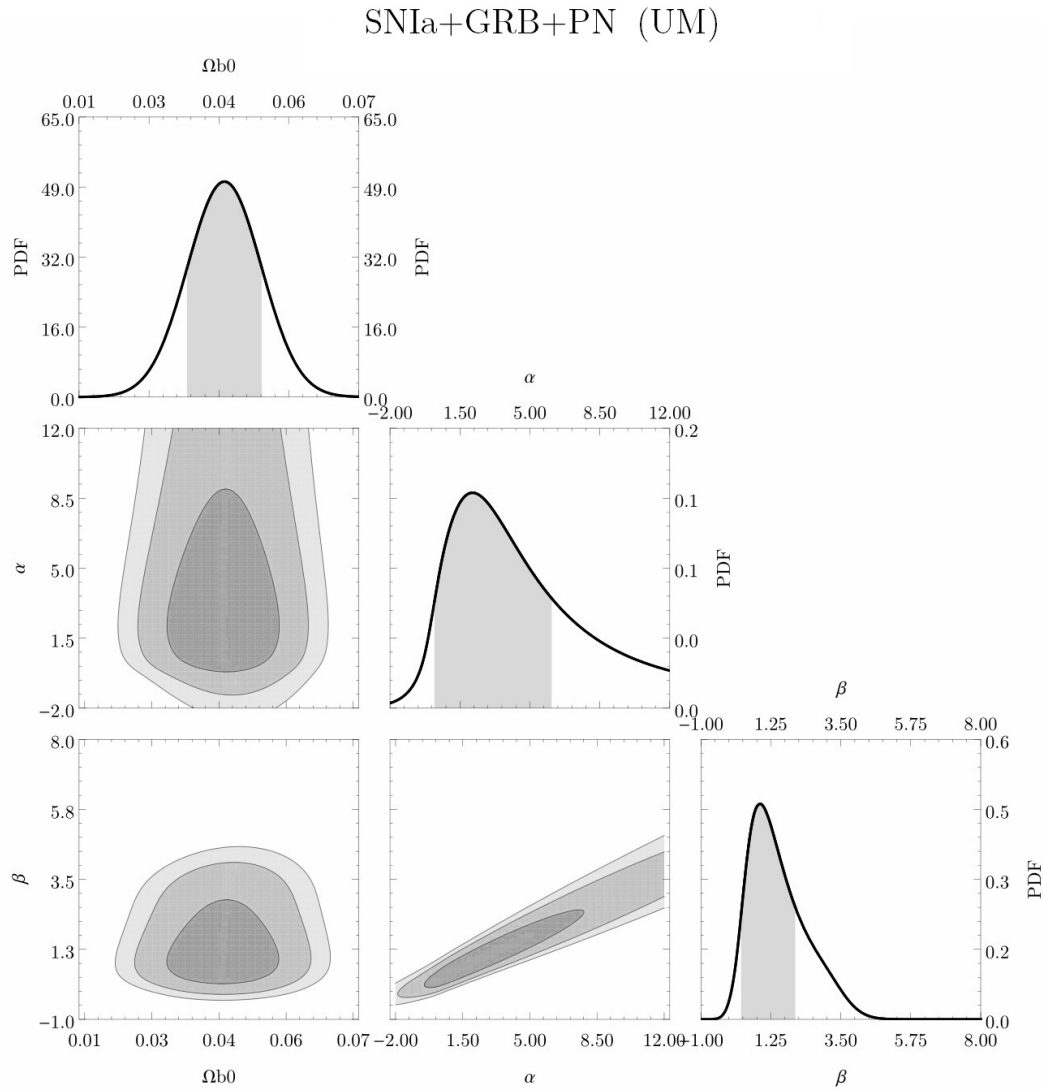


Figura 33 – Distribuições de probabilidades marginais para os parâmetros do Modelo Unificado, com os dados de SNIa e de GRB. Note que dentro dos limites escolhidos, a PDF não truncou.

Fonte: Do autor.

Tabela 11 – Estimativas realizadas com a PDF obtida dos dados de BAO para o modelo Λ CDM e o Modelo Unificado.

| BAO+PN | | | | |
|---------------|----------------|----------|---------------------|------------------------------|
| Modelo | Grandeza | Best-fit | Média | Estimativa Uniparamétrica |
| Λ CDM | Ω_{b0} | 0.0422 | 0.0417 ± 0.0075 | $0.0417^{+0.0075}_{-0.0075}$ |
| | Ω_{c0} | 0.322 | 0.329 ± 0.048 | $0.322^{+0.049}_{-0.046}$ |
| | z_{eq} | 0.254 | – | $0.236^{+0.095}_{-0.085}$ |
| | χ^2_{min} | 3.87 | – | – |
| | χ^2_{red} | 0.969 | – | – |
| UM | Ω_{b0} | 0.0416 | 0.0404 ± 0.0079 | $0.0404^{+0.0080}_{-0.0080}$ |
| | α | 2.85 | 3.31 ± 0.98 | $2.89^{+0.81}_{-0.58}$ |
| | β | 0.99 | 1.3 ± 1.0 | $1.01^{+0.82}_{-0.65}$ |
| | z_{eq} | 0.467 | – | $0.381^{+0.18}_{-0.18}$ |
| | χ^2_{min} | 4.16 | – | – |
| | χ^2_{red} | 1.39 | – | – |

Fonte: Do autor

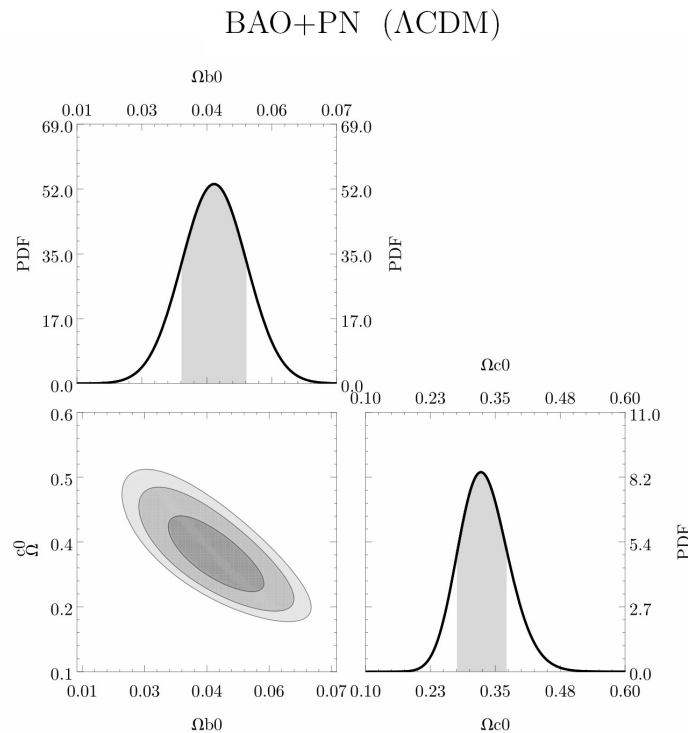


Figura 34 – Probabilidades marginais para os parâmetros do Λ CDM considerando os dados de BAO.

Fonte: Do autor.

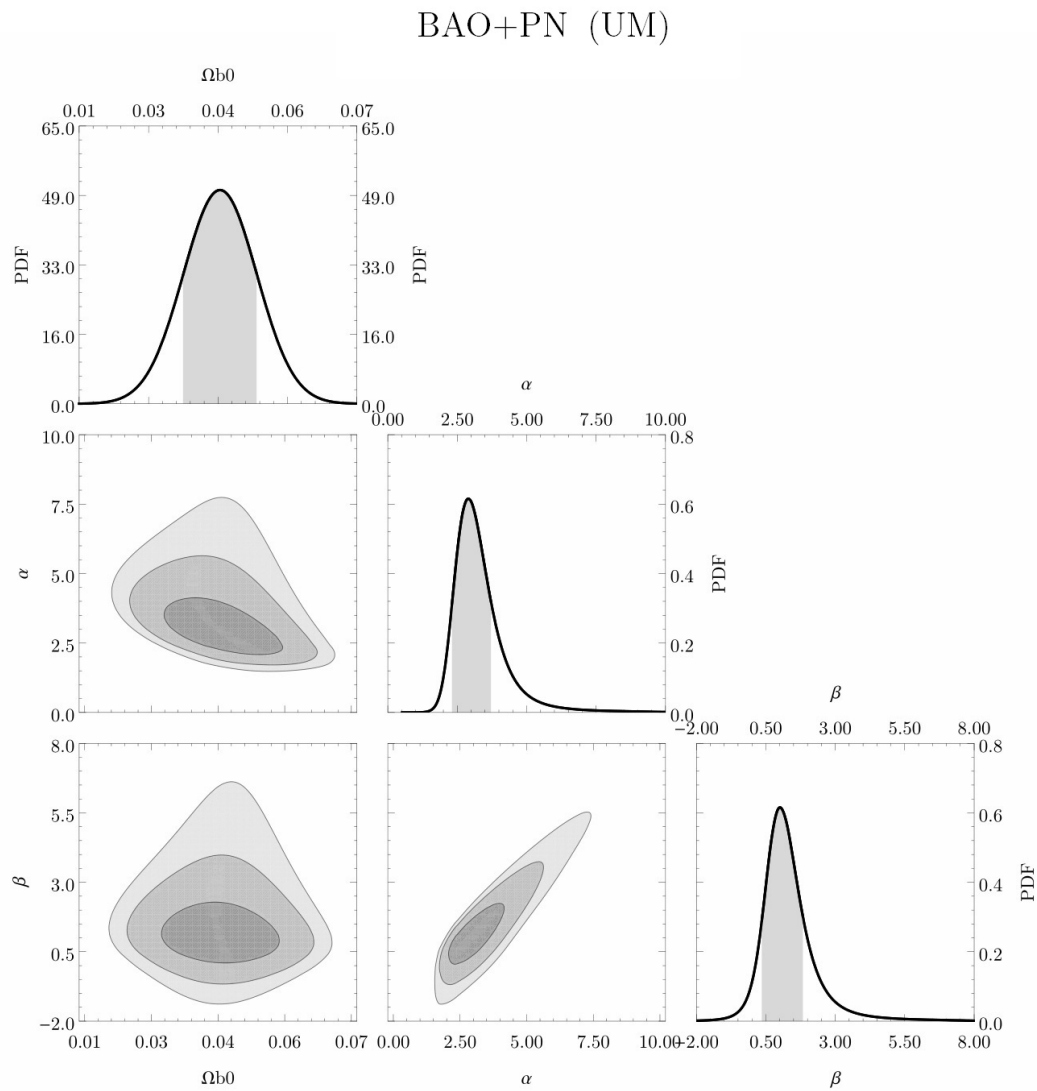


Figura 35 – Gráficos das PDF's marginais para os parâmetros do Modelo Unificado considerando os dados de BAO.

Fonte: Do autor.

Tabela 12 – Valores paramétricos de best-fit, valores médios e estimativas uni-paramétricas obtidas com a PDF dos dados de $H(z)$.

| $H(z)+PN$ | | | | |
|---------------|----------------|----------|---------------------|------------------------------|
| Modelo | Grandeza | Best-fit | Média | Esimativa Uniparamétrica |
| Λ CDM | Ω_{b0} | 0.0407 | 0.0407 ± 0.0079 | $0.0407^{+0.0079}_{-0.0079}$ |
| | Ω_{c0} | 0.248 | 0.255 ± 0.038 | $0.245^{+0.039}_{-0.035}$ |
| | z_{eq} | 0.254 | – | $0.236^{+0.095}_{-0.085}$ |
| | χ^2_{min} | 14.12 | – | – |
| | χ^2_{red} | 0.543 | – | – |
| UM | Ω_{b0} | 0.0406 | – | – |
| | α | 2.24 | – | – |
| | β | 1.10 | – | – |
| | z_{eq} | 0.491 | – | – |
| | χ^2_{min} | 13.7 | – | – |
| | χ^2_{red} | 0.548 | – | – |

Fonte: Do autor

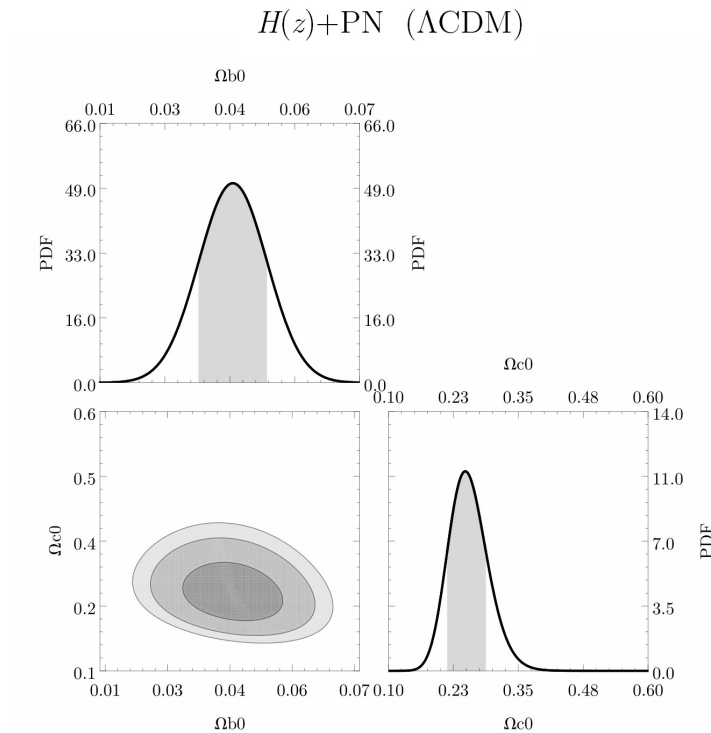


Figura 36 – Gráficos das distribuições de probabilidades marginais com os dados de medidas do parâmetro de Hubble para o modelo Λ CDM.

Fonte: Do autor.

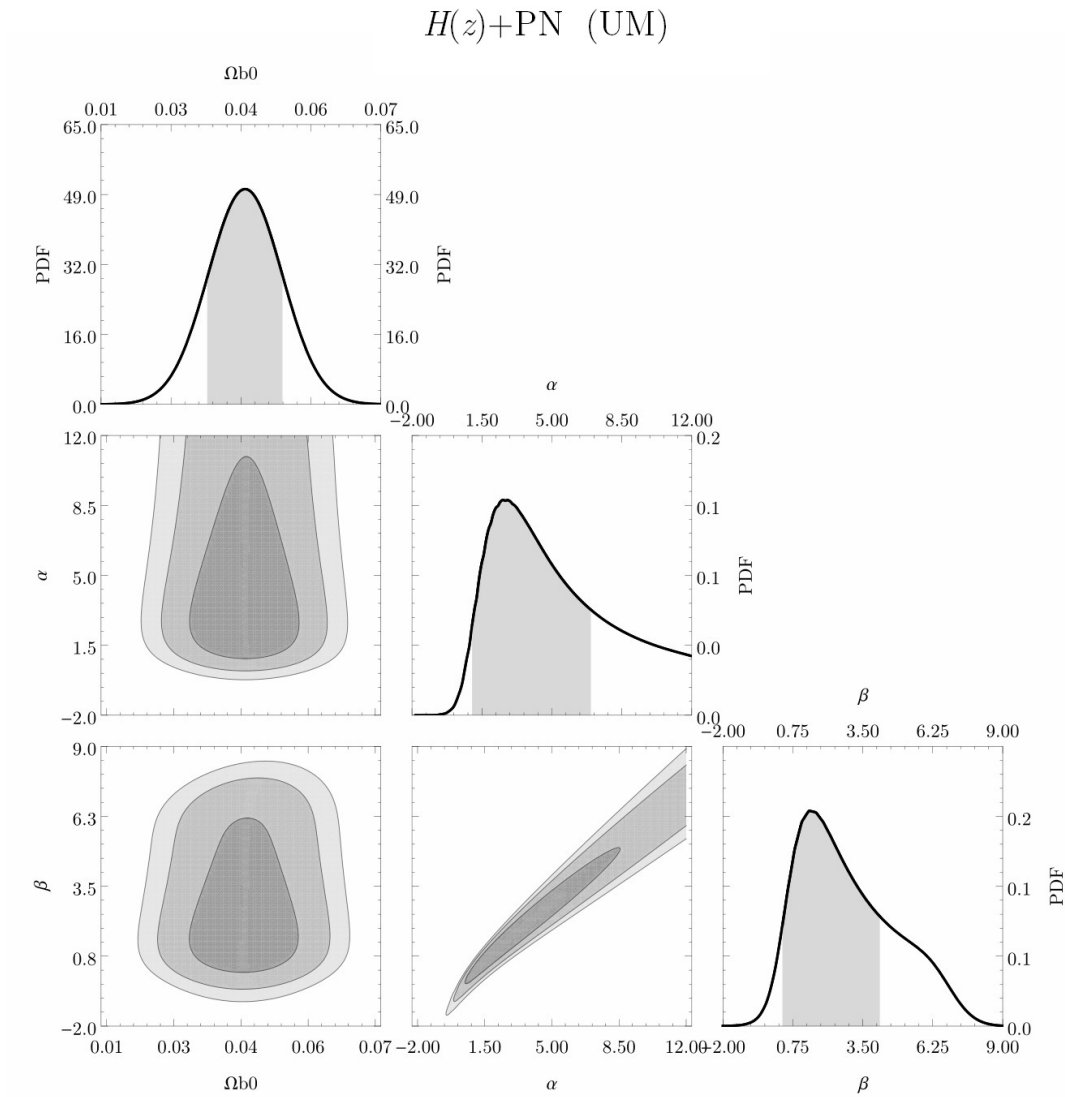


Figura 37 – Distribuições de probabilidades marginais para os parâmetros do Modelo Unificado com dados de medições do parâmetro de Hubble.

Fonte: Do autor.

APÊNDICE B – INTERPOLAÇÃO DE AKIMA

O método de interpolação de Akima foi elaborado para contornar uma dificuldade comum a outros métodos de interpolação que é não produzir uma curva com evolução natural, tal como que se fosse traçada manualmente. Nesses outros métodos, em geral, a continuidade da função ou de sua derivada de primeira ordem não podem ser asseguradas em todo o domínio ou, então, a curva obtida possui oscilações ou instabilidades indesejadas.

Na Ref. (AKIMA, 1970), o autor propõe um método de interpolação baseando-se em uma função contínua por pedaços composta por um conjunto de polinômios de terceiro grau, onde a continuidade da função e de sua derivada são garantidas por considerações geométricas. A inclinação t do ponto intermediário de quaisquer 5 pontos vizinhos pode ser dada por

$$t = \frac{m_2 |m_4 - m_3| + m_3 |m_2 - m_1|}{|m_4 - m_3| + |m_2 - m_1|}, \quad (\text{B.1})$$

onde m_i é a inclinação da reta que liga o i -ésimo dos 5 pontos ao ponto $i + 1$.¹ A incerteza nessa inclinação pode ser facilmente obtida por propagação de erros. Utilizando (B.1), pode-se estimar a inclinação dos pontos de um conjunto de N pontos (x_i, y_i) com exceção dos quatro pontos extremos. Feito isso, um polinômio de terceiro grau é interpolado entre cada intervalo de pontos vizinhos respeitando as coordenadas e as inclinações estimadas. (Note que com o conhecimento das duas coordenadas e das duas derivadas de um par de pontos, podemos interpolar um polinômio de terceiro grau que, por sua vez, possui quatro graus de liberdade.) No entanto, não podemos estimar a taxa de variação dos dois últimos pontos de ambas as extremidades através de (B.1). Todavia, conhecendo as suas coordenadas, podemos interpolá-los ao seu ponto vizinho, cujas coordenada e taxa de variação são conhecidas.

Para ilustrar as diferenças dos métodos de interpolação de Akima, linear e cúbica, um subconjunto de pontos compreendido entre os redshifts 1 e 1.4 dos dados do Union2.1 foi interpolado conforme, mostrado na Fig. 38. Nota-se que na função interpolada linearmente a ligação entre os pontos é feita de forma direta; porém, a derivada de primeira ordem é descontínua nos pontos. Por outro lado, a interpolação cúbica apresenta a derivada de primeira ordem contínua e uma função suave. Todavia, aparecem grandes oscilações e instabilidades (como no caso entre o 10º e 11º ponto dessa amostra) que desqualificam a interpolação cúbica para ser utilizada no procedimento de calibragem de GRB's. Nesse cenário, a interpolação de Akima aparece com qualidades extremamente favoráveis, uma vez que produz uma função suave e contínua com derivada contínua e que segue uma

¹ Por exemplo, m_2 é o coeficiente angular da reta que liga o segundo ponto e o terceiro ponto.

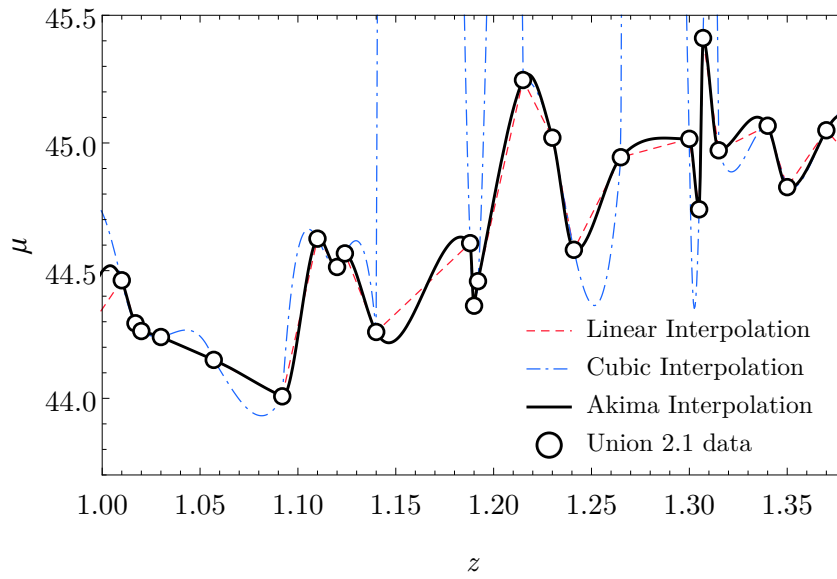


Figura 38 – Diagrama da Hubble para as supernovas do conjunto de dados Union 2.1.
Fonte: (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

tendência natural nas regiões intermediárias entre os pontos, ou seja, não apresenta grandes oscilações (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016).

APÊNDICE C – MÓDULO DE DISTÂNCIA DAS GRB'S

Na Sec. 5.1.4, foram calibradas as 79 GRB's de maior redshift no conjunto das 138 compiladas em (LIU; WEI, 2015). Os resultados obtidos constam da Tabela 13.

Tabela 13 – Módulos de distância das GRB's calibrados com os dados de SNIa do Union2.1.

| z | μ | σ_μ |
|------|-------|--------------|
| 1.44 | 43.68 | 1.02 |
| 1.44 | 44.18 | 1.08 |
| 1.46 | 44.41 | 1.00 |
| 1.48 | 43.97 | 1.00 |
| 1.49 | 45.43 | 1.12 |
| 1.52 | 43.26 | 1.04 |
| 1.55 | 44.48 | 1.04 |
| 1.55 | 46.33 | 1.05 |
| 1.56 | 43.15 | 1.77 |
| 1.60 | 44.60 | 1.13 |
| 1.60 | 47.03 | 1.04 |
| 1.61 | 47.38 | 1.13 |
| 1.62 | 44.77 | 1.02 |
| 1.64 | 45.31 | 1.01 |
| 1.71 | 47.45 | 1.66 |
| 1.73 | 43.64 | 1.05 |
| 1.80 | 45.86 | 1.04 |
| 1.82 | 45.25 | 1.00 |
| 1.90 | 46.25 | 1.19 |
| 1.95 | 46.95 | 1.16 |
| 1.97 | 45.07 | 1.06 |
| 1.98 | 44.94 | 1.08 |
| 2.07 | 44.35 | 1.03 |
| 2.10 | 47.16 | 1.37 |
| 2.11 | 47.42 | 1.01 |
| 2.11 | 44.64 | 1.00 |
| 2.14 | 45.19 | 1.03 |
| 2.15 | 47.83 | 1.15 |

Continua na próxima página.

Tabela 13 – continuação da página anterior.

| z | μ | σ_μ |
|------|-------|--------------|
| 2.20 | 46.81 | 1.17 |
| 2.20 | 47.26 | 1.01 |
| 2.22 | 45.32 | 1.18 |
| 2.30 | 45.91 | 1.22 |
| 2.30 | 46.59 | 1.31 |
| 2.35 | 47.27 | 1.22 |
| 2.35 | 46.74 | 1.36 |
| 2.43 | 46.82 | 1.06 |
| 2.43 | 47.35 | 1.18 |
| 2.45 | 47.86 | 1.21 |
| 2.51 | 46.92 | 1.05 |
| 2.58 | 45.55 | 1.03 |
| 2.59 | 46.62 | 1.04 |
| 2.61 | 46.32 | 1.07 |
| 2.65 | 46.02 | 1.07 |
| 2.69 | 46.44 | 1.12 |
| 2.71 | 45.27 | 1.33 |
| 2.75 | 45.85 | 1.13 |
| 2.77 | 45.99 | 1.00 |
| 2.82 | 47.05 | 1.01 |
| 2.90 | 45.73 | 1.11 |
| 3.00 | 46.63 | 1.18 |
| 3.04 | 46.55 | 1.03 |
| 3.04 | 45.38 | 1.25 |
| 3.08 | 47.55 | 1.20 |
| 3.20 | 46.23 | 1.18 |
| 3.21 | 45.96 | 1.19 |
| 3.34 | 47.49 | 1.06 |
| 3.35 | 48.09 | 1.03 |
| 3.36 | 45.82 | 1.04 |
| 3.37 | 47.81 | 1.32 |
| 3.42 | 47.45 | 1.07 |
| 3.43 | 47.18 | 1.02 |
| 3.53 | 47.15 | 1.03 |
| 3.57 | 46.35 | 1.06 |

Continua na próxima página.

Tabela 13 – contnuação da página anterior.

| z | μ | σ_μ |
|------|-------|--------------|
| 3.69 | 45.74 | 1.07 |
| 3.78 | 49.24 | 1.41 |
| 3.91 | 46.71 | 1.18 |
| 4.05 | 48.52 | 1.04 |
| 4.11 | 47.39 | 1.27 |
| 4.27 | 48.13 | 1.23 |
| 4.35 | 47.57 | 1.10 |
| 4.41 | 48.47 | 1.07 |
| 4.50 | 46.55 | 1.29 |
| 4.90 | 47.43 | 1.25 |
| 5.11 | 48.67 | 1.07 |
| 5.30 | 47.89 | 1.05 |
| 5.60 | 48.45 | 1.02 |
| 6.29 | 50.02 | 1.20 |
| 6.70 | 50.27 | 1.39 |
| 8.10 | 49.75 | 1.29 |

Fonte: (CUZINATTO; de MORAIS; MEDEIROS, 2016)

APÊNDICE D – TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE DE TENSORES

Em primeiro lugar, consideremos uma quantidade tensorial $\tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}(\tilde{x}^\mu)$ num espaço tempo de background, medida no ponto \tilde{P} . Como já vimos, podemos definir infinitos sistemas de coordenadas no espaço tempo perturbado que sejam próximos ao espaço-tempo de background. Num sistema perturbado $\{x_{(A)}^\mu\}$ por exemplo, a quantidade $T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}$ está definida no ponto $P_{(A)}$. A diferença entre o valor do tensor no ponto $P_{(A)}$ do espaço-tempo perturbado e no ponto \tilde{P} do background é denotada por $\delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(A)}$ e pode ser calculada como: ¹

$$\delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(A)} = T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(A)}^\mu(P_{(A)})] - \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[\tilde{x}^\mu(\tilde{P})]. \quad (\text{D.1})$$

Da mesma forma, num referencial perturbado $\{x_{(B)}^\mu\}$ teríamos:

$$\delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(B)} = T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(B)}^\mu(P_{(B)})] - \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[\tilde{x}^\mu(\tilde{P})]. \quad (\text{D.2})$$

Note que a perturbação $\delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}$ depende da escolha de gauges, i.e. $\delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(A)} \neq \delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(B)}$. Essas perturbações relacionam-se através de:

$$\delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(A)} - \delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(B)} = T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(A)}^\mu(P_{(A)})] - T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(B)}^\mu(P_{(B)})] \quad (\text{D.3})$$

No espaço-tempo perturbado descrito pelo sistema $\{x_{(A)}^\mu\}$, podemos expandir $T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}$ quando $x_{(A)}^\mu(P_{(A)}) \rightarrow x_{(A)}^\mu(P_{(B)})$:

$$\begin{aligned} T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(A)}^\mu(P_{(A)})] &= T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(A)}^\mu(P_{(B)})] + \frac{\partial T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial x_{(A)}^\mu}[x_{(A)}^\mu(P_{(A)}) - x_{(A)}^\mu(P_{(B)})] \\ &= T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(A)}^\mu(P_{(B)})] - \frac{\partial T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial x_{(A)}^\mu}\xi^\mu, \end{aligned}$$

onde utilizamos a Eq.(6.33) para inserir ξ^μ . Substituindo esse resultado na Eq.(D.3):

$$\delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(A)} - \delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(B)} = T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(A)}^\mu(P_{(B)})] - T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(B)}^\mu(P_{(B)})] - \frac{\partial T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{x_{(A)}^\mu}\xi^\mu \quad (\text{D.4})$$

Note que todas as quantidades estão definidas nas coordenadas de background, com exceção de $\frac{\partial T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial x_{(A)}^\mu}$. Para escrever esse termo nas quantidades do background, derivamos a Eq.(D.1):

¹ $T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}[x_{(A)}^\mu(P_{(A)})]$ indica a quantidade $T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}$ medida no ponto $P_{(A)}$ no sistema de coordenadas $x_{(A)}^\mu$.

$$\frac{\partial T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial x_{(A)}^\mu} = \frac{\partial \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial x_{(A)}^\mu} + \frac{\partial \delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(A)}}{\partial x_{(A)}^\mu};$$

$$\frac{\partial T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial x_{(A)}^\mu} \approx \frac{\partial \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial x_{(A)}^\mu}, \quad (\text{D.5})$$

onde negligenciamos o último termo por ser de segunda ordem.

Sabemos que as coordenadas perturbadas são muito próximas das coordenadas de background. A transformação pode ser representada por $x_{(A)}^\mu = \tilde{x}^\mu + \alpha^\mu$, com α^μ e suas derivadas $\alpha^\mu_{,i}$ muito pequenas. Podemos utilizar a regra da cadeia no membro direito de (D.5):

$$\frac{\partial T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial x_{(A)}^\mu} = \frac{\partial \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x_{(A)}^\mu} = \frac{\partial \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial \tilde{x}^\mu} (1 - \alpha^\mu_{,i}) = \frac{\partial \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}}{\partial \tilde{x}^\mu} = \partial_\mu \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}. \quad (\text{D.6})$$

Substituindo (D.6) em (D.4), teremos:

$$\delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(A)} - \delta T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}|_{(B)} = T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] - T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] - \partial_\lambda \tilde{T}_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} \xi^\lambda. \quad (\text{D.7})$$

Agora, é necessário determinar a ordem do tensor $T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}$ para estabelecer a transformação:

$$T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] \rightarrow T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})].$$

4-Escalar Podemos calcular a transformação de gauge das perturbações de uma função escalar s com a Eq.(D.7). Para isso, consideramos $T_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} \rightarrow s$:

$$\delta s|_{(A)} = \delta s|_{(B)} + s [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] - s [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] - \partial_\mu \tilde{s} \xi^\mu \quad (\text{D.8})$$

Como um escalar só depende do ponto e não do sistema de referencial, sabemos que $s [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] = s [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})]$. Logo:

$$\delta s|_{(A)} = \delta s|_{(B)} - \partial_\mu \tilde{s} \xi^\mu, \quad (\text{D.9})$$

com quantidades calculadas no ponto \tilde{P} .

4-Vetor Segundo (D.7), para uma quantidade vetorial v^μ , temos:

$$\delta v^\mu|_{(A)} - \delta v^\mu|_{(B)} = v^\mu [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] - v^\mu [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] - \partial_\lambda \tilde{v}^\mu \xi^\lambda. \quad (\text{D.10})$$

A lei de transformação de um vetor é:

$$\begin{aligned} v^\mu [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] &= \frac{\partial x_{(A)}^\mu}{\partial x_{(B)}^\lambda} v^\lambda [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] = (\delta_\lambda^\mu + \partial_\lambda \xi^\mu) v^\lambda [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] \\ &= v^\mu [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] + \partial_\lambda \xi^\mu v^\lambda [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] \end{aligned}$$

onde utilizamos a Eq.(6.37). Portanto:

$$v^\mu [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] - v^\mu [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] = \partial_\lambda \xi^\mu v^\lambda. \quad (\text{D.11})$$

Substituindo (D.11) na Eq.(D.10), temos:

$$\delta v^\mu|_{(A)} = \delta v^\mu|_{(B)} + \partial_\lambda \xi^\mu v^\lambda - \partial_\lambda \tilde{v}^\mu \xi^\lambda.$$

Visto que no sistema $\{x_{(B)}^\mu\}$ é válida a relação $v^\lambda = \tilde{v}^\lambda + \delta v^\mu|_{(B)}$, temos:

$$\delta v^\mu|_{(A)} = \delta v^\mu|_{(B)} + \partial_\lambda \xi^\mu \tilde{v}^\lambda - \partial_\lambda \tilde{v}^\mu \xi^\lambda, \quad (\text{D.12})$$

onde negligenciou-se o termo $\partial_\lambda \xi^\mu \delta v^\mu|_{(B)}$ por ser de segunda ordem.

Tensor Covariante de Segunda Ordem Para um tensor covariante $T_{\mu\nu}$, a transformação das perturbações de acordo com a Eq.(D.7) é:

$$\delta T_{\mu\nu}|_{(A)} - \delta T_{\mu\nu}|_{(B)} = T_{\mu\nu} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] - T_{\mu\nu} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] - \partial_\rho \tilde{T}_{\mu\nu} \xi^\rho. \quad (\text{D.13})$$

O tensor covariante se transforma como:

$$T_{\mu\nu} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] = \frac{\partial x_{(B)}^\alpha}{\partial x_{(A)}^\mu} \frac{\partial x_{(B)}^\beta}{\partial x_{(A)}^\nu} T_{\alpha\beta} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})]$$

Pelas Eqs.(6.35):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] &= \left(\frac{\partial x_{(A)}^\alpha}{\partial x_{(A)}^\mu} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_{(A)}^\mu} \right) \left(\frac{\partial x_{(A)}^\beta}{\partial x_{(A)}^\nu} - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_{(A)}^\nu} \right) T_{\alpha\beta} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})] \\ &= \left(\delta_\mu^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_{(A)}^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\beta - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_{(A)}^\nu} \right) T_{\alpha\beta} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})] \end{aligned}$$

que implica em:

$$T_{\mu\nu} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] = \left[\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\alpha \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_{(A)}^\nu} - \delta_\nu^\beta \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_{(A)}^\mu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_{(A)}^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_{(A)}^\nu} \right] T_{\alpha\beta} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})].$$

Os termo de ordem superior é desconsiderado em aproximações lineares. Logo:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] &= \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\alpha \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_{(A)}^\nu} - \delta_\nu^\beta \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_{(A)}^\mu} \right) T_{\alpha\beta} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})] \\
&= T_{\mu\nu} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})] - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x_{(A)}^\nu} T_{\mu\beta} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})] - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_{(A)}^\mu} T_{\alpha\nu} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})].
\end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$T_{\mu\nu} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] - T_{\mu\nu} [x_{(B)}^\lambda (P_{(B)})] = -\partial_\nu \xi^\beta T_{\mu\beta} [x_{(A)}^\lambda (P_{(B)})] - \partial_\mu \xi^\alpha T_{\alpha\nu} [x_{(A)}^\lambda (P_{(B)})] \quad (\text{D.14})$$

Substituindo a Eq.(D.14) em (D.13):

$$\delta T_{\mu\nu}|_{(A)} = \delta T_{\mu\nu}|_{(B)} - \partial_\nu \xi^\beta T_{\mu\beta} - \partial_\mu \xi^\alpha T_{\alpha\nu} - \partial_\rho \tilde{T}_{\mu\nu} \xi^\rho.$$

Através da relação $T_{\mu\beta} = \tilde{T}_{\mu\beta} + \delta T_{\mu\beta}|_{(B)}$ temos $\partial_\nu \xi^\beta T_{\mu\beta} = \partial_\nu \xi^\beta \tilde{T}_{\mu\beta} + \partial_\nu \xi^\beta \delta T_{\mu\beta}|_{(B)} \approx \partial_\nu \xi^\beta \tilde{T}_{\mu\beta}$. Logo:

$$\delta T_{\mu\nu}|_{(A)} = \delta T_{\mu\nu}|_{(B)} - \partial_\nu \xi^\beta \tilde{T}_{\mu\beta} - \partial_\mu \xi^\alpha \tilde{T}_{\alpha\nu} - \partial_\rho \tilde{T}_{\mu\nu} \xi^\rho \quad (\text{D.15})$$

Tensor Contravariante de Segunda Ordem Por (D.7), temos a transformação das perturbações de um tensor $T^{\mu\nu}$:

$$\delta T^{\mu\nu}|_{(A)} - \delta T^{\mu\nu}|_{(B)} = T^{\mu\nu} [x_{(A)}^\mu (P_{(B)})] - T^{\mu\nu} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] - \partial_\rho \tilde{T}^{\mu\nu} \xi^\rho. \quad (\text{D.16})$$

Sabe-se que a lei de transformação de um tensor contravariante de segunda ordem é:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} [x_{(A)}^\lambda (P_{(B)})] &= \frac{\partial x_{(A)}^\mu}{\partial x_{(B)}^\alpha} \frac{\partial x_{(A)}^\nu}{\partial x_{(B)}^\beta} T^{\alpha\beta} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] \\
&= (\delta_\alpha^\mu + \partial_\alpha \xi^\mu) (\delta_\beta^\nu + \partial_\beta \xi^\nu) T^{\alpha\beta} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] \\
&= [\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\mu \partial_\beta \xi^\nu + \partial_\alpha \xi^\mu \delta_\beta^\nu + \partial_\alpha \xi^\mu \partial_\beta \xi^\nu] T^{\alpha\beta} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})].
\end{aligned}$$

Desprezando os termos de ordem superior:

$$T^{\mu\nu} [x_{(A)}^\lambda (P_{(B)})] - T^{\mu\nu} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] = \partial_\beta \xi^\nu T^{\mu\beta} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})] + \partial_\alpha \xi^\mu T^{\alpha\nu} [x_{(B)}^\mu (P_{(B)})]. \quad (\text{D.17})$$

Com as Eqs. (D.16) e (D.17), obtemos:

$$\delta T^{\mu\nu}|_{(A)} = \delta T^{\mu\nu}|_{(B)} + \partial_\beta \xi^\nu \tilde{T}^{\mu\beta} + \partial_\alpha \xi^\mu \tilde{T}^{\alpha\nu} - \partial_\rho \tilde{T}^{\mu\nu} \xi^\rho. \quad (\text{D.18})$$

APÊNDICE E – EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES NO MODELO DE UNIFICAÇÃO DO GÁS DE CHAPLYGIN GENERALIZADO

Conforme discutido na Sec. 3.1.1, uma componente cósmica com equações de estado do tipo:

$$\tilde{p}_{\text{GCG}} = -\frac{C}{(\tilde{\rho}_{\text{GCG}})^\alpha}, \quad (\text{E.1})$$

é equivalente a uma componente com equação de estado $\tilde{p} = w_u(z) \tilde{\rho}(z)$ em que:

$$w_u = \frac{-1}{A a^{-\gamma} + 1}, \quad (\text{E.2})$$

onde $A \equiv (\rho_{\text{GCG},0}^{1+\alpha} - C)/C$, $\gamma = 3(1 + \alpha)$ e $\rho_{\text{GCG},0}$ é a densidade do gás de Chaplygin quando o fator de escala vale 1. Substituindo a equação de estado (E.2) as Eqs.(6.95), obtém-se a evolução das variáveis perturbadas, cujos comportamentos podem ser observados nas Fig. 40, 41, 42, 43 e 44. Com o contraste de densidade de matéria hoje $\delta_b(z=0)$, calcula-se o power spectrum de matéria, conforme ilustrado na Fig. 39.

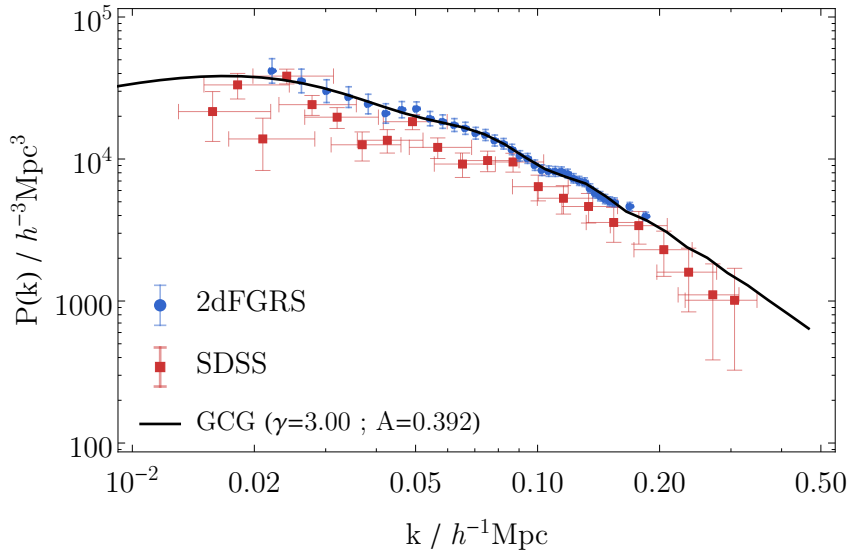


Figura 39 – Power Spectrum de Matéria segundo modelo do gás de Chaplygin generalizado (GCG).

Fonte: Do autor.

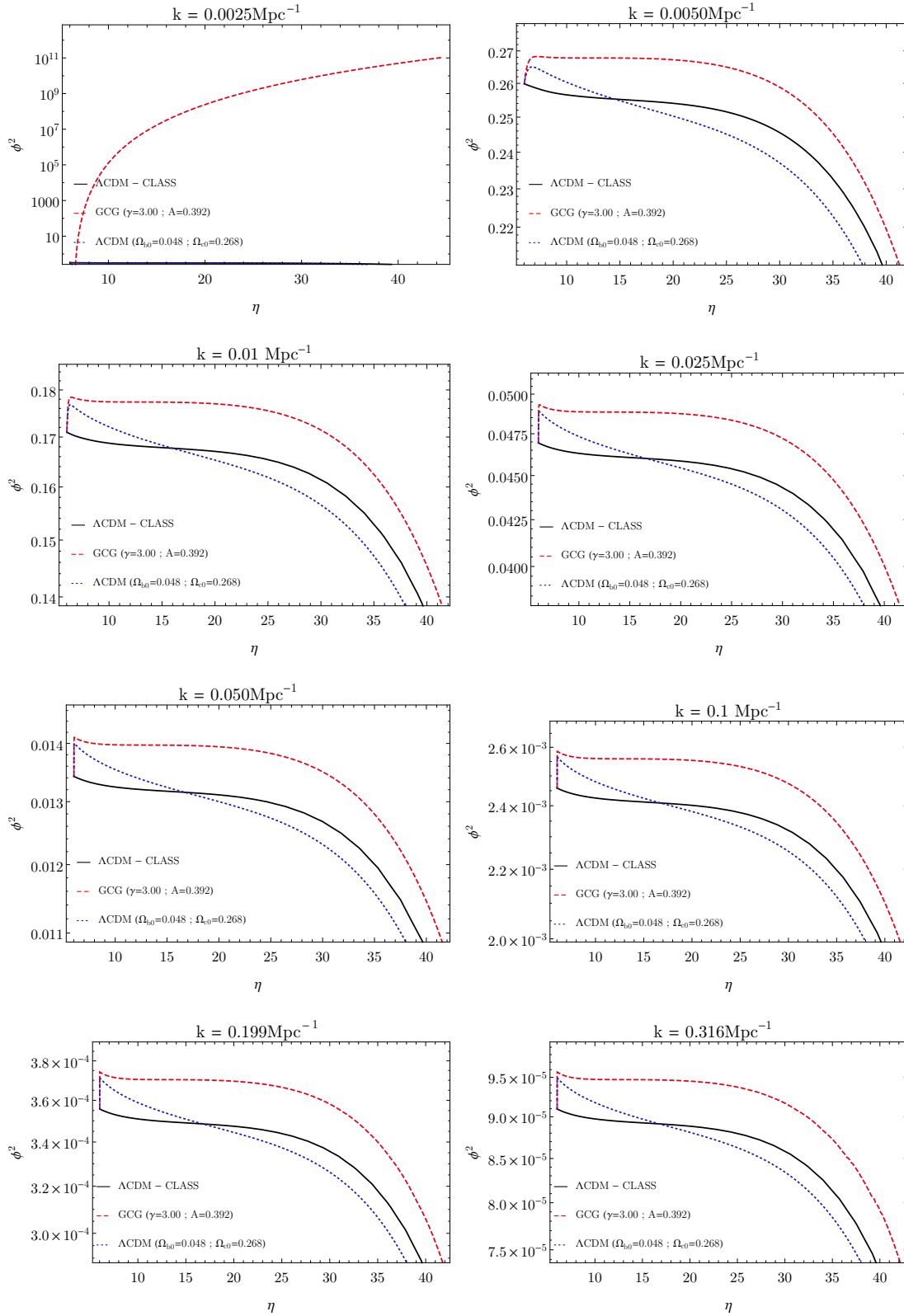


Figura 40 – Quadrado do potencial gravitacional do GCG para oito modos de Fourier no intervalo $0.0025 \text{ Mpc}^{-1} < k < 0.32 \text{ Mpc}^{-1}$.
 Fonte: Do autor.

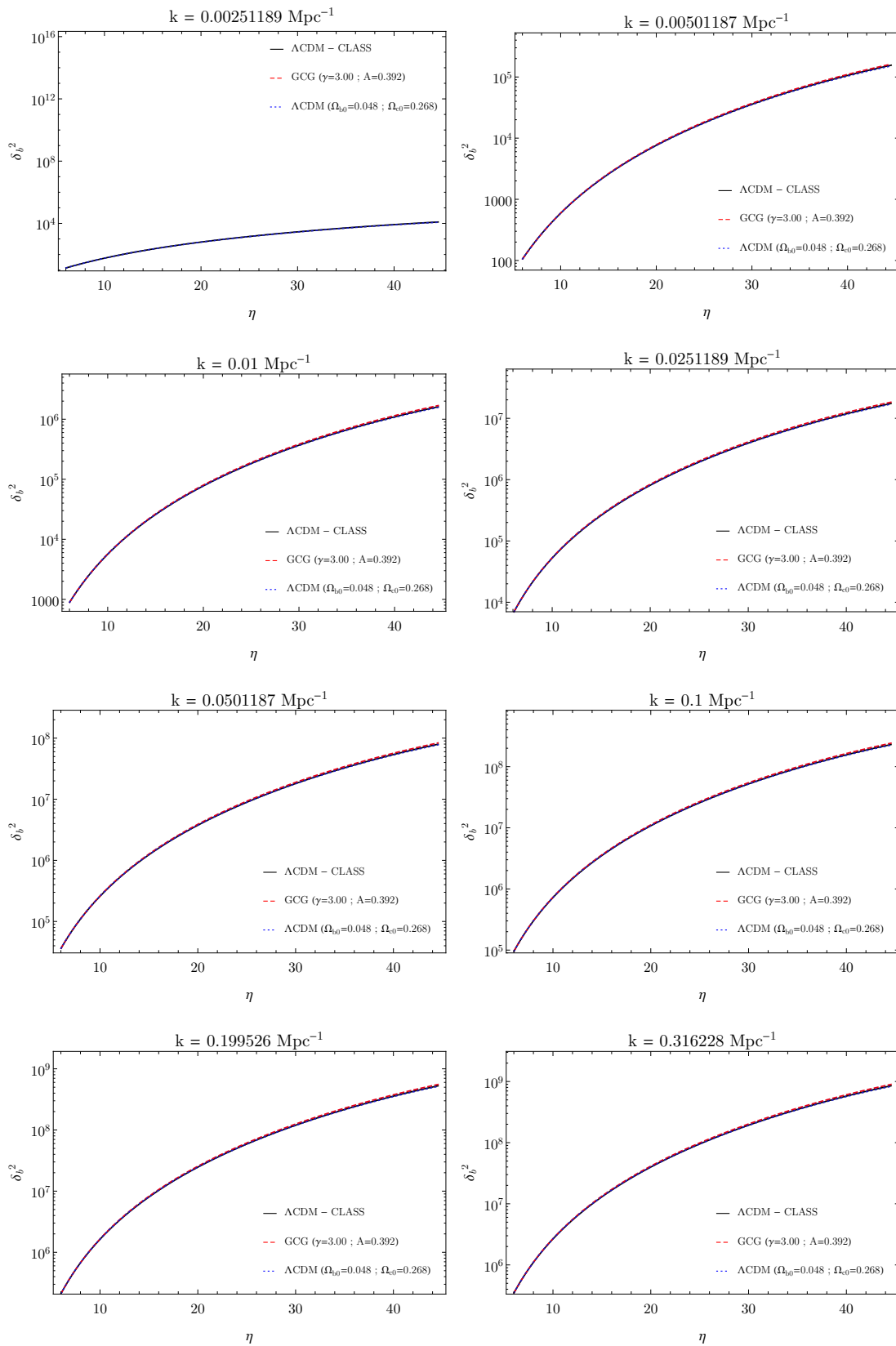


Figura 41 – Quadrado do contraste de densidade de bárions no GCG para diversos modos de Fourier.

Fonte: Do autor.

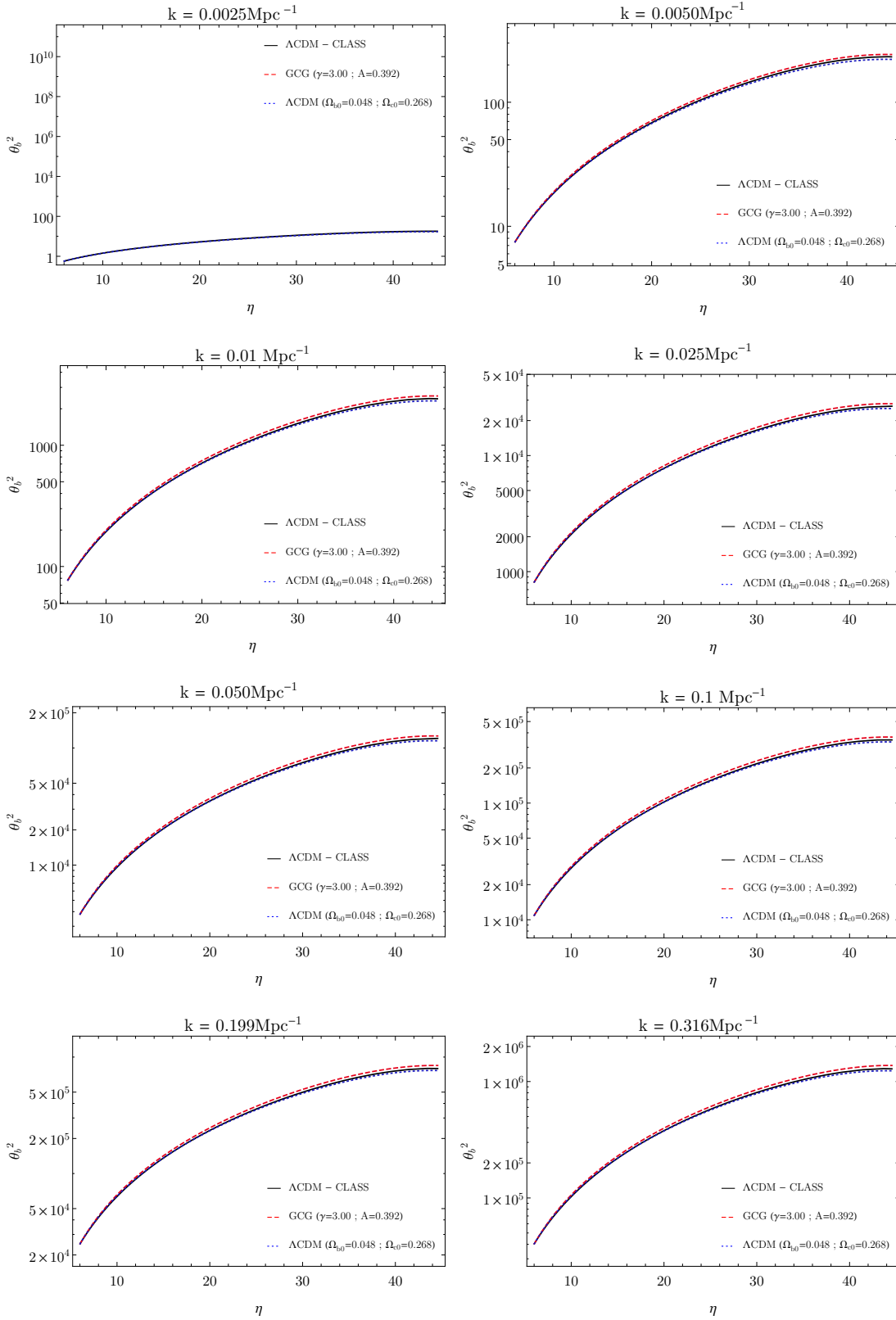


Figura 42 – Quadrado do divergente de velocidade bárions no GCG para oito modos de Fourier.

Fonte: Do autor.

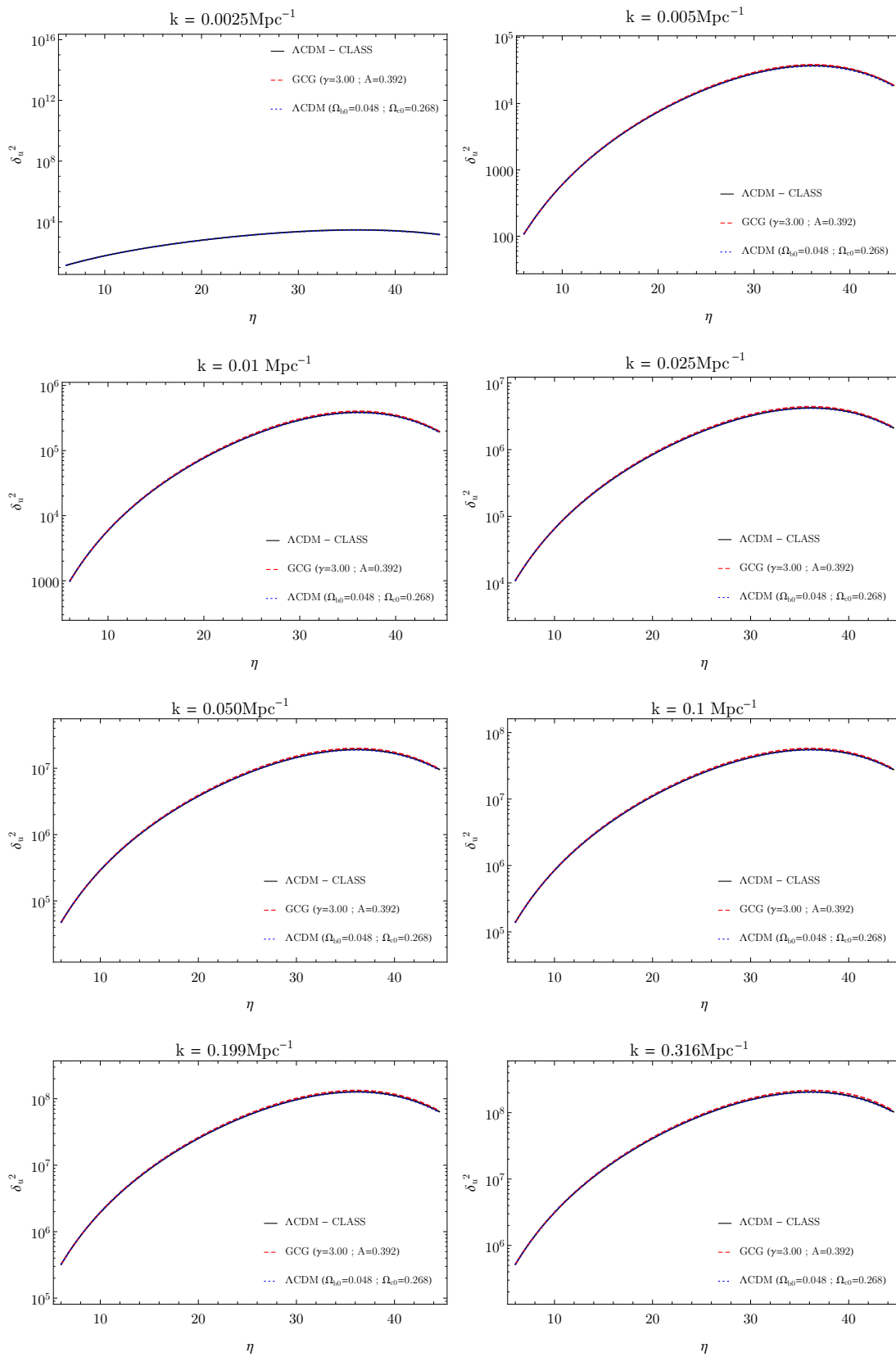


Figura 43 – Quadrado do contraste de densidade da componente unificada no GCG para diversos modos de Fourier. No Λ CDM, δ_u é uma variável efetiva dada por $\delta_u^{\Lambda\text{CDM}} \equiv \frac{\rho_c}{\rho_c + \rho_\Lambda} \delta_c$.
 Fonte: Do autor.

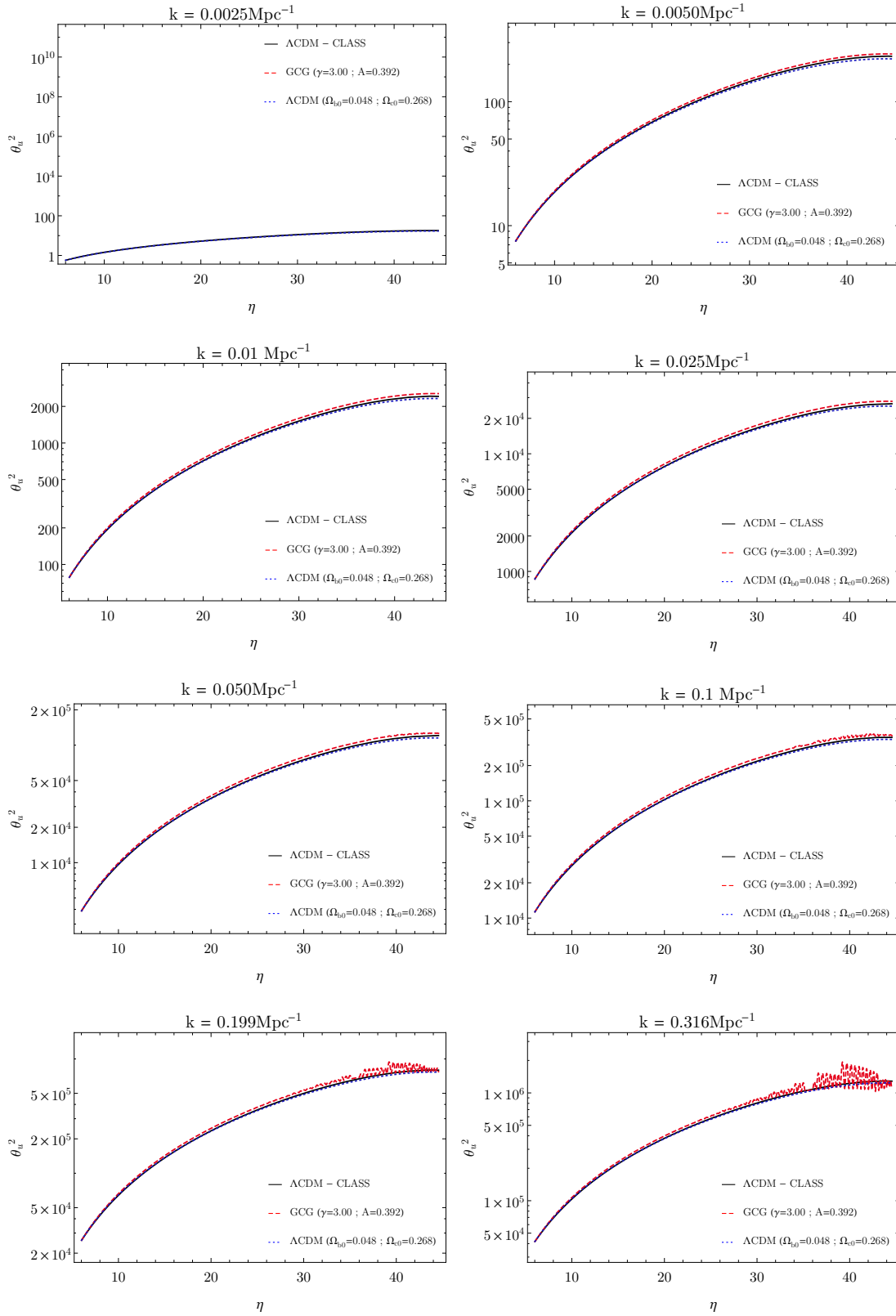


Figura 44 – Quadrado do divergente da velocidade da componente unificada do GCG para oito valores de escala contidas no intervalo $0.0025 \text{ Mpc}^{-1} < k < 0.32 \text{ Mpc}^{-1}$. Para o ΛCDM , temos $\theta_u^{\Lambda\text{CDM}} = \theta_c$.
 Fonte: Do autor.