

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS - UNIFAL-MG

Lislaine Cristina Cardoso

Um modelo matemático para a doença da Babesiose  
Bovina e população de carrapatos usando derivadas  
fracionárias

ALFENAS, MG

2015

LISLAINE CRISTINA CARDOSO

**Um modelo matemático para a doença da Babesiose  
Bovina e população de carrapatos usando derivadas  
fracionárias**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, área de concentração em Estatística Aplicada e Biometria da Universidade Federal de Alfenas, MG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre. Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada e Modelagem Matemática. Orientador: Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos. Coorientador: Prof. Dr. Evandro Monteiro.

ALFENAS, MG

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Alfenas

Cardoso, Lislaine Cristina.

Um modelo matemático para a doença da Babesiose bovina e população de carrapatos usando derivadas fracionárias. / Lislaine Cristina Cardoso. -- Alfenas/MG, 2015.

86 f.

Orientador: José Paulo Carvalho dos Santos.

Dissertação (mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) - Universidade Federal de Alfenas, 2015.

Bibliografia.

1. Epidemiologia. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Cálculo fracionário. I. Santos, José Paulo Carvalho dos. II. Título.

CDD-511.8



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Alfenas / UNIFAL-MG  
Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria

Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700. Alfenas - MG CEP 37130-000  
Fone: (35) 3299-1392 (Secretaria) (35) 3299-1121 (Coordenação)  
<https://www.unifal-mg.edu.br/ppgeab/>



LISLAINE CRISTINA CARDOSO

“UM MODELO MATEMÁTICO PARA A DOENÇA DA BABESIOSE BOVINA E  
POPULAÇÃO DE CARRAPATOS USANDO DERIVADAS FRACIONÁRIAS”.

A Banca Examinadora, abaixo assinada, aprova a  
Dissertação apresentada como parte dos requisitos para  
a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada  
e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas.  
Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada e Modelagem  
Matemática.

Aprovado em: 24 de fevereiro de 2015.

Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos  
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria do Carmo Pacheco de Toledo  
Instituição: UFLA

Assinatura:

Maria do Carmo P. de Toledo Costa

Prof. Dr. Nelson Henrique Teixeira Lemes  
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:

Nelson Henrique T. Lemes

*Dedico à minha mãe Zenair, meu  
porto seguro.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus pela graça de concluir mais uma etapa de minha formação.

À minha família, Zenair, Ederson e Jean por terem acreditado sempre e nunca me deixado desistir.

Ao meu orientador professor José Paulo, pelo exemplo, paciência, empenho e dedicação ao longo desse trabalho.

Ao meu coorientador professor Evandro pelos esclarecimentos e correções.

Ao professor Nelson pelo auxílio com as simulações.

À todos os colegas dos cursos de Matemática e de Pós Graduação. Em especial à Bruna, Mariana, Michele e José Marcio. Obrigada por toda ajuda e pela amizade construída.

À Laryssa e Maiara, pelas inúmeras conversas úteis e inúteis e por fazerem com que meus dias em Alfenas fossem muito mais alegres e menos solitários.

Enfim, agradeço a todos os professores do ICex que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

## RESUMO

A bovinocultura é um dos principais ramos do agronegócio brasileiro ocupando a liderança nesse setor desde 2004. Como qualquer outro segmento, a pecuária também sofre prejuízos financeiros, já que os bovinos podem ser acometidos por várias enfermidades, como: Febre Aftosa, Brucelose, Tristeza Parasitária Bovina (TPB), sendo esta a mais comum. A Babesiose Bovina pertence ao complexo de enfermidade denominada Tristeza Parasitária Bovina (TPB). É causada pelo protozoário *Babesia* e é transmitida pela picada de carrapatos *R. Microplus*, como o vetor de bovinos. Uma análise da dinâmica da doença se faz necessária para gerar programas e políticas de prevenção e controle da doença. Para avançar neste sentido, estudamos um modelo matemático, encontrado na literatura, para a doença da Babesiose. Esse modelo baseia-se na estratégia de modelos compartimentados, onde a interação entre as populações de bovinos e carrapatos são consideradas no processo de modelagem. O resultado é um sistema de equações diferenciais não-linear que descreve a dinâmica da transmissão da doença da Babesiose. A proposta principal do trabalho foi escrever um novo modelo que generaliza o modelo anterior para a Babesiose usando derivadas de ordem não inteira de Caputo. O foco principal foi o estudo da estabilidade local e global dos pontos de equilíbrio livre da doença e pontos de equilíbrio endêmico para esse novo modelo.

Palavras-chave: Epidemiologia. Modelagem matemática. Cálculo Fracionário.

## ABSTRACT

The bovine culture is one of the main branches of Brazilian agribusiness taking up the lead in this sector since 2004. As any other segment, livestock also suffers losses financial, since the bovines may be affected by various diseases such as: FMD, Brucellosis, Sadness Parasitary Bovine (TPB), this being the most frequent. The Bovine Babesiosis belongs to the disease complex known Bovine Parasitary Sadness (TPB). It is caused by the protozoan Babesia and is transmitted by tick bites *R. Microplus* as a vector of bovines. the principal symptoms are fever, diarrhea, anemia, weakness, and abortions. An additional analysis is necessary to generate new programs and policies for prevention and control of disease. To advance this sense, we study a mathematical model, found in the literature, for Babesiosis disease. This model is based on the in strategy compartmented models, where the interaction between the populations bovines and ticks are considered in the modeling process. The result is a system of nonlinear differential equations that describes the dynamic of the transmission of the disease Babesiosis. The main purpose of work was to write a new model that generalizes the model previous to Babesiosis using derived from non-integer order of Caputo. The main focus was the study of local and global stability of equilibrium points Free disease and Endemic equilibrium points to the new model.

Key-words: Epidemiology. Mathematical modeling. Fractional Calculus.

# Sumário

Sumário	9
Introdução . . . . .	11
<b>1 BABESIOSE BOVINA</b>	<b>13</b>
1.1 Transmissão . . . . .	14
1.2 Patogenia . . . . .	15
1.3 Sinais Clínicos . . . . .	16
1.4 Diagnóstico . . . . .	16
1.5 Controle . . . . .	16
1.5.1 Controle do Carrapato fora do hospedeiro . . . . .	17
1.5.2 Controle do Carrapato sobre o hospedeiro . . . . .	17
1.6 Tratamento . . . . .	18
<b>2 DINÂMICA DA BABESIOSE EM BOVINOS E CARRAPATOS</b>	<b>19</b>
2.1 Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	20
2.2 Modelo da Babesiose Bovina . . . . .	25
2.3 Análise do Modelo . . . . .	30
2.3.1 Taxa de Reprodução Básica . . . . .	30
2.3.2 Pontos de Equilíbrio do Modelo . . . . .	31
2.3.3 Análise de Estabilidade . . . . .	34
2.4 Simulação Numérica . . . . .	36
2.4.1 Estabilidade Ecológica . . . . .	37
2.4.2 Ponto Livre da Doença . . . . .	38
2.4.3 Ponto de Equilíbrio Endêmico . . . . .	38
<b>3 CÁLCULO FRACIONÁRIO</b>	<b>40</b>
3.1 Conceitos Preliminares . . . . .	41
3.2 Transformada de Laplace . . . . .	42
3.3 Integral Fracionária . . . . .	43

<i>SUMÁRIO</i>	10
3.4 Derivada Fracionária . . . . .	47
3.4.1 Derivada fracionária segundo Riemann-Liouville . . . . .	47
3.4.2 Derivada fracionária segundo Caputo . . . . .	51
3.5 Funções de Mittag-Leffer . . . . .	56
3.6 Transformada de Laplace da Derivada de Riemman-Liouville e Caputo	57
3.7 Desigualdades Diferenciáveis Fracionárias . . . . .	60
4 <b>MODELO MATEMÁTICO DA BABESIOSE FRACIONÁRIO</b>	<b>68</b>
4.1 Modelo Matemático . . . . .	68
4.2 Análise do Modelo . . . . .	71
4.2.1 Pontos de Equilíbrio do Modelo . . . . .	72
4.2.2 Análise de Estabilidade . . . . .	72
4.3 Simulação Numérica . . . . .	77
4.3.1 Ponto de equilíbrio livre da doença . . . . .	77
4.3.2 Ponto de equilíbrio endêmico . . . . .	79
5 <b>CONCLUSÃO</b>	<b>81</b>
Referências Bibliográficas	<b>83</b>
Referências Bibliográficas	<b>83</b>

## INTRODUÇÃO

A pecuária brasileira é um setor em ascensão no comércio internacional, especialmente o ramo bovino. No Brasil o rebanho comercial é composto por cerca de 200 milhões de cabeças, segundo o Ministério da Agricultura e Pecuária [1], o que faz com que dois segmentos sejam altamente lucrativos: a produção de carne e de leite. Estima-se que o valor bruto da produção de ambos seja de aproximadamente R\$ 67 bilhões anuais.

A criação de bovinos é favorecida pelo clima tropical e pela extensão territorial do país, mas como qualquer outro segmento também sofre prejuízos, já que os animais podem ser acometidos por várias enfermidades, como: Febre Aftosa, Brucelose, Mastite, Tristeza Parasitária Bovina (TPB), sendo esta a mais comum.

A Tristeza Parasitária Bovina é composta por duas enfermidades distintas, Babesiose e Anaplasmose. A Babesiose é transmitida pela picada de um carrapato. Recentemente [2], estimou que os prejuízos atribuídos ao carrapato situam-se próximo a oito dólares por bovino no ano, podendo dessa forma ultrapassar um bilhão de dólares anuais.

Neste trabalho, estudamos a dinâmica da transmissão da Babesiose em bovinos utilizando um modelo compartimentado proposto por [3]. Esse modelo inclui as classes de suscetível, infectado e controlado para os bovinos e suscetível, infectado para os carrapatos. Além disso, a proposta principal do trabalho foi escrever o modelo descrito por [3] usando derivadas de ordem não inteiras e fazer o estudo da estabilidade do modelo fracionário.

O cálculo fracionário tem sua origem em 30 de Setembro de 1695, em uma carta escrita por L'Hospital ao seu amigo Leibniz [4], na qual o significado de uma derivada de ordem meio é proposto e discutido. A partir daí, vários outros matemáticos deram sua contribuição para o desenvolvimento dessa teoria, como Laplace, Lacroix, Fourier, entre outros.

Em 1823, Abel foi o primeiro a encontrar uma aplicação para o cálculo de ordem não inteira. Por meio do cálculo fracionário resolveu o problema da tautócrona, ou seja, determinou a curva tal que o tempo de descida de um corpo abandonado sobre ela e sujeito a ação da gravidade seja o mesmo independentemente do ponto onde este seja abandonado. Para solucioná-lo não usou diretamente o cálculo fracionário, mas mostrou que era possível escrever a solução em termos de derivadas fracionárias [48]. Em 1969, Caputo propôs uma nova definição para a derivada de ordem não inteira que aplicou a problemas de viscoelasticidades e sismologia [50].

A utilização de conceitos e técnicas do Cálculo Fracionário tem possibilitado importantes resultados em várias áreas do conhecimento [5, 56, 40, 43]. Além disso é uma

ferramenta importante para refinar a descrição de fenômenos naturais, em particular aqueles que possuem dependência temporal. Assim como a resolução de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes tem sua solução dada, em vários casos, em termos da função exponencial, uma equação diferencial de ordem não inteira tem, em muitos casos, sua solução dada em termos de funções de Mittag-Leffer [47], daí surge a importância em se estudar tais funções. Com isso, ao entender a forma que a função de Mittag-Leffer generaliza a função exponencial estamos, de certa forma, entendendo o porquê de, em alguns casos, uma equação diferencial de ordem não-inteira fornecer uma descrição mais fina de um dado fenômeno do que a respectiva equação de ordem inteira. Para mais detalhes sobre aplicações veja [45, 59, 60, 61] e as referências contidas nesses trabalhos.

Este trabalho contém 4 capítulos dispostos da seguinte maneira. No Capítulo 1 é apresentada uma visão geral da doença da Babesiose Bovina, os meios de transmissão, a patogenia e algumas medidas de controle da doença.

No Capítulo 2, inicialmente introduzimos alguns conceitos de teoria qualitativa de equações diferenciais e usando sistemas compartimentados, apresentamos o modelo não linear de equações diferenciais ordinárias para a Babesiose. Mostramos a estabilidade local e global dos pontos críticos do modelo. Fizemos algumas simulações numéricas reproduzindo o que foi feito por [3].

No Capítulo 3 é feito um estudo sobre o cálculo de ordem não inteira. Definimos as funções Gama e Beta, introduzimos a transformada de Laplace, formalizamos a definição da integral fracionária, apresentamos técnicas para o seu cálculo, bem como um exemplo, formalizamos a definição de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo, bem como alguns lemas que mostram a relação entre ambas as derivadas. Para finalizar introduzimos as funções de Mittag-Leffer e alguns teoremas indispensáveis para o estudo do próximo capítulo.

No Capítulo 4 apresentamos e discutimos o modelo fracionário para a Babesiose. Mostramos a estabilidade local e global dos pontos críticos do modelo fracionário e fizemos simulações numéricas com finalidade de comprovar os resultados teóricos.

# Capítulo 1

## BABESIOSE BOVINA

Ao longo do tempo, as doenças parasitárias tem sido associadas a história da humanidade. Diversas culturas antigas como gregos, egípcios e chineses, já faziam referência a tais enfermidades [7]. Alguns parasitas foram encontrados em fósseis de foraminíferos (protozoários) que possuem mais de 530 milhões de anos [8]. Assim, os parasitas têm coexistido com a humanidade e as doenças produzidas por eles afetam a saúde e a economia das regiões [9]. Isto pode ser observado especialmente em países tropicais, onde a propagação de doenças entre humanos e animais está se tornando um problema de saúde pública, com altas taxas de morbidade e mortalidade, decorrentes de péssimas condições sociais e econômicas da população nesses países [7].

Algumas doenças parasitárias são consideradas relevantes devido a dificuldade de controlá-las, como a Malária, Esquistosomose, Leishmaniose, Doença de Chagas, Toxoplasmose, Babesiose Bovina e a Parasitose Intestinal são alguns exemplos [10].

A Babesiose bovina pertence ao complexo de enfermidades denominado de Tristeza Parasitária Bovina (TPB), a qual pertence, além da Babesiose, a Anaplasmose. Os agentes causadores são dois protozoários (*Babesia bovis* e *Babesia bigemina*) e uma rickettsia (*Anaplasma marginale*), sendo que a doença pode ser causada por um, dois ou os três agentes juntos [13, 11, 12].

As babesias são transmitidas aos bovinos única e exclusivamente pela picada do carrapato *R. microplus*. Já o *Anaplasma* pode ser transmitido não só pelo carrapato mas também por insetos hematófagos como moscas, mosquitos e mutucas [14]. Devido ao principal agente transmissor ser o carrapato, a intensidade de sua presença no meio ambiente está relacionada ao aparecimento e gravidade da doença.

Para compreender os vários fatores que levam ao surgimento da Tristeza Parasitária em um rebanho, deve-se fazer um estudo epidemiológico para que se conheça o complexo inter-relacionamento entre os agentes causadores, vetores, meio ambiente e o hospedeiro

[14, 8, 21]. Após inúmeros estudos considerando cada um destes fatores e suas interações, foi possível criar um modelo epidemiológico que descreve a dinâmica da doença [3, 16].

O surto de Tristeza Parasitária Bovina gera prejuízos elevados, já que se considera as perdas por morte, que é de aproximadamente 5% dos animais doentes e as perdas nos animais sobreviventes, que incluem: perda de peso, queda na produção de leite, abortos e infertilidade (temporária ou não), altos custos com tratamentos e manejos especiais [2, 23, 14].

Neste trabalho será feito o estudo somente para a doença da Babesiose Bovina. Apresentaremos os meios de transmissão, sintomas, patogenia, sinais clínicos, controle. Esse capítulo é fundamental para o desenvolvimento dos capítulos seguintes, onde introduziremos as hipóteses para o modelo que descreve a doença.

## 1.1 Transmissão

A transmissão da *Babesia* ocorre pela picada do carrapato *R. microplus*. As fêmeas do carrapato fixadas na epiderme dos bovinos se ingurgitam de sangue, ingerindo com ele, certo número de parasitos intraglobulares. A figura (1.1) mostra o ciclo parasitário do carrapato *R. Microplus* e foi retirada de [17].

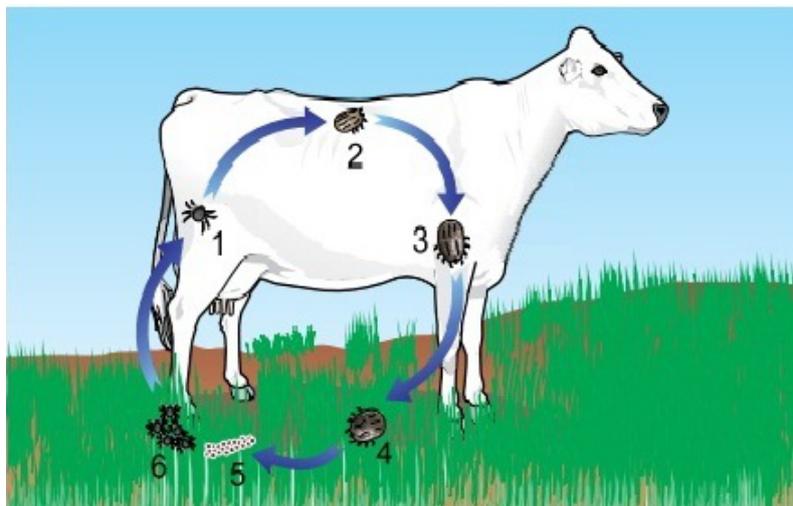


Figura 1.1 – Ciclo Parasitário do Carrapato  
Fonte: PEREIRA; SOUZA; BAFFI. (2010, p. 276)

1. Na fase inicial a larva está infectando o hospedeiro.

2. Fêmea iniciando o repasto sanguíneo;
3. Fêmea (teleógina) totalmente ingurgitada;
4. Fêmea no solo, após desprendimento do animal;
5. Ovoposição no solo das pastagens; transmissão aos novos carrapatos os parasitos babesídeos.
6. Larvas de carrapato prontas para infectar o hospedeiro.

O ciclo parasitário dura em média 21 dias, podendo aumentar ou diminuir dependendo da taxa de inoculação e da sensibilidade do hospedeiro [18].

Parte do ciclo de vida do parasita babesia, inclusive a reprodução sexuada ocorre no carrapato vetor. No intestino do carrapato os parasitos se transformam em gametas que se fundem dando origem a merozoítos, que invadem a hemolinfa e iniciam ciclos de fissão múltipla nos diversos órgãos da fêmea ingurgitada, inclusive no ovário. Quando as larvas infectadas começam a se alimentar nos bovinos, a multiplicação continua nas células epiteliais das glândulas salivares, originando os esporozoítos que são inoculados pela saliva. Os esporozoítos invadem os eritrócitos e transformam-se em trofozoítos que por fissão binária dão origem a dois merozoítos que rompem a célula e invadem outras [13, 14, 19].

## 1.2 Patogenia

Para os bovinos a patogenia está ligada à espécie (*B. bovis* é mais patogênica que a *B. bigemina*), cepa, taxa de inoculação, idade, estresse e raça [14].

A partir do momento que o animal se infecta pela Babesia, ocorre uma multiplicação dos protozoários nos vasos periféricos (*B. bigemina*), ou nos vasos viscerais (*B. bovis*), o que provoca a destruição das hemácias. Quando a multiplicação do protozoário alcança seu pico, ocorre o desenvolvimento de uma hemólise clinicamente detectável. A hemólise resulta em uma anemia grave, icterícia e hemoglobinúria, podendo levar a morte por uma anoxia anêmica [12, 2, 18].

### 1.3 Sinais Clínicos

A partir do 8º dia após a infecção, começa a aparecer os primeiros sinais clínicos da enfermidade. Esses sinais caracterizam-se por hipertermia, anemia, fraqueza, depressão, hemaciação, elevação da temperatura até 41°C, pêlos arrepiados e icterícia, entre outros [14, 19].

Além disso, a *Babesia bigemina* provoca anemia hemolítica progressiva, levando vários dias para causar a morte do animal, como consequência, parte da hemoglobina ultrapassa o filtro renal já lesado pela anóxia e toxinas. A urina assume coloração avermelhada, de forma que a hemoglobinúria é característica da babesiose por *B. bigemina* [14].

### 1.4 Diagnóstico

Conforme [21], o diagnóstico da doença pode ser feito através de observações no próprio animal, verificando se há alguns sinais clínicos, como icterícia, hemoglobinúria e febre. Em alguns casos, para a confirmação da enfermidade, é necessário realizar esfregaços sanguíneos corados pelo método Giemsa, que ajuda na visualização de hemácias infectadas por *Babesia* [13].

Na fase aguda ou crônica quando há uma parasitemia baixa, o diagnóstico pode ser feito com pesquisa de anticorpos, utilizando-se provas sorológicas e imunofluorescência indireta [19].

### 1.5 Controle

Para fazer o controle ao carrapato é necessário cuidados tanto nas áreas onde ocorrem grandes infestações durante todo o ano, quanto em áreas com baixa infestação em algumas épocas do ano. Em ambas as áreas de infestação, os danos diretos e indiretos produzidos pelo carrapato assumem grandes proporções.

Em função do ciclo biológico, existem duas alternativas para o controle do carrapato: fora do hospedeiro e sobre o hospedeiro [2].

### 1.5.1 Controle do Carrapato fora do hospedeiro

O controle do carrapato fora do bovino pode ser realizado por meio de rotação de pastagens, que consiste na retirada dos animais até que todas, ou pelo menos a maioria das larvas, sejam eliminadas por causas naturais. Um bom descanso seria em torno de 40 dias na primavera/verão e 60 dias no outono/inverno. Outra alternativa é a queima e a aplicação de acaricida nas pastagens. Por causarem grandes danos à fauna e flora, estas opções são pouco recomendadas [2]. É possível também realizar a introdução de pastagens com poder de repelência e ação letal ao carrapato, alteração de microclima, implantação de lavoura, uso de agentes biológicos, etc.

A rotação de pastagens e a implantação de lavoura, apesar de serem utilizadas com o objetivo de recuperação ou renovação de pastagens, é uma prática que indiretamente auxilia o controle do carrapato.

### 1.5.2 Controle do Carrapato sobre o hospedeiro

O controle sobre o hospedeiro pode ser realizado por meio de feromônios, carrapaticidas, substâncias tóxicas, machos e fêmeas estéreis, mecanismos imunológicos e agentes químicos [2].

A aplicação dos carrapaticidas ocorre por meio de pulverização, imersão, dorsal e outras formas. Para as propriedades com poucos animais, as pulverizações manuais são mais indicadas, enquanto que os banheiros de imersão e aspersão são mais viáveis para aquelas com grande número de animais [14, 13].

A única forma capaz de retardar por tempo considerável o surgimento de populações de carrapatos resistentes aos agentes de controle se dá pela aplicação correta dos carrapaticidas, quanto à concentração, dose, época, intervalo, respeitando todas as recomendações técnicas [2, 21, 1].

A aplicação utilizando processo mecânico ou dorsal irá depender do número de animais, do grau de tecnologia da propriedade, assim como avaliação do custo/ benefício.

Em qualquer método de controle empregado é importante respeitar o período residual do produto, ou seja, as aplicações devem ser feitas com intervalos de 14 ou 21 dias, para que o resultado pós aplicação seja favorável.

## 1.6 Tratamento

O tratamento de animais doentes deve ser feito por meio de medicação específica para a Babesiose, que são os derivados da diamidina [21, 23, 22].

Os animais tratados antes do aparecimento de sintomas graves, como alto grau de anemia e distúrbios do sistema nervoso, normalmente se recuperam com o tratamento específico.

Para os animais com sintomas graves, é importante o tratamento de suporte que inclui a soroterapia, protetor hepático e transfusão de sangue.

Em todos os casos é importante o cuidado de manter os animais calmos, com água e comida à sua disposição, pois esta doença leva a um quadro de anemia muito grave, que compromete a oxigenação dos tecidos e faz com que os animais, se submetidos a estresse ou movimentos bruscos e de esforço, entrem em choque cárdio-respiratório e tenham morte súbita [2].

# Capítulo 2

## DINÂMICA DA BABESIOSE EM BOVINOS E CARRAPATOS

Nesse capítulo iremos introduzir noções, resultados e métodos que permitem discutir as propriedades qualitativas de soluções de uma equação diferencial ordinária sem conhecer explicitamente estas soluções. Este é precisamente o propósito da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias. Devido ao fato de que muitos tipos de fenômenos naturais são descritos por equações diferenciais, razão pela qual a teoria desempenha um papel importante em muitas áreas do conhecimento, é fundamental obter informação, mesmo que apenas qualitativa, acerca do comportamento das soluções [24, 26, 25].

No início desse capítulo, introduzimos alguns resultados básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias, designadamente no que diz respeito a existência e unicidade de soluções. Prosseguimos apresentando o conceito de estabilidade de Lyapunov e o Teorema de Invariância de La-Salle, que são resultados indispensáveis para o desenvolvimento dessa seção.

Após a parte introdutória, analisamos a dinâmica de transmissão da Babesiose em populações de bovinos e de carrapato, onde os carrapatos desempenham o papel de agente infeccioso e vetor do protozoário *Babesia* hemo-parasita [3].

O modelo da Babesiose é construído usando teoria de modelagem através de modelos compartimentados. A construção de um modelo compartimentado é a maneira de estudar o comportamento de doenças em populações de um ponto de vista epidemiológico [16]. Conforme [16] um sistema de compartimentos consiste, essencialmente, de um número finito de subsistemas interligados, chamados de compartimentos, que trocam entre si e com o meio ambiente, quantidade de concentração de materiais. Cada compartimento é definido por suas propriedades físicas.

Os pioneiros em modelagem de sistemas compartimentados foram Kermack e McKendrick. Em 1927 eles propuseram um modelo que subdividia a população total  $N$  em três populações distintas, a população  $S$  que representa os indivíduos suscetíveis à doença, a

população  $I$  que representa os infectados com a doença e a população  $R$  que são os que se recuperaram da doença [27]. Eles assumiram o tamanho da população fixo, nascimentos e mortes (natural ou causada pela doença) são desconsiderados, o período de incubação do agente infeccioso é instantâneo e que a população é completamente homogênea. Esse modelo foi proposto para explicar a rápida ascensão e queda no número de pacientes infectados observados em epidemias como a peste e a cólera [28].

O modelo Kermack-McKendrick foi publicado na forma de artigo e citado inúmeras vezes [27]. Hoje algumas versões mais complexas do modelo Kermack-McKendrick que refletem melhor a biologia real de uma determinada doença são frequentemente utilizados pelos estudiosos.

Para o modelo da Babesia, nos estágios iniciais, o sistema é composto por cinco equações diferenciais ordinárias, o que explica a influência dos parâmetros epidemiológicos considerados na evolução da doença [3]. Uma vez que o modelo é indicado, são calculados os pontos de equilíbrio endêmico e livre da doença e é apresentada a razão de reprodução básica  $R_0$ , [29]. Em seguida, provaremos que a existência do ponto de equilíbrio endêmico depende do valor de limiar do parâmetro ( $R_0$ ) e mostraremos que este mesmo parâmetro determina a estabilidade local e global do ponto de equilíbrio livre da doença e do ponto de equilíbrio endêmico. Para mais detalhes sobre estabilidade local e global veja [24, 30].

A razão de reprodução básica é um conceito extremamente importante na epidemiologia e há sobre ela uma abundante literatura [29, 38, 31].

## 2.1 Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção, apresentaremos os resultados matemáticos indispensáveis ao desenvolvimento desse capítulo. Informações adicionais podem ser vistas em [24, 30, 35, 39].

Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  um conjunto aberto e seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua em  $D$ . Uma relação da forma

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

é chamada uma equação diferencial ordinária. Uma função vetorial  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida em algum intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  tal que

$$(t, x(t)) \in D,$$

para todo  $t \in I$  e que satisfaz

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

em  $I$  é chamada uma solução de  $x'(t) = f(t, x(t))$  em  $I$ .

Quando  $n = 1$ , a equação diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  é dita escalar. Para um  $n > 1$  qualquer, a equação diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  é, na verdade, um sistema de equações diferenciais escalares, pois se,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , vemos que

$$f(t, x(t)) = (f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t))),$$

deste fato temos,

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dado  $(t_0, x_0) \in D$ , uma função  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida em algum intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  que contém  $t_0$  tal que  $x'(t) = f(t, x(t))$  e  $x(t_0) = x_0$  é chamada uma solução do problema de valor inicial (P.V.I) e  $(t_0, x_0)$  é denominado dado inicial. Este problema também é conhecido como problema de Cauchy.

**Definição 2.1.1** *Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida num aberto  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é dita localmente Lipschitz em relação a segunda variável se para cada vizinhança  $U \subset D$  existe  $L > 0$  tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \tag{2.2}$$

para quaisquer  $(t, x), (t, y) \in U$ .

**Teorema 2.1.1** [30] *Suponha que a função  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja contínua e localmente Lipschitz. Então, dado  $(t_0, x_0) \in D$ , existe uma única solução  $y = \phi(t)$ ,  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in I$  satisfazendo*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{2.3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.4}$$

**Definição 2.1.2** *Uma solução  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (2.3)-(2.4) chama-se máxima, se para toda solução  $y : I_y \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $I \subset I_y$  e  $x(t) = y(t)$  para  $t \in I$  então  $I = I_y$ , conseqüentemente  $x(t) = y(t)$ . Neste caso  $I$ , chama-se intervalo maximal.*

**Proposição 2.1.1** [30] *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e localmente Lipschitziana em relação a segunda variável. Então, dado  $(t_0, x_0) \in D$ , existe uma única solução maximal  $x = \phi(t, t_0, x_0)$  satisfazendo (2.3)-(2.4).*

**Proposição 2.1.2** [30] *Suponha que  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja contínua e Lipschitziana. Dado  $(t_0, x_0) \in D$ , então existe uma única solução do sistema  $x' = f(t, x)$  passando por  $(t_0, x_0)$  que pode ser prolongada até o gráfico encontrar a fronteira de  $D$ .*

Se  $x(t)$ ,  $A(t)$  e  $F(t)$  denotam, respectivamente, as matrizes

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

então o sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{aligned}$$

pode ser escrito na forma matricial

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x + F(t). \quad (2.5)$$

Quando  $F(t) = 0$  para todo  $t \in I$ , o sistema

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x \quad (2.6)$$

é dito homogêneo. As equações (2.5) e (2.6) também se escrevem como  $x'(t) = A(t)x + F(t)$  e  $x'(t) = A(t)x$ , respectivamente.

**Proposição 2.1.3** [30] *Sejam  $A(t)$ ,  $b(t)$  matrizes  $n \times n$ ,  $n \times 1$  respectivamente de funções contínuas num intervalo  $I$ . Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução de*

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)x + b(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

definidos em  $I$ .

Em seguida vamos enunciar resultados que explicam o comportamento geométrico das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares autônomo, isto é, quando a função  $f$  ao lado direito da equação abaixo não depende de  $t$ . A dinâmica local das soluções do sistema

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (2.7)$$

é determinada pelos seus pontos de equilíbrio e pela Linearização da função  $f$  em torno dos pontos de equilíbrio. Com efeito, veremos que o problema não linear se comporta de forma semelhante a um sistema linear da forma

$$x'(t) = Ax(t), \quad (2.8)$$

em uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

**Definição 2.1.3** *Uma solução maximal do sistema (2.7) de forma que  $x(0) = x_0$  é dita uma trajetória de  $f$  passando por  $x_0$ .*

**Definição 2.1.4** *Um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é chamado ponto de equilíbrio ou ponto crítico de (2.7) se  $f(x_0) = 0$ . Um ponto de equilíbrio  $x_0$  é dito ponto de equilíbrio Hiperbólico de (2.7) se nenhum dos autovalores da matriz  $Df(x_0)$  tem parte real igual a zero.*

**Definição 2.1.5** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para cada  $x \in D$  tal que  $t \in I(x)$  (intervalo maximal da solução de (2.7) passando por  $x \in \mathbb{R}^n$ ), definimos  $\varphi(t, x) = \varphi_t(x) = x(t)$ , em que  $x : I(x) \rightarrow D$  é a trajetória de (2.7) passando por  $x$ . Desta forma podemos definir uma aplicação  $\varphi : I(x) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , denominada fluxo. A derivada parcial temporal do fluxo satisfaz a equação  $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = x'(t) = f(x(t)) = f(\varphi(t, x))$ , para cada  $(t, x) \in I(x) \times D$ . Desse modo, a função fluxo  $\varphi(t, x)$  de um campo nos dá uma informação global do comportamento de todas as trajetórias do campo.*

Introduziremos a seguir a noção de estabilidade de uma solução. Essencialmente, uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

onde  $x(t) = x_0$  é uma solução de equilíbrio. A solução de equilíbrio é estável se todas as soluções que partem suficientemente próximas de  $x_0$  se mantêm próximas dessa solução.

**Definição 2.1.6** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Seja  $P$  um ponto de equilíbrio de  $x' = f(x)$ . Dizemos que a solução será*

(i) *estável*: se para toda vizinhança  $U \subset D$  de  $P$ , existe uma vizinhança  $V \subset U$  tal que, para todo  $x \in V$ , a solução de (2.7) está definida para todo  $t \geq 0$  e  $\varphi(t, x) \in U$ ,  $t \geq 0$ ;

(ii) *assintoticamente estável* se é estável e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = P$ .

O próximo teorema dá a condição para a estabilidade de uma equação  $x' = Ax$  com coeficientes constantes.

**Teorema 2.1.2** [24] *Seja  $A$  uma matriz quadrada. Então a solução da equação  $x'(t) = Ax(t)$  é*

(a) *assintoticamente estável, se e só se,  $A$  tem apenas valores próprios com parte real negativa;*

(b) *instável, se e só se,  $A$  tem pelo menos um valor próprio com parte real positiva.*

**Definição 2.1.7** [37] *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  uma função que possui derivadas parciais contínuas em todos os pontos do seu domínio  $D$ , diz-se então que  $f$  é uma função de classe  $C^1$  e representaremos esse conjunto por  $C^1(D)$ .*

O próximo teorema mostra que perto de um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x_0$ , o sistema não linear (2.7) tem a mesma estrutura qualitativa que o sistema linear associado (2.8), onde  $A = Df(x_0)$ . A demonstração pode ser encontrada em [24]. O resultado será enunciado como o ponto de equilíbrio sendo a origem no  $\mathbb{R}^n$ , entretanto por mudança de coordenada é possível mostrar que o resultado continua válido para qualquer ponto de equilíbrio fora da origem.

**Teorema 2.1.3** [24] (Hartman-Grobman) *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem, seja  $f \in C^1(E)$  e  $\varphi_t$  o fluxo do sistema não linear (2.7). Suponha  $f(0) = 0$  e que a matriz  $A = Df(0)$  não possua nenhum autovalor com a parte real nula. Então, existe um homeomorfismo  $H$  de um conjunto aberto  $U$  contendo a origem em um conjunto aberto  $V$ , contendo a origem, tal que para cada  $x_0 \in U$ , existe um intervalo aberto  $I_0 \in \mathbb{R}$  contendo 0 tal que todo  $t \in I_0$*

$$H \circ \varphi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

*ou seja, as trajetórias próximas de (2.7) próximas a origem são levadas em  $x' = Ax$  próximas a origem e o tempo é preservado.*

A próxima definição fornece o segundo método de Lyapunov que estuda a estabilidade de sistemas (2.7), em que  $f$  é de classe  $C^1$  e  $x_0$  é o ponto de equilíbrio de  $f$ . Para mais detalhes veja [24].

**Definição 2.1.8** Dado  $x_0 \in D$  com  $f(x_0) = 0$ , dizemos que uma função diferenciável  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Lyapunov para  $x_0$  se existe um aberto  $U \subset D$  contendo  $x_0$  tal que:

1.  $V(x_0) = 0$  e  $V(x) > 0$ , para  $x \in U \setminus \{x_0\}$
2.  $V'(x) \leq 0$ , para  $x \in U$ .

Uma função de Lyapunov diz-se uma função de Lyapunov estrita se podemos substituir a segunda condição por  $V'(x) < 0$  para  $x \in U \setminus \{x_0\}$ .

A existência de uma função de Lyapunov (respectivamente, função Lyapunov estrita) para um ponto da equação (2.7) permite estabelecer a estabilidade (respectivamente, estabilidade assintótica) desse ponto crítico [24].

**Teorema 2.1.4** [30] Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função localmente Lipschitz num conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $x_0 \in D$  tal que  $f(x_0) = 0$ .

- a) Se existe uma função de Lyapunov para  $x_0$ , então  $x_0$  é estável.
- b) Se existe uma função de Lyapunov estrita para  $x_0$ , então  $x_0$  é assintoticamente estável.

**Definição 2.1.9** Um conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  diz-se positivamente invariante em relação a (2.7), se para qualquer  $x \in E$ ,  $\varphi(t, x) \in E$ , para  $t \geq 0$ .

**Teorema 2.1.5** [30] (Princípio de Invariância de La Salle) Seja  $W \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto que é positivamente invariante com respeito a  $x' = f(x)$ . Seja  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que  $V'(x) \leq 0$  em  $W$  e  $E = \{x \in W : V'(x) = 0\}$ . Se  $M$  é o maior conjunto invariante em  $E$ , então toda solução que começa em  $W$  tende a  $M$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.2 Modelo da Babesiose Bovina

O modelo da Babesiose é formulado utilizando as hipóteses a seguir. Para mais informações veja [3].

- A população total de bovinos  $\bar{N}_B(t)$  é dividida em três subpopulações:
  - bovinos que podem ser infectados, (suscetíveis  $\bar{S}_B(t)$ );

- bovinos infectados pelo parasita da Babesia, (infectados  $\bar{I}_B(t)$ );
- bovinos que foram tratados para a doença da Babesiose, (controlados  $\bar{C}_B(t)$ ).
- O parâmetro  $\mu_B$  é a taxa de natalidade dos bovinos. Esse parâmetro é assumido igual ao parâmetro da taxa de mortalidade natural dos bovinos.
- O total da população de carrapatos  $\bar{N}_C(t)$  é dividida em duas subpopulações:
  - carrapatos que podem tornar-se infectados pela doença  $\bar{S}_C(t)$ ;
  - carrapatos que já estão infectados pela doença  $\bar{I}_C(t)$ .
- O parâmetro  $\mu_C$  é a taxa de natalidade dos carrapatos. Esse parâmetro é assumido igual ao parâmetro da taxa de mortalidade natural do carrapato.
- Um bovino suscetível pode ser enviado a subpopulação de infectados  $\bar{I}_B(t)$  devido a eficácia da transmissão da doença, por meio da picada de um carrapato infectado, a uma taxa  $\beta_B$ .
- Um carrapato suscetível pode ser enviado a subpopulação de infectados  $\bar{I}_C(t)$  devido a infecção de um bovino, à uma taxa  $\beta_C$ .
- Assumimos a transmissão vertical de cem por cento na população bovina  $\mu_B$  e as populações de carrapatos ocorrem com probabilidade  $(1 - p)$ , onde  $p$  é a probabilidade de que um carrapato suscetível nasceu a partir de um animal infectado.
- A fração  $\lambda_B$  dos bovinos infectados são controlados, isto é, tratados contra Babesia.
- A fração  $\alpha_B$  dos bovinos controlados, retornam ao estado de suscetível.
- É assumida mistura homogênea, ou seja, todos os bovinos suscetíveis têm a mesma probabilidade de serem infectados e todos os carrapatos suscetíveis têm a mesma probabilidade de estarem infectados.

**Observação 2.2.1** *A transmissão vertical é aquela que é transmitida de mãe para o filho. Para mais detalhes veja [13, 14].*

Usando as hipóteses anteriores e teoria de modelagem através de modelos compartimentados, obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias para a doença da Babe-

siose [3, 38, 16].

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}'_B(t) = \mu_B(\bar{S}_B(t) + \bar{C}_B(t)) + \alpha_B \bar{C}_B(t) - \mu_B \bar{S}_B(t) - \beta_B \bar{S}_B(t) \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)}, \\ \bar{I}'_B(t) = \mu_B \bar{I}_B(t) + \beta_B \bar{S}_B(t) \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)} - \mu_B \bar{I}_B(t) - \lambda_B \bar{I}_B(t), \\ \bar{C}'_B(t) = \lambda_B \bar{I}_B(t) - [\mu_B + \alpha_B] \bar{C}_B(t), \\ \bar{S}'_C(t) = \mu_C(\bar{S}_C(t) + p\bar{I}_C(t)) - \beta_C \bar{S}_C(t) \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)} - \mu_C \bar{S}_C(t), \\ \bar{I}'_C(t) = \beta_C \bar{S}_C \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)} + (1-p)\mu_C \bar{I}_C(t) - \mu \bar{I}_C(t). \end{array} \right. \quad (2.9)$$

O sistema acima é consequência do seguinte diagrama descrito na figura (2.1).

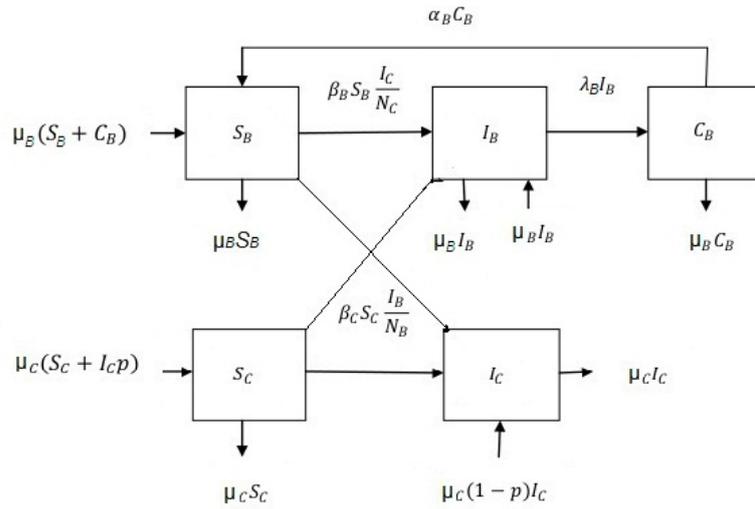


Figura 2.1 – Dinâmica da doença da Babesiose Bovina e população de carrapatos  
Fonte: ARANDA, et al.

Simplificando o sistema (2.9) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}'_B(t) = (\mu_B + \alpha_B) \bar{C}_B(t) - \beta_B \bar{S}_B(t) \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)}, \\ \bar{I}'_B(t) = \beta_B \bar{S}_B(t) \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)} - \lambda_B \bar{I}_B(t), \\ \bar{C}'_B(t) = \lambda_B \bar{I}_B(t) - [\mu_B + \alpha_B] \bar{C}_B(t), \\ \bar{S}'_C(t) = \mu_C p \bar{I}_C(t) - \beta_C \bar{S}_C(t) \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)}, \\ \bar{I}'_C(t) = \beta_C \bar{S}_C \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)} - p \mu_C \bar{I}_C(t). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Dado que a população de bovinos e de carrapatos são constantes, segue que

$$\bar{N}'_B(t) = \bar{S}'_B(t) + \bar{I}'_B(t) + \bar{C}'_B(t) = 0 \quad e \quad \bar{N}'_C(t) = \bar{S}'_C(t) + \bar{I}'_C(t) = 0. \quad (2.11)$$

Todos os parâmetros desse modelo são não-negativos. Usando a teoria clássica de equações diferenciais ordinárias, é possível provar que o sistema acima é bem posto em relação as condições iniciais, isto é, admite uma única solução que depende continuamente e passando por cada dado inicial em  $\mathbb{R}_+^5$ , então as soluções  $(\bar{S}_B(t), \bar{I}_B(t), \bar{C}_B(t), \bar{S}_C(t), \bar{I}_C(t))$  estão definidas para todo  $t \geq 0$  e permanecem nesta região.

Introduzindo as proporções

$$S_B(t) = \frac{\bar{S}_B(t)}{\bar{N}_B(t)}, \quad I_B(t) = \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)}, \quad C_B(t) = \frac{\bar{C}_B(t)}{\bar{N}_B(t)}, \quad S_C(t) = \frac{\bar{S}_C(t)}{\bar{N}_C(t)}, \quad I_C(t) = \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)},$$

no sistema (2.10) e dividindo (2.11) por  $\bar{N}_B(t)$ ,  $\bar{N}_C(t)$ , respectivamente, temos

$$S_B(t) + I_B(t) + C_B(t) = 1 \text{ e } I_C(t) + S_C(t) = 1$$

Usando as igualdades anteriores e substituindo no sistema (2.10), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_B(t) = (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t) - I_B(t)) - \beta_B S_B(t) I_C(t) \\ I'_B(t) = \beta_B S_B(t) I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ -(S'_B(t) + I'_B(t)) = \lambda_B I_B(t) - (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t) - I_B(t)), \\ -I'_C(t) = \mu_{CP} I_C(t) - \beta_C S_C(t) I_B(t), \\ I'_C(t) = \beta_C(1 - I_C(t)) I_B(t) - \mu_{CP} I_C(t). \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Note que a terceira equação é combinação linear das duas primeiras equações e a quarta equação é múltipla da quinta, então temos um sistema equivalente que descreve a dinâmica da população de bovinos e carrapatos, dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_B(t) = (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t) - I_B(t)) - \beta_B S_B(t) I_C(t), \\ I'_B(t) = \beta_B S_B(t) I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ I'_C(t) = \beta_C(1 - I_C(t)) I_B(t) - \mu_{CP} I_C(t), \end{array} \right. \quad (2.13)$$

definido na região  $\Omega = \{(S_B(t), I_B(t), I_C(t)) : 0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq 1, 0 \leq I_C(t) \leq 1\}$ .

**Proposição 2.2.1** *A região  $\Omega = \{(S_B(t), I_B(t), I_C(t)) : 0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq 1, 0 \leq I_C(t) \leq 1\}$  é um conjunto positivamente invariante para o sistema (2.13).*

**Demonstração:** Vamos mostrar que se  $(S_B(0), I_B(0), I_C(0)) \in \Omega$ , então  $(S_B(t), I_B(t), I_C(t)) \in \Omega$ , para todo  $t \geq 0$ .

De fato, do sistema (2.13) temos

$$\begin{aligned} S'_B(t) + I'_B(t) &= (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t) - I_B(t)) - \lambda_B I_B(t), \\ &= (\mu_B + \alpha_B) - (\mu_B + \alpha_B)(S_B(t) + I_B(t)) - \lambda_B I_B(t), \\ &\leq (\mu_B + \alpha_B) - (\mu_B + \alpha_B)(S_B(t) + I_B(t)). \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos, faremos a substituição  $(\mu_B + \alpha_B) = a$ , daí

$$S'_B(t) + I'_B(t) \leq a - a(S_B(t) + I_B(t)). \quad (2.14)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.14) pelo fator integrante  $e^{at}$ , vem

$$e^{at}(S'_B(t) + I'_B(t)) + e^{at}a(S_B(t) + I_B(t)) \leq e^{at}a,$$

disto segue que

$$\frac{d}{dt} [e^{at}(S_B(t) + I_B(t))] \leq e^{at}a$$

Integrando ambos os lados, dessa última desigualdade

$$\int_0^t \frac{d}{ds} e^{as}(S_B(s) + I_B(s)) ds \leq \int_0^t e^{as} a ds,$$

logo

$$e^{as}(S_B(s) + I_B(s))|_0^t \leq e^{as}|_0^t,$$

desta forma

$$e^{at}(S_B(t) + I_B(t)) \leq [S_B(0) + I_B(0) - 1] + e^{at},$$

assim pelo fato de  $e^{-at} \leq 1, t \geq 0$ , segue que

$$S_B(t) + I_B(t) \leq e^{-at}(S_B(0) + I_B(0) - 1) + 1 \leq S_B(0) + I_B(0).$$

Portanto,

$$0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq S_B(0) + I_B(0) \leq 1.$$

Mostraremos agora que  $0 \leq I_C(t) \leq 1$ . Do sistema (2.13), vem

$$\begin{aligned} I'_C(t) &= \beta_C(1 - I_C(t))I_B(t) - \mu_{CP}I_C(t), \\ &\leq \beta_C(1 - I_C(t)) - \mu_{CP}I_C(t), \\ &\leq (\beta_C + \mu_{CP}) - (\beta_C + \mu_{CP})I_C(t). \end{aligned}$$

Dai

$$I'_C(t) + (\beta_C + \mu_C p)I_C(t) \leq (\beta_C + \mu_C p).$$

Fazendo  $(\beta_C + \mu_C p) = a$  e multiplicando ambos os membros da última desigualdade pelo fator integrante  $e^{at}$ , de forma semelhante ao passo anterior, segue que

$$0 \leq I_C(t) \leq 1.$$

Portanto, pela Definição (2.1.9) segue que  $\Omega$  é invariante.

## 2.3 Análise do Modelo

Nesta seção, estudamos a existência e estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema (2.13). Esta análise nos permite estudar diferentes cenários relativos à propagação da doença Babesiose na população bovina causada por contato direto com carrapatos infectados [24, 39]. A seguir introduziremos o conceito de razão de reprodução básica que é muito utilizado em epidemiologia.

### 2.3.1 Taxa de Reprodução Básica

A transmissão de uma infecção pode ser quantificada por seu número reprodução básica,  $R_0$ , que é definido como o número de infecções secundárias produzidas por cada indivíduo infectado dentro de uma categoria particular de risco, logo após o início de uma epidemia [29, 38, 32].

Em alguns casos especiais, pode-se facilmente calcular ou estimar esse número. Várias hipóteses que envolvem diversas variáveis, como taxa de transmissão, taxa de natalidade, entre outras, são levadas em consideração [31].

Para processos epidêmicos simples, este parâmetro determina um limite, ou seja, quando  $R_0 > 1$ , uma infecção típica gera, em média, uma infecção secundária, levando a uma epidemia. Em contraste, quando  $R_0 < 1$ , infecciosos normalmente dão origem, em média, a menos de uma infecção secundária, e a prevalência da infecção não pode aumentar [29, 32].

Neste trabalho, usamos o parâmetro descrito por [3]

$$R_0 = \frac{\beta_B \beta_C}{\lambda_B \mu_C p}. \quad (2.15)$$

A motivação para usar esse parâmetro, está no fato de que o  $R_0$  foi considerado de forma que o ponto de equilíbrio livre da doença seja localmente assintoticamente estável.

A seguir apresentaremos os pontos de equilíbrio para o modelo da Babesiose.

### 2.3.2 Pontos de Equilíbrio do Modelo

**Teorema 2.3.1** *O sistema (2.13) tem pontos de equilíbrio,  $F_1 = (S_{B_1}(t), I_{B_1}(t), I_{C_1}(t)) = (1, 0, 0)$ , que é o ponto livre da doença para todos os parâmetros do sistema e  $F_2 = (S_{B_2}(t), I_{B_2}(t), I_{C_2}(t))$ , que é o ponto de equilíbrio endêmico. Se  $R_0 > 1$ , então  $F_2$  é único no interior de  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Denotamos por  $(S_{B_i}(t), I_{B_i}(t), I_{C_i}(t))$  para  $i = 1, 2$ , os pontos de equilíbrio do sistema (2.13), onde o estado constante é  $S'_B(t) = 0, I'_B(t) = 0, I'_C(t) = 0$ . Então

$$\begin{cases} (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t) - I_B(t)) - \beta_B S_B(t) I_C(t) = 0, \\ \beta_B S_B(t) I_C(t) - \lambda_B I_B(t) = 0, \\ \beta_C(1 - I_C(t)) I_B(t) - \mu_C p I_C(t) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Somando a primeira e a segunda equação de (2.16) temos

$$(\mu_B + \alpha_B) - S_B(t)(\mu_B + \alpha_B) - I_B(t)(\mu_B + \alpha_B) = \lambda_B I_B(t),$$

disto obtemos que

$$I_B(t) = \frac{(\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t))}{(\mu_B + \alpha_B) + \lambda_B}. \quad (2.17)$$

Da terceira equação do sistema (2.16), vem

$$\begin{aligned} \beta_C(1 - I_C(t)) I_B(t) - \mu_C p I_C(t) &= 0 \\ I_B(t)(\beta_C - \beta_C I_C(t)) &= \mu_C p I_C(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_B(t) = \frac{\mu_{CP}I_C(t)}{\beta_C(1 - I_C(t))}. \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) na segunda equação de (2.16)

$$\beta_B S_B(t) I_C(t) - \lambda_B \left[ \frac{\mu_{CP} I_C(t)}{\beta_C(1 - I_C(t))} \right] = 0.$$

Dessa forma

$$I_C(t) \left[ \beta_B S_B(t) - \frac{\mu_{CP} \lambda_B}{\beta_C(1 - I_C(t))} \right] = 0. \quad (2.19)$$

Logo, em (2.19) há duas possibilidades

1.  $I_C(t) = 0$ , disto temos que  $I_B(t) = 0$  e  $S_B(t) = 1$ , assim

$$F_1 = (S_{B_1}(t), I_{B_1}(t), I_{C_1}(t)) = (1, 0, 0).$$

2.  $I_C(t) \neq 0$

$$\beta_B S_B(t) - \frac{\mu_{CP} \lambda_B}{\beta_C(1 - I_C(t))} = 0,$$

$$S_{B_2}(t) = \frac{\mu_{CP} \lambda_B}{\beta_C \beta_B (1 - I_C(t))}. \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.17) e igualando a (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha_B + \mu_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - \frac{(\alpha_B + \mu_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} \cdot \frac{\lambda_B \mu_{CP}}{\beta_C \beta_B (1 - I_C(t))} - \frac{\mu_{CP} I_C(t)}{\beta_C (1 - I_C(t))} &= 0, \\ \frac{(\alpha_B + \mu_B) \beta_B \beta_C (1 - I_C(t)) - (\alpha_B + \mu_B) \lambda_B \mu_{CP} - (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B) \beta_B \mu_{CP} I_C(t)}{(\alpha_B + \mu_B + \lambda_B) \beta_B \beta_C (1 - I_C(t))} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_{C_2}(t) = \frac{(\alpha_B + \mu_B)(\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_{CP})}{(\alpha_B + \mu_B) \beta_B \beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B) \beta_B \mu_{CP}}. \quad (2.21)$$

Para calcular  $S_{B_2}(t)$ , substituimos (2.21) em (2.20)

$$\begin{aligned}
 S_{B_2}(t) &= \frac{\lambda_B \mu_C \rho}{\beta_B \beta_C \left[ 1 - \left( \frac{(\alpha_B + \mu_B)(\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_C \rho)}{(\alpha_B + \mu_B)\beta_B \beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\beta_B \mu_C \rho} \right) \right]}, \\
 &= \frac{\lambda_B \mu_C \rho [(\alpha_B + \mu_B)\beta_B \beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\beta_B \mu_C \rho]}{\beta_B \beta_C (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\beta_B \mu_C \rho + \beta_B \beta_C (\alpha_B + \mu_B)\lambda_B \mu_C \rho}, \\
 &= \frac{\lambda_B (\alpha_B + \mu_B)\beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\lambda_B}{\beta_C [\beta_B (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B) + \lambda_B (\alpha_B + \mu_B)]}.
 \end{aligned}$$

Logo

$$S_{B_2}(t) = \frac{\lambda_B (\alpha_B + \mu_B)\beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\lambda_B}{\beta_C [\alpha_B (\beta_B + \lambda_B) + \lambda_B \mu_B + \beta_B (\lambda_B + \mu_B)]}. \quad (2.22)$$

Resta ainda calcular  $I_{B_2}(t)$ . Substituindo (2.21) em (2.18) obtemos

$$\begin{aligned}
 I_{B_2}(t) &= \frac{\mu_C \rho \left[ \frac{(\mu_B + \alpha_B)(\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_C \rho)}{(\mu_B + \alpha_B)\beta_B \beta_C + (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)\beta_B \mu_C \rho} \right]}{\beta_C \left[ 1 - \left( \frac{(\alpha_B + \mu_B)(\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_C \rho)}{(\alpha_B + \mu_B)\beta_B \beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\beta_B \mu_C \rho} \right) \right]}, \\
 &= \frac{\mu_C \rho \left[ \frac{(\mu_B + \alpha_B)\beta_B \beta_C - (\alpha_B + \mu_B)\lambda_B \mu_C \rho}{(\mu_B + \alpha_B)\beta_B \beta_C + (\mu_B + \alpha_B)\beta_B \mu_C \rho + \lambda_B \beta_B \mu_C \rho} \right]}{\beta_C \left[ \frac{(\mu_B + \alpha_B)\beta_B \mu_C \rho + \lambda_B \beta_B \mu_C \rho + (\mu_B + \alpha_B)\lambda_B \mu_C \rho}{(\mu_B + \alpha_B)\beta_B \beta_C + (\mu_B + \alpha_B)\beta_B \mu_C \rho + \lambda_B \beta_B \mu_C \rho} \right]}, \\
 &= \frac{(\mu_B + \alpha_B)\beta_C \beta_B - \mu_C \rho (\mu_B + \alpha_B)\lambda_B}{(\mu_B + \alpha_B)\beta_B \beta_C + \lambda_B \beta_C \beta_B + (\mu_B + \alpha_B)\lambda_B \beta_C}.
 \end{aligned}$$

Então,

$$I_{B_2}(t) = \frac{(\mu_B + \alpha_B)(\beta_C \beta_B - \lambda_B \mu_C \rho)}{\beta_C [\alpha_B (\beta_B + \lambda_B) + \mu_B \lambda_B + \beta_B (\mu_B + \lambda_B)]}. \quad (2.23)$$

Observe que se  $R_0 > 1$ , então  $(\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_C \rho) > 0$  e como todos os parâmetros são positivos, temos que

$$S_{B_2}(t) > 0, \quad I_{B_2}(t) > 0, \quad I_{C_2}(t) > 0.$$

Assim, o ponto de equilíbrio endêmico  $F_2$  é único no interior de  $\Omega$ .

Agora, vamos demonstrar que se  $R_0 \leq 1$ , o único ponto de equilíbrio em  $\Omega$  é o ponto livre da doença  $(S_{B_1}(t), I_{B_1}(t), I_{C_1}(t)) = (1, 0, 0)$ . Para isso, há dois casos a considerar

1.  $R_0 < 1$

Nesse caso,  $\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_C \rho < 0$ . Assim, olhando para as frações que definem as

coordenadas do ponto endêmico, é fácil verificar que

$$I_{B_2}(t) < 0, I_{C_2}(t) < 0,$$

exceto quando  $\mu_B + \alpha_B = 0$ . No entanto, isto não é possível pois a taxa de nascimento de bovinos,  $\mu_B > 0$ . Portanto, quando  $\mu_B + \alpha_B \neq 0$  este ponto permanece fora da região  $\Omega$ .

## 2. $R_0 = 1$

Neste caso,  $\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_C p = 0$ , então temos que  $I_{B_2}(t) = 0$ ,  $I_{C_2}(t) = 0$  e  $S_{B_2}(t) = 1$ .

Observe que este último caso tem sentido real porque, quando  $R_0 = 1$ , temos  $I_{B_2}(t) = 0$ ,  $I_{C_2}(t) = 0$ , isto é, o número de infectados é 0 e, por conseguinte, o ponto endêmico não pode existir.

### 2.3.3 Análise de Estabilidade

**Teorema 2.3.2** *Se  $R_0 < 1$  então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $F_1$ ) é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** A matriz Jacobiana para o sistema (2.13) é

$$J(S_B(t), I_B(t), I_C(t)) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C) & -(\mu_B + \alpha_B) & -\beta_B S_B(t) \\ \beta_B I_C(t) & -\lambda_B & \beta_B S_B(t) \\ 0 & \beta_C(1 - I_C(t)) & -I_B(t)\beta_C - \mu_C p \end{vmatrix},$$

Logo,

$$J(F_1) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) & -(\mu_B + \alpha_B) & -\beta_B \\ 0 & -\lambda_B & \beta_B \\ 0 & \beta_C & -\mu_C p \end{vmatrix}.$$

Os autovalores obtidos de  $\det(J(F_1) - \lambda I_d) = 0$ , são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\mu_B + \alpha_B), \\ \lambda_2 &= \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) + \sqrt{(\lambda_B - \mu_C p)^2 + 4\beta_B \beta_C}}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) - \sqrt{(\lambda_B - \mu_C p)^2 + 4\beta_B \beta_C}}{2}. \end{aligned}$$

É fácil ver que  $Re(\lambda_1) < 0$  e  $Re(\lambda_3) < 0$ . Por outro lado, usando a hipótese  $R_0 < 1$ , para  $\lambda_2$  temos

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) + \sqrt{\lambda_B^2 + \mu_C^2 p^2 - 2\lambda_B \mu_C p + 4\beta_B \beta_C}}{2}, \\ &< \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) + \sqrt{\lambda_B^2 + \mu_C^2 p^2 + 2\lambda_B \mu_C p}}{2}, \\ &= \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) + \sqrt{(\lambda_B + \mu_C p)^2}}{2} = 0.\end{aligned}$$

Portanto,  $Re(\lambda_2) < 0$ . Como a parte real dos autovalores é negativa, então pelo Teorema 2.1.2 o ponto de equilíbrio livre da doença  $F_1$  é localmente assintoticamente estável. ■

**Teorema 2.3.3** *Se  $R_0 \leq 1$  então o ponto de equilíbrio ( $F_1$ ) é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Inicialmente vamos fazer a mudança de variável no sistema (2.13) para mover até a origem do sistema de coordenadas o ponto de equilíbrio livre da doença.

$$\begin{aligned}X_B(t) &= 1 - S_B(t), \\ S_B(t) &= 1 - X_B(t), \\ X'_B(t) &= -S'_B(t).\end{aligned}$$

Substituindo no sistema (2.13), temos

$$\begin{cases} X'_B(t) &= -(\mu_B + \alpha_B)X_B(t) + (\mu_B + \alpha_B)I_B(t) + \beta_B(1 - X_B(t))I_C(t), \\ I'_B(t) &= \beta_B(t)(1 - X_B(t))I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ I'_C(t) &= \beta_C(1 - I_C(t))I_B(t) - \mu_C p I_C(t). \end{cases} \quad (2.24)$$

Para abreviar, escreveremos (2.24) como

$$(X'_B(t), I'_B(t), I'_C(t)) = F(X_B(t), I_B(t), I_C(t)).$$

Por outro lado, considere  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definida por

$$V(t) = V(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) = \beta_C I_B(t) + \lambda_B I_C(t).$$

Mostraremos que  $V$  é uma função Lyapunov. De fato, é fácil ver que  $V \in C^1(\Omega)$ , então

$$\begin{aligned}
 V'(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) &= \langle \nabla V(X_B(t), I_B(t), I_C(t)), F(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) \rangle \\
 &= \beta_C \beta_B I_C(t) - \beta_C \beta_B X_B(t) I_C(t) - \beta_C \lambda_B I_B(t) \\
 &\quad + \lambda_B \beta_C I_B(t) - \lambda_B \beta_C I_C(t) I_B(t) - \lambda_B \mu_{CP} I_C(t), \\
 &= (\beta_C \beta_B - \mu_{CP}) I_C(t) - \beta_C \beta_B X_B(t) I_C(t) - \lambda_B \beta_C I_C(t) I_B(t) \\
 &= I_C(t) (\beta_C \beta_B - \mu_{CP} - \beta_C \beta_B X_B(t) - \lambda_B \beta_C I_B(t)).
 \end{aligned}$$

Usando a hipótese  $R_0 \leq 1$ , temos que  $\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_{CP} \leq 0$ , logo  $V'(t) \leq 0$  o que implica que  $V(t)$  é uma função Lyapunov, pela Definição (2.1.8).

Por outro lado, com o objetivo de aplicar o Teorema de La-Salle, temos que encontrar o maior subconjunto invariante contido em  $V'(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) = 0$ . Pela conta acima, vemos que há duas possibilidades,  $I_C(t) = 0$  ou  $\beta_C \beta_B - \mu_{CP} - \beta_C \beta_B X_B(t) - \lambda_B \beta_C I_B(t) = 0$ . Como a segunda possibilidade não pode ser zero, então a única opção é  $I_C(t) = 0$ . Portanto, obtemos que o conjunto em que

$$V'(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) = 0$$

e dado por

$$\{(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) : I_C(t) = 0\}.$$

Com isso, concluí-se que o ponto de equilíbrio livre da doença ( $F_1$ ) é o maior subconjunto invariante em  $\{(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) : I_C(t) = 0\}$ . Portanto pelo Teorema 2.1.5 o ponto de equilíbrio ( $F_1$ ) é globalmente assintoticamente estável.

## 2.4 Simulação Numérica

Nesta seção, simulamos algumas situações para verificar o efeito que alguns parâmetros tem sobre a dinâmica da doença Babesiose em populações bovinas e de carrapatos. Isto é importante do ponto de vista epidemiológico, pois é possível obter as melhores estratégias em saúde pública e animal para combater a doença [3].

Para realizar as simulações numéricas, levamos em conta que 60% dos carrapatos são infectados pelo Babesia, aproximadamente 51,84% da população bovina são infectados por Babesia, apenas 10% é controlado e a transmissão vertical é de 90% [22]. Assumimos como condição inicial  $S_B(0) = 0,3756$ ,  $I_B(0) = 0,5184$ ,  $I_C(0) = 0,60$ .

### 2.4.1 Estabilidade Ecológica

Na primeira simulação, consideramos que a propagação da Babesiose na população bovina e a população de carrapatos está em equilíbrio, ou seja, as proporções de bovinos suscetíveis, bovinos infectados e carrapatos infectados são positivas e constantes durante todo o tempo.

Este quadro é possível tendo os parâmetros  $\mu_B$ ,  $\mu_C$ ,  $\alpha_B$  e  $p$  constantes por todo o tempo. Para realizar as simulações numéricas foram utilizados os parâmetros dados pela tabela (2.1) e foram retirados de [3].

Tabela 2.1: Parâmetros para simulação

Fonte: Aranda, et al.

<i>Parametros</i>	$\mu_B$	$\mu_T$	$\lambda_B$	$\alpha_B$	$p$	$\beta_B$	$\beta_T$
<i>Valores</i>	0,0002999	0,001609	0,00265	0.001	0,1	0.00061	0.00048

A estabilidade ecológica pode ser vista na figura (2.2). A taxa de reprodução básica usada foi  $R_0 = 6.8$ .

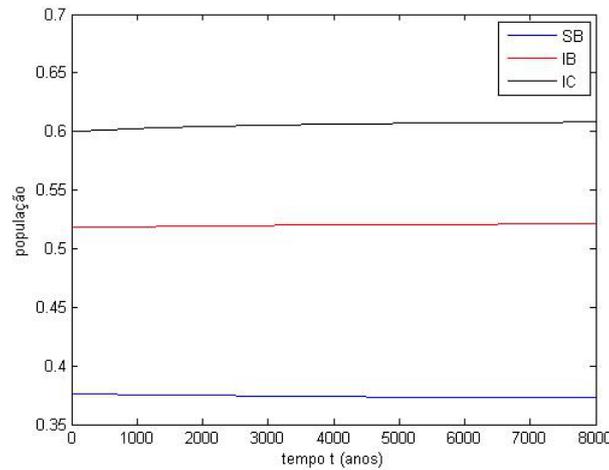


Figura 2.2 – Estabilidade Ecológica  $\beta_B = 0.00061$ ,  $\beta_C = 0.00048$ ,  $\alpha_B = 0.001$ .

Fonte: Aranda, et al.

Os autovalores da Matriz Jacobiana são todos negativos,  $(-0,7489, -0,7480, -0,7058)$ . Portanto, pelo Teorema 2.1.2, o ponto de equilíbrio é localmente assintoticamente estável.

### 2.4.2 Ponto Livre da Doença

Aqui nós simulamos um quadro em que a transmissão da Babesia é desacelerada com  $\beta_B = 0,0003$ ,  $\lambda_B = 0,0265$  e  $p = 0,5$  o que indica que a taxa de transmissão vertical é de 50%. Os outros parâmetros permanecem constantes durante todo o tempo de modo que  $R_0 < 1$  e foram retirados da Tabela (2.1). Tomamos  $R_0 = 0.33$ . A Figura (2.3) mostra que a solução do sistema se aproxima do ponto de equilíbrio livre da doença.

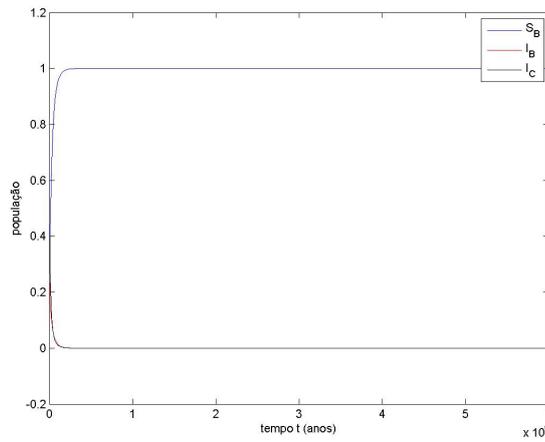


Figura 2.3 – Dinâmica quando  $\lambda_B = 0,0265$  e  $p = 0,5$   
Fonte: Aranda, et al.

Os autovalores da matriz Jacobiana são negativos,  $(-0,0265, -0,0013, -0,0008)$ . Portanto, pelo Teorema 2.1.2 o ponto de equilíbrio livre da doença é localmente assintoticamente estável.

### 2.4.3 Ponto de Equilíbrio Endêmico

Nós simulamos o efeito de condições iniciais diferentes em uma situação com alta transmissão da Babesia na população bovina, com  $\beta_B = 0,006$ , alta transmissão vertical na população de carrapatos, com  $p = 0,1$  pelo fato de que tem se uma situação de epidemia. Foi utilizado  $R_0 = 67,54$ . O restante dos parâmetros são constantes para  $R_0 > 1$  e foram retirados da Tabela (2.1). Isso pode ser visto nas figuras (2.4) e (2.5).

Os autovalores da matriz Jacobiana são negativos,  $J(0,0498; 0,7893; 0.70) = (-0,0014; -0,0014; -0,0037)$ . Portanto o ponto de equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável.

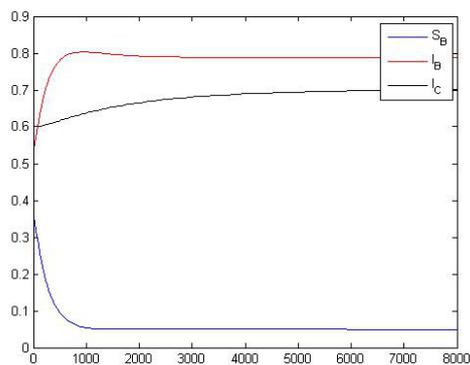


Figura 2.4 – Dinâmica quando  $S_B(0) = 0,3756$ ,  $I_B(0) = 0,5184$ ,  $I_C(0) = 0,60$ .  
Fonte: Aranda, et al.

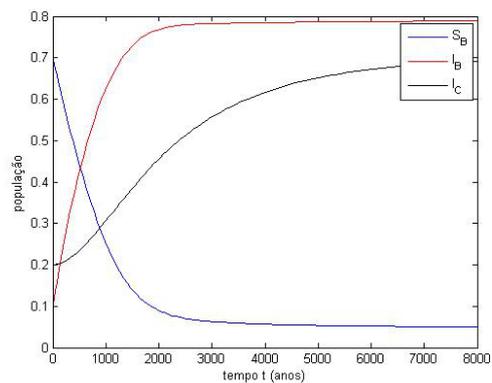


Figura 2.5 – Dinâmica quando  $S_B(0) = 0,70$ ,  $I_B(0) = 0,10$ ,  $I_C(0) = 0,20$ .  
Fonte: Aranda, et al.

Observe nas figuras (2.4) e (2.5), que embora as condições iniciais sejam diferentes, a solução do sistema converge para o ponto de equilíbrio endêmico  $(S_B, I_B, I_C) = (0,0498; 0,7893; 0.70)$ , o que verifica os resultados teóricos obtidos.

# Capítulo 3

## CÁLCULO FRACIONÁRIO

O conceito de cálculo fracionário surgiu a partir de uma questão proposta no ano de 1695 pelo Marquês de *L'Hopital*. Em uma carta datada de 30 de setembro de 1695, ele questiona Leibniz sobre a derivada de ordem  $1/2$  de uma função. A partir daí, muitos matemáticos encontraram várias definições que se encaixam na ideia de integral e derivada de ordem não inteira.

Em 1969, Caputo em seu livro *Elasticità e Dissipazione* [5], propôs uma definição para a derivada de ordem fracionária, com a qual resolveu problemas de viscoelasticidade. Pouco tempo depois, algumas interpretações físicas e geométricas para a derivada e a integral fracionárias foram apresentadas, dentre elas destacamos Podlubny [4] que apresenta interpretações físicas e geométricas para integrais e derivadas de ordem arbitrária para casos particulares e Lorenzo e Hartley, [41, 42], que em 1988, apresentaram uma interpretação geométrica para a derivada fracionária.

Até pouco tempo, o cálculo de ordem arbitrária era visto apenas como uma teoria matemática sem muitas aplicações, mas nos últimos anos houve uma expansão do uso dessa teoria na modelagem de problemas reais em vários ramos da ciência, desde a física da difusão à controle de sistemas, finanças e economia [43]. Em epidemiologia é possível encontrar inúmeras aplicações, dentre elas podemos destacar, os trabalhos de [33], que propõe um modelo de ordem fracionária para a Dengue e de [38], no qual, o autor escreve um modelo fracionário para a dinâmica da Influenza (H1N1) e por meio de simulação numérica, consegue concluir que o modelo de ordem fracionária se ajusta melhor a um conjunto de dados reais se comparado ao modelo de equações diferenciais ordinárias. Além dessas situações, é possível encontrar aplicações em outras áreas, como processos estocásticos, ciências e engenharia.

Além dessas aplicações, quando se tem o interesse em introduzir o efeito de memória no sistema, as funções de ordem não inteira são um instrumento poderoso para a descrição de propriedades de memória e hereditárias de diferentes substâncias e até mesmo na memória com respeito ao aprendizado repetido [62]. Esta é a maior vantagem dos modelos de ordem

fracionária em comparação aos de ordem inteira, nos quais, tais efeitos são negligenciados [40]. A viscoelasticidade é o campo onde se concentra a sua maior aplicação, isso devido ao seu fenômeno de tratar de efeitos de memória [43, 45, 44].

Nas últimas décadas, as publicações tem se concentrado em processamento de sinais, modelagem e controle. A aplicação das técnicas do Cálculo Fracionário tem permitido generalizações e importantes resultados em diversas áreas do conhecimento, tais como, finanças, processos estocásticos e em diversas áreas dentro das ciências aplicadas e engenharia [41, 61]. Além disso, é uma importante ferramenta para refinar a descrição de fenômenos naturais, em particular aqueles que possuem dependência temporal.

Assim como a resolução de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes tem sua solução dada, em muitos casos, em termos da função exponencial, uma equação diferencial de ordem não inteira tem, em diversos casos, a solução dada em termos da função de Mittag-Leffer [48]. Com isso, ao entender a forma que a função de Mittag-Leffer generaliza a função exponencial estamos, de certa forma, compreendendo o porque de, em alguns casos, uma equação diferencial de ordem não-inteira fornecer uma descrição mais fina de um dado fenômeno do que a respectiva equação de ordem inteira.

Neste capítulo serão apresentados conceitos válidos para o cálculo fracionário. Os tópicos aqui apresentados são fundamentais para o desenvolvimento do próximo capítulo e foram retirados de [48, 49].

### 3.1 Conceitos Preliminares

Iniciaremos com as definições de função Gama e função Beta. A função Gama é utilizada para a definição de integrais de ordem arbitrária e a função Beta é útil para obtermos algumas identidades algébricas.

**Definição 3.1.1** *A função gama é a integral imprópria definida para  $\alpha > 0$  dada por*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

Quando faz-se referência a função Gama, fica implícito que  $\alpha > 0$ , para que a convergência seja garantida.

A função Gama possui algumas propriedades úteis para o cálculo fracionário, dentre as quais podemos destacar

**Propriedade 3.1.1** *Para a função Gama são válidas as afirmações:*

$$i - \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha);$$

ii -  $\Gamma(1) = 1!$ ;

iii -  $\Gamma(n + 1) = n!$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 3.1.2** A função Beta é definida como

$$B(\alpha, \mu) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\mu-1}dx, \text{ para } \alpha > 0, \mu > 0.$$

**Teorema 3.1.1** As funções Beta e Gama se relacionam por meio da identidade

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

A demonstração pode ser encontrada em [48].

## 3.2 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um conceito relevante para a resolução de equações envolvendo derivadas e integrais fracionárias.

**Definição 3.2.1** Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $t \geq 0$ . Então a integral

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

é chamada transformada de Laplace de  $f$ , desde que a integral exista e  $s$  é chamado parâmetro da transformada.

A seguir estão listadas algumas propriedades importantes. As demonstrações são imediatas e podem ser encontradas em [39].

**Propriedade 3.2.1** Para a Transformada de Laplace são válidas as afirmações:

i - Seja  $\mathcal{L}[f] = F(s)$  e  $\mathcal{L}[g] = G(s)$ , então  $\mathcal{L}[af + bg] = aF(s) + bG(s)$ ;

ii - Seja  $\mathcal{L}(f) = F(s)$ , então  $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$ , para  $s > a$ .

iii -  $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$ .

**Propriedade 3.2.2** Se  $f$  e  $f'$  são integráveis em  $[0, b]$ , para todo  $b > 0$ , se  $f$  for de ordem exponencial, então existe  $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$ .

Em geral, a transformada de Laplace do produto de duas funções não é o produto das transformadas, porém a seguir será introduzido o conceito de produto de convolução, que é um produto conveniente para que a propriedade (3.2.3) seja válida, ou seja, a transformada de Laplace do produto de convolução é igual ao produto das transformadas.

**Definição 3.2.2** *Sejam  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de ordem exponencial  $\alpha$  e  $\beta$ , com transformadas de Laplace  $F(s)$  e  $G(s)$ , respectivamente, no intervalo  $[0, \infty)$ . Defina-se a convolução de  $f(t)$  e  $g(t)$ , denotada por  $(f * g)(t)$ , como*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy.$$

**Propriedade 3.2.3** *Sejam  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , então,  $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$ .*

A demonstração pode ser encontrada em [39].

### 3.3 Integral Fracionária

Inicialmente será feita a formalização da integral fracionária segundo Riemann-Liouville. Em seguida, a definição de derivada fracionária será feita a partir das ideias de Riemann-Liouville e também de Caputo. Ambas necessitam da definição de integral fracionária para a formulação da derivada fracionária, por esse motivo é necessário definir primeiro a integral fracionária e depois a derivada fracionária.

A seguir a motivação para a definição de integral fracionária.

**Definição 3.3.1** *Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua por partes no intervalo  $[0, \infty)$  e integrável em todo subintervalo de  $[0, \infty)$ . Denotamos por  $Jf(t)$  o operador integral*

$$Jf(t) = \int_0^t f(s)ds$$

e por  $J^k f(t) = (JJ\dots J)f(t)$ .

Observe que

$$J^2 f(t) = \int_0^t Jf(s)ds.$$

Utilizando o Teorema de Fubinni, vem

$$\begin{aligned} J^2 f(t) &= \int_0^t \int_0^s f(\xi)d\xi ds, \\ &= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi)dsd\xi, \\ &= \int_0^t f(\xi)(t-\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Dai

$$\begin{aligned}
 J^3 f(t) &= \int_0^t J^2 f(s) ds, \\
 &= \int_0^t \int_0^s f(\xi)(s - \xi) d\xi ds, \\
 &= \int_0^t \int_\xi^t (s - \xi) f(\xi) ds d\xi, \\
 &= \int_0^t \frac{(t - \xi)^2}{2} f(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Usando esse procedimento sucessivamente, temos

$$J^n f(t) = \int_0^t \frac{(t - s)^{n-1}}{(n - 1)!} f(s) ds.$$

Como  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  para  $n \in \mathbb{Z}^+$ , vem

$$J^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t - s)^{n-1} f(s) ds. \quad (3.1)$$

A equação (3.1) continua bem definida para  $\alpha > 0$ . O que motiva a seguinte definição

**Definição 3.3.2** *Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\alpha > 0$  e  $f$  uma função contínua por partes em  $[0, \infty)$  e integrável em qualquer subintervalo de  $[0, \infty)$ . Então para  $t > 0$  a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  é dada por*

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (3.2)$$

**Observação 3.3.1** *Definimos  $\mathcal{C}$  como sendo a classe das funções que satisfazem a Definição 3.3.2. Para mais informações veja [48].*

**Exemplo 3.3.1** *De acordo com a Definição 3.3.2 é possível calcular a integral de ordem arbitrária  $\alpha$ , de  $f(t) = t^\mu$ , com  $\mu > -1$ .*

De fato, seja

$$J^\alpha t^\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} s^\mu ds.$$

Fazendo  $u = \frac{s}{t}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 J^\alpha t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - ut)^{\alpha-1} (ut)^\mu t du, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - u)^{\alpha-1} u^\mu t^{\mu+1} du, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^\alpha (1 - u)^{\alpha-1} u^\mu t^\mu du, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha+\mu} (1 - u)^{\alpha-1} u^\mu du.
 \end{aligned}$$

Então,

$$J^\alpha t^\mu = \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\mu du. \quad (3.3)$$

Tomando  $p = \alpha$  e  $q = \mu + 1$  em (3.3), temos

$$J^\alpha t^\mu = \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du. \quad (3.4)$$

Usando a Definição 3.1.2, podemos escrever (3.4) como

$$J^\alpha t^\mu = \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} B(q, p), \quad \text{onde } B(p, q) = B(\alpha, \mu + 1).$$

Usando o Teorema 3.1.1, vem

$$J^\alpha t^\mu = \frac{t^{\alpha+\mu} \Gamma(\alpha) \Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + \mu + 1)}, \quad (3.5)$$

$$= \frac{t^{\alpha+\mu} \Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu + 1)}. \quad (3.6)$$

**Proposição 3.3.1** *Seja  $\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ,  $t > 0$ . Então  $(\Phi_\alpha * f)(t) = J^\alpha f(t)$ .*

**Demonstração:** Pela Definição 3.2.2 e pela definição de produto convolução, vem

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha * f)(t) &= \int_0^t \Phi_\alpha(t-s) f(s) ds, \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\Phi_\alpha * f)(t) = J^\alpha f(t).$$

**Teorema 3.3.1** *Sejam  $\alpha, \beta \geq 0$  temos que  $J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}$ , vale também  $J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha$ .*

**Demonstração:** Vamos mostrar que

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\alpha+\beta}(t).$$

Usando as funções auxiliares:  $\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  e  $\Phi_\beta(t) = \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \int_0^t \Phi_\alpha(t-y) \Phi_\beta(y) dy, \\ &= \int_0^t \frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dy. \end{aligned}$$

Fazendo  $u = \frac{y}{t}$ , vem

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \int_0^1 \frac{(t-ut)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{(ut)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} t du, \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du.\end{aligned}$$

Tomando  $x = 1 - u$ , temos

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_1^0 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} (-dx), \\ \Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Multiplicando e dividindo (3.7) por  $\Gamma(\alpha + \beta)$

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.\tag{3.8}$$

O integrando de (3.8) é a função  $B(\alpha, \beta)$ , logo

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta)} B(\alpha, \beta).$$

Usando o Teorema (3.1.1), vem

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1} \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Então,

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Logo,

$$\Phi_\alpha * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\alpha+\beta}(t).\tag{3.9}$$

Pela Proposição 3.3.1, temos

$$(J^\alpha f)(t) = (\Phi_\alpha * f)(t).\tag{3.10}$$

De (3.10), (3.9) e da propriedade associativa da convolução, obtemos

$$\begin{aligned}(J^\alpha J^\beta f)(t) &= \Phi_\alpha(t) * J^\beta f(t) \\ &= \Phi_\alpha(t) * [\Phi_\beta(t) * f(t)], \\ &= \Phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t).\end{aligned}$$

Portanto,

$$(J^\alpha J^\beta f)(t) = (J^{\alpha+\beta} f)(t).$$

A comutatividade é imediata.

## 3.4 Derivada Fracionária

A seguir apresentaremos a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville e segundo Caputo.

### 3.4.1 Derivada fracionária segundo Riemann-Liouville

A definição de derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville é consequência direta do Teorema Fundamental do Cálculo. Sabemos desse Teorema que se  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e se  $F : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

então  $F$  é diferenciável e  $F' = f$ .

Usando a notação de integral fracionária para  $(Jf)(x) = \int_0^x f(s)ds$  e a notação  $(Df)(t) = f'(t)$  para o operador Derivada, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que  $(DJf)(t) = f(t)$ . De forma geral, é fácil ver por indução finita que para todo  $m \in \mathbb{N}$  a relação

$$(D^m J^m f)(t) = f(t), \tag{3.11}$$

é verdadeira, em que  $D^m f = (DD\dots D)f$  é a composição  $m$  vezes do operador  $D$  ou derivada de ordem  $m$  de  $f$ . Vale lembrar que o operador Derivada satisfaz a lei dos expoentes  $D^m D^n f = D^{m+n} f$ .

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  tal que  $m$  é o menor inteiro maior que  $n$  e  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que admite derivadas até ordem  $n$ , usando a relação (3.11) temos

$$D^{m-n} J^{m-n} f(t) = f(t).$$

Por outro lado, aplicando o operador  $D^n$  em ambos os lados

$$D^m J^{m-n} = D^n f(t),$$

como a integral fracionária pode ser definida para números não inteiros  $\alpha > 0$ , trocando  $n$  por  $\alpha$  na expressão acima obtemos

$$D^\alpha f(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t).$$

Portanto a discussão anterior motiva a seguinte definição formal.

**Definição 3.4.1** *Sejam  $\beta > 0$  e  $n$  o menor inteiro maior que  $\beta$ , assim a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $\beta$  da função  $f$  é dada por*

$$D_R^\beta f(t) = D^n [J^{n-\beta} f(t)],$$

$$D_R^\beta f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t), \text{ se } \beta = n.$$

**Exemplo 3.4.1** *A derivada de ordem  $\beta$  segundo Riemann-Liouville de  $f(t) = t^\mu$ ,  $\mu > -1$  e  $\mu \neq 0$  é*

$$D_R^\beta f(t) = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \beta + 1)} t^{\mu-\beta}. \quad (3.12)$$

Com efeito, pela Definição 3.4.1, temos

$$D_R^\beta t^\mu = D^n [J^\alpha t^\mu], \text{ onde } \alpha = n - \beta.$$

De acordo com (3.5),

$$J^{n-\beta} t^\mu = \frac{t^{n-\beta+\mu} \Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + n - \beta + 1)},$$

Logo,

$$D_R^\beta t^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + n - \beta + 1)} D^n [t^{n-\beta+\mu}]. \quad (3.13)$$

Analisando  $D^n [t^{n-\beta+\mu}]$  separadamente, podemos obter as derivadas sucessivas

$$\begin{aligned} D[t^{n-\beta+\mu}] &= (n - \beta + \mu) t^{n-\beta+\mu-1}, \\ D^2[t^{n-\beta+\mu}] &= (n - \beta + \mu)(n - \beta + \mu - 1) t^{n-\beta+\mu-2}, \\ &\vdots \\ D^n[t^{n-\beta+\mu}] &= (n - \beta + \mu)(n - \beta + \mu - 1) \dots (\mu - \beta + 1) t^{-\beta+\mu}. \end{aligned}$$

Dessa forma, substituindo em (3.13) e usando a Propriedade 3.1.1, vem

$$\begin{aligned} D_R^\beta t^\mu &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\beta+1)} [(n-\beta+\mu)(n-\beta+\mu-1)\dots(\mu-\beta+1)t^{-\beta+\mu}], \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{(n-\beta+\mu)\Gamma(\mu+n-\beta)} [(n-\beta+\mu)(n-\beta+\mu-1)\dots(\mu-\beta+1)t^{-\beta+\mu}], \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{(n-\beta+\mu-1)\Gamma(\mu+n-\beta-1)} [(n-\beta+\mu-1)\dots(\mu-\beta+1)t^{-\beta+\mu}]. \end{aligned}$$

Fazendo esse processo sucessivamente, obtemos

$$D_R^\beta t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)} t^{-\beta+\mu}. \quad (3.14)$$

O próximo teorema nos diz como se comporta a composição a direita e a esquerda entre a derivada e a integral fracionária de Riemann-Liouville.

#### Teorema 3.4.1

$$\begin{aligned} D_R^\beta J^\beta f(t) &= f(t), \\ J^\beta D_R^\beta f(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(\beta-k+1)} t^{\beta-k} D^{m-k} J^{m-\beta} f(0). \end{aligned}$$

**Demonstração:** Temos

$$D_R^\beta J^\beta f(t) = D^m J^{m-\beta} J^\beta f(t) = D^m J^m f(t).$$

Por outro lado, note que

$$J^\beta D_R^\beta f(t) = D J^{\beta+1} D^\beta f(t) = D[J^{\beta+1} D^\beta f(t)].$$

Logo,

$$\begin{aligned} J^\beta D_R^\beta f(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^t (t-s)^\beta D^\beta f(s) ds \right], \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^t (t-s)^\beta D^m J^{m-\beta} f(s) ds. \right] \end{aligned}$$

Integrando sucessivamente por partes, vem que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^t (t-s)^\beta D^m J^{m-\beta} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} [(t-s)^\beta D^{m-1} J^{m-\beta} f(s)]_0^t \\
& - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \left\{ \int_0^t \beta (t-s)^{\beta-1} D^{m-1} J^{m-\beta} f(s) ds \right\}, \\
& = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} [-t^\beta D^{m-1} J^{m-\beta} f(0)] - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} D^{m-1} J^{m-\beta} f(s) ds, \\
& = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} [-t^\beta D^{m-1} J^{m-\beta} f(0)] - \frac{1}{\Gamma(\beta)} [(t-s)^{\beta-1} D^{m-2} J^{m-\beta} f(s)]_0^t \\
& - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left\{ \int_0^t (\beta-1)(t-s)^{\beta-2} D^{m-2} J^{m-\beta} f(s) ds \right\}, \\
& = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} [-t^\beta D^{m-1} J^{m-\beta} f(0)] - \frac{1}{\Gamma(\beta)} [-t^{\beta-1} D^{m-2} J^{m-\beta} f(0)] \\
& + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} D^{m-2} J^{m-\beta} f(s) ds, \\
& = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} [-t^\beta D^{m-1} J^{m-\beta} f(0)] + \frac{1}{\Gamma(\beta)} [-t^{\beta-1} D^{m-2} J^{m-\beta} f(0)] \\
& + \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^t (t-s)^{\beta-2} D^{m-2} J^{m-\beta} f(s) ds, \\
& \vdots \\
& = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} [-t^\beta D^{m-1} J^{m-\beta} f(0)] + -\frac{1}{\Gamma(\beta)} [-t^{\beta-1} D^{m-2} J^{m-\beta} f(0)] + \dots + \\
& + \frac{1}{\Gamma(\beta+1-(m-1))} [-t^{\beta-(m-1)} J^{m-\beta} f(0)] + \frac{1}{\Gamma(\beta-m+1)} \int_0^t (t-s)^{\beta-m} J^{m-\beta} f(s) ds, \\
& = -\sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(\beta-k+2)} [t^{\beta-k+1} D^{m-k} J^{m-\beta} f(0)] + \frac{1}{\Gamma(\beta-m+1)} \int_0^t (t-s)^{\beta-m} J^{m-\beta} f(s) ds, \\
& = -\sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(\beta-k+2)} [t^{\beta-k+1} D^{m-k} J^{m-\beta} f(0)] + J^{\beta-m+1} J^{m-\beta} f(t), \\
& = -\sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(\beta-k+2)} [t^{\beta-k+1} D^{m-k} J^{m-\beta} f(0)] + Jf(t).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
J^\beta D_R^\beta f(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ -\sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(\beta-k+2)} [t^{\beta-k+1} D^{m-k} J^{m-\beta} f(0)] + Jf(t) \right\}, \\
&= -\sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(\beta-k+1)} t^{\beta-k} D^{m-k} J^{m-\beta} f(0) + f(t).
\end{aligned}$$

Disto segue que,

$$J^\beta D_R^\beta f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(\beta-k+1)} t^{\beta-k} D^{m-k} J^{m-\beta} f(0).$$

### 3.4.2 Derivada fracionária segundo Caputo

A primeira definição de derivada fracionária foi a de Riemann-Liouville, dada em (3.4.1), mas somente com a definição de Caputo algumas aplicações práticas foram possíveis. Para mais informações veja [5, 50, 51]. A seguir, a definição segundo Caputo.

**Definição 3.4.2** Tomando  $\beta > 0$ ,  $n$  o menor inteiro maior que  $\beta$ . Nestas condições, a derivada de ordem  $\beta$  segundo Caputo é definida por

$$D_C^\beta f(t) = J^{n-\beta}[D^n f(t)].$$

Com exceção do índice inferior, o índice superior tem o mesmo significado que na derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e para  $\beta = n \in \mathbb{N}$  definimos  $D_C^\beta = D^n$ , ou seja

$$D_C^\beta f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t-s)^{\beta+1-n}}, & n-1 < \beta < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \text{se } \beta = n. \end{cases}$$

**Observação 3.4.1** Note que a definição de derivada fracionária segundo Caputo é mais restritiva que a definição de Riemann-Liouville, uma vez que requer a integrabilidade da derivada de ordem  $n$  da função. Sempre que utilizarmos o operador  $D_C^\beta$  será considerado que esta hipótese é satisfeita.

**Exemplo 3.4.2** A derivada de ordem  $\beta$  segundo Caputo de  $f(t) = t^\mu$ ,  $\mu > -1$  e  $\mu \neq 0$  é  $\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)} t^{\mu+\beta}$ .

Com efeito, note que

$$\begin{aligned} D^n t^\mu &= \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)t^{\mu-n}, \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} t^{\mu-n}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} D_C^\beta f(t) &= J^{n-\beta}[D^n f(t)], \\ &= J^{n-\beta} \left[ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} t^{\mu-n} \right], \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} J^{n-\beta}[t^{\mu-n}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_C^\beta f(t) &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - n + 1)} \frac{\Gamma(\mu - n + 1)}{\Gamma(\mu - \beta + 1)} t^{\mu - \beta}, \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \beta + 1)} t^{\mu - \beta}. \end{aligned}$$

**Teorema 3.4.2** *Sejam  $D_R^\beta f(t)$  a derivada fracionária de  $f$  segundo Riemann-Liouville,  $D_C^\beta f(t)$  a derivada fracionária de  $f$  segundo Caputo e  $m$  o menor inteiro maior que  $\beta$ . Assim, a igualdade é satisfeita*

$$D_R^\beta f(t) = D_C^\beta f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\beta}}{\Gamma(k-\beta+1)} D^k f(0).$$

**Demonstração:** Pela Definição 3.4.2, temos

$$D_C^\beta f(t) = J^{m-\beta}[D^m f(t)]$$

Aplicando o operador integral em ambos os lados

$$J^\beta D_C^\beta f(t) = J^\beta J^{m-\beta}[D^m f(t)].$$

Pelo Teorema 3.3.1, obtém-se

$$\begin{aligned} J^\beta D_C^\beta f(t) &= J^{\beta+m-\beta}[D^m f(t)], \\ &= J^m[D^m f(t)]. \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 3.4.1,

$$J^\beta D_C^\beta f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.$$

Aplicando o operador derivada e pelo Teorema 3.4.1

$$\begin{aligned} D_R^\beta J^\beta D_C^\beta f(t) &= D_R^\beta \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!} \right] \\ &= D_R^\beta f(t) - D_R^\beta \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!} \\ &= D_R^\beta f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{k!} D_R^\beta t^k. \end{aligned}$$

De (3.14) vem

$$D_R^\beta t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} t^{-\beta+\mu}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 D_C^\beta f(t) &= D_R^\beta f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} t^{k-\beta} \\
 &= D_R^\beta f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k-\beta+1)} t^{k-\beta} \\
 &= D_R^\beta f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{\Gamma(k-\beta+1)} t^{k-\beta}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_R^\beta f(t) = D_C^\beta f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{\Gamma(k-\beta+1)} t^{k-\beta}.$$

■

A próxima propriedade fornece a condição suficiente para que a derivada de Riemann-Liouville de uma função  $f$  coincida com a derivada de Riemann-Liouville de uma função  $g$ .

**Propriedade 3.4.1** *A igualdade  $D_R^\beta f(t) = D_R^\beta g(t)$  é válida, se, e somente se,*

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n c_j t^{\beta-j}, \text{ com } t > 0 \text{ e } n-1 < \beta < n. \quad (3.15)$$

**Demonstração:** Condição necessária. Para  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se induzir do cálculo usual que

$$\begin{aligned}
 Df(t) &= Dg(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + a_1, \\
 D^2 f(t) &= D^2 g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + a_1 t + a_2.
 \end{aligned}$$

Assim sucessivamente

$$D^n f(t) = D^n g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i. \quad (3.16)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 D_R^\beta f(t) &= D_R^\beta g(t) \Leftrightarrow \\
 D^n [J^{n-\beta} f(t)] &= D^n [J^{n-\beta} g(t)].
 \end{aligned}$$

Note que  $n$  é inteiro, então de (3.16), podemos escrever

$$J^{n-\beta} f(t) = [J^{n-\beta} g(t)] + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i.$$

Aplicando o operador derivada em ambos os lados e usando o Teorema 3.4.1

$$\begin{aligned} D_R^{n-\beta} J^{n-\beta} f(t) &= D_R^{n-\beta} \left[ J^{n-\beta} g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \right], \\ f(t) &= D_R^{n-\beta} [J^{n-\beta} g(t)] + D_R^{n-\beta} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_R^{n-\beta} [t^i]. \quad (3.17)$$

Analisando  $D_R^{n-\beta} [t^i]$  de (3.17) e usando o exemplo (3.4.1), obtemos

$$\begin{aligned} D_R^{n-\beta} t^i &= \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-(n-\beta)+1)} t^{-n+\beta+i} \\ &= \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-n+\beta+1)} t^{-n+\beta+i}. \end{aligned}$$

Substituindo esse último resultado em (3.17)

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left[ \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-n+\beta+1)} t^{-n+\beta+i} \right] \\ &= g(t) + \frac{a_0 \Gamma(1) t^{\beta-n}}{\Gamma(\beta-n+1)} + \frac{a_1 \Gamma(2) t^{\beta-n+1}}{\Gamma(\beta-n+2)} + \dots + \frac{a_{n-1} \Gamma(n) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \\ &= g(t) + c_1 t^{\beta-1} + c_2 t^{\beta-2} + \dots + c_n t^{\beta-n} \\ &= g(t) + \sum_{j=1}^n c_j t^{\beta-j}. \end{aligned}$$

Condição suficiente. Aplicando o operador derivada em ambos os lados de (3.15)

$$D_R^\beta f(t) = D_R^\beta g(t) + D_R^\beta \left[ \sum_{j=1}^n c_j t^{\beta-j} \right]. \quad (3.18)$$

Então, o segundo termo de (3.18) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} D_R^\beta \left[ \sum_{j=1}^n c_j t^{\beta-j} \right] &= D^n \left[ J^{n-\beta} \left( \sum_{j=1}^n c_j t^{\beta-j} \right) \right] \\ &= D^n \sum_{j=1}^n c_j J^{n-\beta} [t^{\beta-j}]. \end{aligned}$$

De acordo com o exemplo (3.3.1)

$$\begin{aligned} D_R^\beta \left[ \sum_{j=1}^n c_j t^{\beta-j} \right] &= D^n \sum_{j=1}^n c_j \left[ \frac{t^{n-j} \Gamma(\beta - j + 1)}{\Gamma(n - j + 1)} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left( c_j \frac{\Gamma(\beta - j + 1)}{\Gamma(n - j + 1)} D^n [t^{n-j}] \right). \end{aligned}$$

Mas

$$D^n [t^{n-j}] = 0,$$

então, segue que

$$D_R^\beta \left[ \sum_{j=1}^n c_j t^{\beta-j} \right] = 0.$$

Portanto, de (3.18) concluímos o resultado

$$D_R^\beta f(t) = D_R^\beta g(t).$$

■

A próxima propriedade fornece a condição para que a derivada segundo Caputo da função  $f$  seja igual a derivada segundo Caputo da função  $g$ . A demonstração será omitida pois é semelhante a anterior. Para mais detalhes, veja [51].

**Teorema 3.4.3** *A igualdade  $D_C^\beta f(t) = D_C^\beta g(t)$  é válida, se, e somente se,*

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n c_j t^{\beta-j}, \quad \text{com } t > 0 \text{ e } m - 1 < \beta < m.$$

**Lema 3.4.1**  $J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.$

**Demonstração:** Usando o Princípio da Indução Finita, temos, para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} JDf(t) &= \int_0^t Df(s) ds \\ &= f(t) - f(0) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^0 D^k f(0) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Agora, suponha que a proposição seja verdadeira para  $n = m$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$J^m D^m f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
J^{m+1}D^{m+1}f(t) &= J[J^mD^m]f(t) \\
&= J\left[D(f) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k Df(0) \frac{t^k}{k!}\right] \\
&= J\left[Df(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k+1}f(0) \frac{t^k}{k!}\right] \\
&= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k+1}f(0) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= f(t) - \frac{D^0f(0)}{0!} - \left(\frac{Df(0)}{1!}t + D^2\frac{f(0)}{2!}t^2 + \dots + D^m\frac{f(0)}{m!}t^m\right) \\
&= f(t) - \sum_{k=0}^m D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Portanto pelo Princípio da Indução Finita, vem

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^m D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.$$

### 3.5 Funções de Mittag-Leffer

As funções de Mittag-Leffer são importantes funções relacionadas ao cálculo de ordem não inteira. Essas funções generalizam a função exponencial.

**Definição 3.5.1** A função de Mittag-Leffer de um parâmetro é dada por

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0.$$

**Observação 3.5.1** No caso em que  $\alpha = 1$ , temos

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Dessa forma, podemos entender a função de Mittag-Leffer como uma generalização da função exponencial.

**Definição 3.5.2** A função de Mittag-Leffer de dois parâmetros é dada por

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0.$$

**Observação 3.5.2** Se  $\beta = 1$ ,  $E_{\alpha,1}(x) = E_{\alpha}(x)$ .

**Propriedade 3.5.1**  $E_{2,1}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos h(x)$ .

**Propriedade 3.5.2**  $E_{2,2}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sin h(x)}{x}$ .

**Teorema 3.5.1** Considere a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros  $E_{\alpha_1, \alpha_2}$ , para  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . A série de potências definida por  $E_{\alpha_1, \alpha_2}(z)$  é convergente para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Em outras palavras,  $E_{\alpha_1, \alpha_2}$  é uma função inteira.

A demonstração pode ser encontrada em [52, 61].

## 3.6 Transformada de Laplace da Derivada de Riemann-Liouville e Caputo

Introduziremos agora, os conceitos de transformada de Laplace da para a integral fracionária e para as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, bem como a transformada de Laplace inversa para as derivadas.

**Lema 3.6.1** A Transformada de Laplace da integral fracionária é dada por  $\mathcal{L}[J^{\alpha} f(t)] = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f(t)]$ .

**Demonstração:** Seja  $\Phi_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ . Usando a definição de Transformada de Laplace e integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Phi_{\alpha}(t)] &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha) s^{\alpha}} \int_0^{sb} e^{-u} u^{\alpha-1} du \right], \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) s^{\alpha}} \Gamma(\alpha), \\ &= s^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a Proposição 3.3.1, vem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[J^{\alpha} f(t)] &= \mathcal{L}[\Phi_{\alpha}(t) * f(t)] \\ &= \mathcal{L}[\Phi_{\alpha}(t)] \mathcal{L}[f(t)] \\ &= s^{-\alpha} \mathcal{L}[f(t)]. \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.6.1** Seja  $f(t) = t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(at^{\alpha})$ , a Transformada de Laplace dessa função é  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - a}$ .

**Demonstração:** Pela definição de Transformada de Laplace e pelo Teorema 3.5.1, vem

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}) dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{sb} e^{-u} \frac{u^{\alpha k + \beta - 1}}{s^{\alpha k + \beta - 1}} \frac{du}{s}, \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) s^{\alpha k + \beta}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{sb} e^{-u} u^{\alpha k + \beta - 1} du \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{\beta} s^{\alpha k}}, \\
 &= \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a}{s^{\alpha}} \right)^k.
 \end{aligned}$$

Pela convergência da série geométrica, vem

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - a}.$$

■

**Teorema 3.6.2** *Seja  $f(t) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})$ , a Transformada de Laplace dessa função é  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} + a}$ .*

A demonstração será omitida pois é semelhante a anterior.

**Definição 3.6.1** *Seja  $f(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - a}$ ,  $g(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} + a}$ . A Transformada de Laplace inversa dessas funções são respectivamente:*

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha}) \quad e \quad \mathcal{L}^{-1}[g(s)] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha}).$$

**Propriedade 3.6.1**  $\mathcal{L}[D^m f(t)] = s^m \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} f(0) s^{m-1-k}$ .

A demonstração pode ser encontrada em [48].

**Teorema 3.6.3** *A transformação de Laplace da Derivada de Caputo de ordem  $\beta$  é dada por  $\mathcal{L}[D_C^{\beta} f(t)] = s^{\beta} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} f(0) s^{\beta-k-1}$ , em que  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ .*

**Demonstração:** Pela Definição 3.4.2 e aplicando a Transformada de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D_C^\beta f(t)] &= \mathcal{L}[J^{m-\beta}(D^m f(t))], \\ &= s^{-m+\beta} \mathcal{L}[D^m f(t)].\end{aligned}$$

Usando a Propriedade 3.6.1, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D_C^\beta f(t)] &= s^{-m+\beta} \left[ s^m \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} f(0) s^{m-1-k} \right], \\ &= s^\beta \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} f(0) s^{\beta-1-k}, \\ &= s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} f(0) s^{\beta-1-k}.\end{aligned}$$

■

**Teorema 3.6.4** *A Transformada de Laplace da Derivada de Riemman-Liouville de ordem  $\beta$  é dada por  $\mathcal{L}[D_R^\beta f(t)] = s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} J^{m-\beta} f(0) s^{m-k-1}$ , em que  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ .*

**Demonstração:** Pela Definição 3.4.1 e aplicando a Transformada de Laplace vem

$$\mathcal{L}[D_R^\beta f(t)] = \mathcal{L}[D^m(J^{m-\beta} f(t))].$$

Usando a Propriedade 3.6.1 e o Lema 3.6.1

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D_R^\beta f(t)] &= s^m [s^{-m+\beta} \mathcal{L}[f(t)]] - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} J^{m-\beta} f(0) s^{m-1-k} \\ &= s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} J^{m-\beta} f(0) s^{m-1-k}.\end{aligned}$$

**Definição 3.6.2** *A Transformada de Laplace inversa de  $D_C^\beta f(t)$  e  $D_R^\beta f(t)$  é dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left[ s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} f(0) s^{\beta-k-1} \right] &= D_C^\beta f(t), \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} J^{m-\beta} f(0) s^{m-1-k} \right] &= D_R^\beta f(t).\end{aligned}$$

### 3.7 Desigualdades Diferenciáveis Fracionárias

Nesta seção, introduziremos alguns resultados importantes para o estudo do próximo capítulo.

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : [0, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Considere o seguinte problema de valor inicial não-linear de ordem fracionária com  $0 < q < 1$ ,

$$D_C^q x(t) = f(t, x), \quad (3.19)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.20)$$

Usando a teoria desenvolvida em [61] podemos provar o próximo teorema, mas por se tratar de um resultado clássico a prova será omitida.

**Teorema 3.7.1** *Seja  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua, limitada e localmente Lipschitz na segunda variável  $x$ . Então existe uma única função  $x : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow D$ , solução do problema (3.19)-(3.20). Além disso essa solução satisfaz a equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s)) ds. \quad (3.21)$$

**Definição 3.7.1** *A função  $f$  é dita Hölder contínua se existem constantes não negativas  $C, \nu$  tais que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|^\nu,$$

para todo  $x, y$  no domínio de  $f$ . A constante  $\nu$  é dita expoente de Hölder.

**Observação 3.7.1** *Vamos denotar por  $C^{0,\nu}(\Omega)$  o espaço das funções Hölder contínuas definidas em  $\Omega$ , um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  com  $0 < \nu \leq 1$ .*

**Lema 3.7.1** *Seja  $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Hölder contínua com expoente  $0 < q < \nu < 1$ , tal que para qualquer  $t_1 \in (t_0, \infty)$ , temos  $m(t_1) = 0$  e  $m(t) \leq 0$  para todo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , então  $D_R^q m(t_1) \geq 0$ .*

**Demonstração:** Pela definição 3.4.1, a derivada de Riemann-Liouville pode ser escrita como

$$D_R^q m(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t (t-s)^{1-q-1} m(s) ds \right] \quad e \quad p = 1 - q,$$

defina  $H(t) = \int_0^t (t-s)^{p-1} m(s) ds$ .

Seja  $h > 0$ . Como  $(t_1 - s)^{p-1} - (t_1 - s - h)^{p-1} \leq 0$  para  $0 \leq s \leq t_1 - h$ , obtemos

$$\begin{aligned} H(t_1) - H(t_1 - h) &= \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} m(s) ds - \int_0^{t_1 - h} (t_1 - h - s)^{p-1} m(s) ds \\ &= \int_0^{t_1 - h} [(t_1 - s)^{p-1} - (t_1 - s - h)^{p-1}] m(s) ds \\ &\quad + \int_{t_1 - h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} m(s) ds \\ &\geq \int_{t_1 - h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} m(s) ds = I_2. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que  $m$  é localmente Hölder contínua, então existe uma constante  $k(t_1) > 0$  tal que  $|m(t_1) - m(s)| \leq k(t_1)(t_1 - s)^\lambda$  assim obtemos que

$$-k(t_1)(t_1 - s)^\lambda \leq m(s) \leq k(t_1)(t_1 - s)^\lambda.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_2 &\geq - \int_{t_1-h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} k(t_1)(t_1 - s)^\lambda ds \\ &= - \int_{t_1-h}^{t_1} (t_1 - s)^{p+\lambda-1} k(t_1) ds \\ &= - \left[ \frac{(t_1 - s)^{p+\lambda}}{p + \lambda} \right]_{t_1-h}^{t_1} k(t_1), \\ &= \frac{h^{p+\lambda}}{p + \lambda} k(t_1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(t_1) - H(t_1 - h) - \frac{h^{p+\lambda}}{p + \lambda} k(t_1) \geq 0.$$

Dividindo tudo por  $h$  e aplicando o limite vem

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{H(t_1) - H(t_1 - h)}{h} - \frac{h^{p+\lambda-1}}{p + \lambda} \right] \geq 0.$$

De onde obtemos  $H'(t_1) \geq 0$  assim podemos concluir que  $D_R^q m(t_1) \geq 0$ .

■

O próximo resultado está provado em [54].

**Lema 3.7.2** *Suponha que  $\beta > 0$ ,  $c(\cdot)$  uma função não negativa, não decrescente e localmente integrável em  $[0, T)$  para algum  $T \leq \infty$ ,  $g(\cdot)$  é uma função contínua, não negativa, não decrescente definida em  $[0, T)$  e  $M > 0$  tal que  $g(t) \leq M$  e seja também  $u(\cdot)$  uma função não negativa e localmente integrável em  $[0, T)$  tal que*

$$u(t) \leq c(t) + g(t) \int_0^t (t - s)^{\beta-1} u(s) ds,$$

em  $[0, T)$ . Então  $u(t) \leq c(t)E_\beta(g(t)\Gamma(\beta)t^\beta)$ .

**Proposição 3.7.1** *Seja  $f(t, x, \lambda)$  contínua em  $(t, x, \lambda)$  e localmente Lipschitz em  $x$  (uniformemente em  $t$  e  $\lambda$ ) em  $[t_0, t_1] \times D \times \{|\lambda - \lambda_0| < c\}$  onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo. Seja  $y(t, \lambda_0)$  uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} D_C^q x(t) &= f(t, x, \lambda_0), \\ x(t_0, \lambda_0) &= y_0 \in D. \end{cases}$$

Suponha que  $y(t, \lambda_0) \in D$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Então dado  $\epsilon > 0$  existem  $\delta > 0$  e única  $z(t, \lambda)$  solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} D_C^q x(t) = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0, \lambda) = z_0, \end{cases}$$

definida em  $[t_0, t_1]$  tal que se  $\|z_0 - y_0\| < \delta$  e  $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ , temos que  $\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

**Demonstração:** Pela continuidade da solução  $y(t, \lambda_0)$  em  $t$  e a compacidade do intervalo  $[t_0, t_1]$ , temos que  $y(t, \lambda_0)$  é limitada em  $[t_0, t_1]$ .

Defina o conjunto  $U = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n : \|x - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon\}$  e suponha que  $U \subset [t_0, t_1] \times D$ . Se  $U \not\subset [t_0, t_1] \times D$ , podemos escolher  $\epsilon_1 < \epsilon$  tal que  $U \subset [t_0, t_1] \times D$ . O conjunto  $U$  é compacto, portanto  $f(t, x, \lambda)$  é Lipschitz em  $x \in U$  com constante de Lipschitz  $L$ . Pela continuidade de  $f$  em  $\lambda$ , para qualquer  $\eta > 0$  existe  $\beta > 0$ , ( $\beta < c$ ) tal que

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0)\| < \eta, \quad \forall (t, x) \in U \text{ e } \|\lambda - \lambda_0\| < \beta$$

Seja  $\eta < \epsilon$  e  $\|z_0 - y_0\| < \eta$ . Considere o problema

$$\begin{cases} D_C^q x(t) = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = z_0, \end{cases} \quad (3.22)$$

Pelo teorema de Existência e Unicidade, existe uma única solução  $z(t, \lambda)$  para (3.22) definida em  $[t_0, t_0 + \Delta]$ . Considere o intervalo  $[t_0, \tau]$  em que ( $\tau < t_1$ ), então  $y(t, \lambda_0)$  é solução de

$$\begin{cases} D_C^q x(t) = f(t, x, \lambda_0), \\ x(t_0) = y_0, \end{cases}$$

e  $z(t, \lambda)$  é solução de

$$\begin{cases} D_C^q x(t) = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = z_0. \end{cases}$$

Portanto,  $y(t, \lambda)$  e  $z(t, \lambda)$  são soluções das equações integrais, respectivamente

$$\begin{aligned} y(t, \lambda_0) &= y_0 + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, y(s, \lambda_0), \lambda_0) ds \\ z(t, \lambda) &= z_0 + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda), \lambda) ds. \end{aligned}$$

Logo, para  $t \in [t_0, \tau]$  e usando o fato que  $f$  é Lipschitz obtemos que

$$\begin{aligned}
 & \|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \\
 & \leq \|z_0 - y_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|f(s, z(s, \lambda), \lambda) - f(s, y(s, \lambda_0), \lambda_0)\| ds \\
 & \leq \|z_0 - y_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|f(s, z(s, \lambda), \lambda) - f(s, y(s, \lambda_0), \lambda)\| ds \\
 & \quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|f(s, y(s, \lambda_0), \lambda) - f(s, y(s, \lambda_0), \lambda_0)\| ds \\
 & \leq \|z_0 - y_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} L \|z(s, \lambda) - y(s, \lambda_0)\| ds \\
 & \quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|\lambda - \lambda_0\| ds \\
 & \leq \eta + \frac{1}{\Gamma(q+1)} (t-t_0)^q \eta + \frac{L}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|z(s, \lambda) - y(s, \lambda_0)\| ds \\
 & \leq \eta \left( 1 + \frac{1}{\Gamma(q+1)} (\tau-t_0)^q \right) + \frac{L}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|z(s, \lambda) - y(s, \lambda_0)\| ds.
 \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.7.2, temos

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda)\| \leq \eta \left( 1 + \frac{1}{\Gamma(q+1)} (\tau-t_0)^q \right) E_q(L\tau^q)$$

Pelo fato de  $y(t, \lambda_0)$  ser limitada em  $[t_0, \tau)$  vem

$$\|z(t, \lambda)\| \leq \|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| + \|y(t, \lambda_0)\| \leq k(\tau).$$

Utilizando esse fato, podemos estender a solução até  $\tau = t_1$ . Tomando  $M = 1 + \frac{1}{\Gamma(1+q)} (\tau-t_0)^q$  e  $\eta = \frac{\epsilon}{ME_q(1-\tau^q) + 1}$ , resulta que  $\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon$ , desde que  $\|z_0 - y_0\| < \delta$  e  $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$  para  $\delta = \min\{\eta, \beta\}$ .

■

**Lema 3.7.3** *Se  $z(\cdot)$  é solução do sistema*

$$\begin{cases} D_C^q z(t) & = f(t, z, \lambda) \\ z(t_0) & = u_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

então,  $z(\cdot) \in C^{0,\nu}$ .

**Demonstração:** Inicialmente mostraremos que se  $0 < t_1 \leq t_2$  então  $(t_2^p - t_1^p) \leq (t_2 - t_1)^p$ . Para isso, defina a função  $f(t) = (t-1)^p - (t^p - 1)$ ,  $0 < p < 1$ . Pelo fato que  $f'(t) \geq 0$  obtemos que  $f(\cdot)$  é crescente para  $t \geq 1$ . Portanto se  $t \geq 1$  temos que  $f(t) \geq f(1) = 0$ . Por outro lado, se  $0 < t_1 \leq t_2$  então  $\frac{t_2}{t_1} \geq 1$ . Logo  $\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \geq 0$ , portanto  $\left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right)^p - \left(\frac{t_2^p}{t_1^p} - 1\right) \geq 0$ , de onde segue que  $(t_2^p - t_1^p) \leq (t_2 - t_1)^p$ . Por outro lado a solução do problema (3.23) é

equivalente a equação integral

$$z(t, x) = u_0 + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda)) ds$$

Seja  $t_1 \leq t_2$ ,

$$\begin{aligned} & \| z(t_2, \lambda) - z(t_1, \lambda) \| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda)) ds - \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} - \frac{(t_1-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right) f(s, z(s, \lambda)) ds + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda)) ds \right\| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} [(t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}] ds + \frac{M}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} ds. \end{aligned}$$

Fazendo  $t_i - s = u_i, i = 1, 2$  respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} & \| z(t_2, \lambda) - z(t_1, \lambda) \| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_2-t_1}^{t_2-t_0} u_2^{q-1} du_2 - \int_0^{t_1-t_0} u_1^{q-1} du_1 + \int_0^{t_2-t_1} u_2^{q-1} du_2 \right) \\ &= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \left[ \frac{u_2^q}{q} \right]_{t_2-t_1}^{t_2-t_0} - \left[ \frac{u_1^q}{q} \right]_0^{t_1-t_0} + \left[ \frac{u_2^q}{q} \right]_0^{t_2-t_1} \right) \\ &= \frac{M}{\Gamma(q+1)} ((t_2-t_0)^q - (t_1-t_0)^q) \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(q+1)} [t_2-t_0 - (t_1-t_0)]^q \\ &= \frac{M}{\Gamma(q+1)} (t_2-t_1)^q. \end{aligned}$$

■

O próximo resultado é um resultado de desigualdades diferenciáveis para funções escalares.

**Teorema 3.7.2** *Considere o sistema escalar de ordem fracionária*

$$\begin{aligned} D_C^q u(t) &= f(t, u), \quad q \in (0, 1), \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

*$f$  é localmente Lipschitz em  $u(\cdot)$ , para todo  $t \geq 0$  e todo  $u(\cdot) \in J \subset \mathbb{R}$ . Seja  $[t_0, T)$  ( $T \leq \infty$ ) o intervalo maximal de existência de  $u(\cdot)$ , e suponha que  $u(t) \in J$ , para todo  $t \in [t_0, T)$ . Seja  $v(\cdot) \in C^{0,\nu}$  com  $q \leq \nu < 1$ , satisfazendo*

$$\begin{aligned} D_C^q v(t) &\leq f(t, v(t)) \\ v(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

*com  $v(t) \in J$ , para todo  $t \in [t_0, T)$ . Então  $v(t) \leq u(t)$ , para todo  $t \in [t_0, T)$ .*

**Demonstração:** Considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} D_C^q z(t) = f(t, z(t)) + \lambda \\ z(t_0) = u_0, \end{cases}$$

onde  $\lambda > 0$ , em qualquer intervalo  $[t_0, t_1]$ . Pela Proposição 3.7.1, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\lambda < \delta$  então a única solução  $z(t, \lambda)$  definida em  $[t_0, t_1]$  satisfaz

$$|z(t, \lambda) - u(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (3.24)$$

Inicialmente vamos mostrar que  $v(t) \leq z(t, \lambda)$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . A demonstração será feita por redução ao absurdo. Suponha que o fato anterior não acontece, então existem  $a, b \in (t_0, t_1]$  tal que  $v(a) = z(a, \lambda)$  e  $v(t) > z(t, \lambda)$  para  $a < t \leq b$ . Defina  $m(t) = v(t) - z(t, \lambda)$ . É fácil ver que  $m(t) \leq 0$ , para todo  $t \in [t_0, a]$  e que  $m(a) = v(a) - z(a, \lambda) = 0$ . Logo, pelo Lema 3.7.1

$$\begin{aligned} D_C^q(m(a)) &= D_R^q(m(t) - m(t_0))|_{t=a}, \\ &= D_R^q m(t)|_{t=a} - m(t_0) \frac{(a - t_0)^{-q}}{p(1 - q)} \geq 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} D_C^q v(a) &\geq D_C^q z(a, \lambda) = f(a, z(a, \lambda)) + \lambda > f(a, v(a)) \\ D_C^q v(a) &> f(a, v(a)), \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Agora vamos mostrar que  $v(t) \leq u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . Se a afirmação é falsa, existe  $a \in (t_0, t_1]$  tal que  $v(a) > u(a)$ . Seja  $\epsilon = \frac{v(a) - u(a)}{2}$

$$v(a) - z(a, \lambda) = v(a) - u(a) + u(a) - z(a, \lambda). \quad (3.25)$$

Mas por (3.24) temos que  $u(t) - z(t, \lambda) > -\epsilon$ , logo de (3.25) vem

$$\begin{aligned} v(a) - z(a, \lambda) &= 2\epsilon + u(a) - z(a, \lambda), \\ &\geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon, \end{aligned}$$

isso contradiz o fato de que  $v(t) \leq z(t, \lambda)$ .

Desde que o resultado é verdadeiro para qualquer intervalo compacto, nós podemos concluir que a desigualdade acontece para todo  $t \geq t_0$ . Com efeito, se a desigualdade não acontece para todo  $t \geq t_0$ , seja  $T < \infty$  o primeiro valor ao qual a desigualdade é falsa e  $\Delta > 0$ . Portanto  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, T)$  e por continuidade  $v(T) = u(T)$  e  $v(t) > u(t)$  para  $t \in (T, T + \Delta]$ . Portanto, pelo mesmo argumento usado na discussão de

$[t_0, t_1]$  também funciona em  $[t_0, T]$ .

No próximo teorema enunciamos um resultado de comparação para sistemas de equações diferenciais de ordem fracionária, para isto, introduzimos a seguinte função.

**Definição 3.7.2** *Um vetor  $v$  é dito não negativo (respectivamente positivo) se toda componente  $v_i, i = 1, \dots, n$ , é não negativa (respectivamente positiva). Denotamos um vetor não negativo (respectivamente positivo) por  $0 \leq v$  (respectivamente  $0 << v$ .)*

**Observação 3.7.2** *Sejam  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $v \leq u$ , isto é  $v$  precede  $u$  é equivalente a dizer que  $u_i \geq v_i, 1, 2, \dots, n$ .*

**Teorema 3.7.3** *Considere o problema de valor inicial*

$$D_C^q x(t) = f(t, x(t)), \quad (3.26)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.27)$$

em que  $f : [t_0, T) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua em  $t$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  é um subconjunto aberto,  $0 \in \mathcal{M}$  e existe uma constante  $L > 0$  tal que para todo  $u', u'' \in \Omega \subset \mathcal{M}$ ,

$$\|f(t, u') - f(t, u'')\| \leq L \|u' - u''\|, t \in [t_0, T), \quad (3.28)$$

Seja  $u(t), t \in [t_0, T)$  uma solução do sistema (3.26)-(3.27), se existe um vetor  $v = (v_1, \dots, v_m) : [t_0, T) \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $v_i \in C^{0, \nu}, q < \nu < 1, i = 1, \dots, n$ , e

$$D_C^q v(t) \leq f(t, v(t)), t \in [t_0, \infty),$$

então  $v(t_0) \leq u_0, u_0 \in \mathcal{M}$ , implica que  $v(t) \leq u(t), t \in [t_0, T)$ .

**Demonstração:** Considere o seguinte sistema

$$D_C^q z(t) = f(t, z(t)) + \lambda E, z(0) = u_0, \quad (3.29)$$

onde  $\lambda$  é uma constante e  $E = (1, \dots, 1)^T$ . Para um intervalo compacto  $[t_0, t_1]$  pela Proposição 3.7.1, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\lambda < \delta$ , então existe uma única solução  $z(t, \lambda)$  definida em  $t \in [t_0, t_1]$  e

$$\|z(t, \lambda) - u(t)\|_M < \epsilon, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (3.30)$$

em que a norma  $\|\cdot\|_M := \max\{|\cdot|, \dots, |\cdot|\}$  definido como o valor máximo dos componentes. Inicialmente vamos mostrar que

$$v(t) \leq z(t, \lambda), t \in [t_0, t_1]. \quad (3.31)$$

Suponha que a afirmação dada em (3.31) seja falsa, então pode haver  $a, b \in [t_0, t_1]$  de tal forma que para pelo menos um  $i \in \{1, \dots, m\}$ , ocorra  $v_i(a) = z_i(a, \lambda), v_i(t) > z_i(t, \lambda)$  e  $v_j(t) \leq z_j(t, \lambda)$  para todo  $t \in (a, b], j \neq i$  e  $j = 1, \dots, m$ . Seja o conjunto  $m_i(t) =$

$v_i(t) - z_i(t, \lambda)$ . Pela discussão semelhante ao Teorema 3.7.2, obtemos

$$D_C^q v_i(a) \geq D_C^q z_i(a, \lambda) = f_i(a, z(a, \lambda)) + \lambda > f_i(a, z(a, \lambda)), \quad (3.32)$$

o que contradiz a desigualdade  $D_C^q v(t) \leq f(t, v(t))$ , desde que  $z_i(a, \lambda) = v_i(a)$ .

Provaremos agora que  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Novamente, suponha que essa afirmação é falsa, então pode haver  $a \in (t_0, t_1]$  e pelo menos um  $i$  tal que  $v_i(a) > u_i(a)$ .

Tomando  $\epsilon = \frac{(v_i(a) - u_i(a))}{2}$  e usando a equação (3.30), temos

$$v_i(a) - z_i(a, \lambda) = v_i(a) - u_i(a) + u_i(a) - z_i(a, \lambda) \geq \epsilon,$$

o que contradiz o fato de que  $v_i(t) \leq z_i(t, \lambda)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Assim mostramos que  $v(t) \leq u(t)$  e concluímos que isso é verdade para  $t \in [t_0, t_1]$ . Se não fosse, tomemos  $T < \infty$  e  $\Delta > 0$ . Daí resulta pela continuidade que  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, T)$ ,  $v_i(T) = u_i(T)$  e  $v_i(t) > u_i(t)$ ,  $t \in (T, T + \Delta]$ . Então a mesma discussão para  $[t_0, t_1]$  vale para  $[t_0, T]$ .

■

# Capítulo 4

## MODELO MATEMÁTICO DA BABESIOSE FRACIONÁRIO

Neste Capítulo, apresentamos o modelo fracionário para a Babesiose Bovina e faremos o estudo da estabilidade local e global para os pontos críticos do sistema de ordem não inteira.

### 4.1 Modelo Matemático

Utilizando as hipóteses citadas no Capítulo 2, o sistema de equações de ordem fracionária para a doença da Babesiose é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} D_C^\theta S_B(t) = \mu_B(\bar{S}_B(t) + \bar{C}_B(t)) + \alpha_B \bar{C}_B(t) - \mu_B \bar{S}_B(t) - \beta_B \bar{S}_B(t) \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)}, \\ D_C^\theta I_B(t) = \mu_B \bar{I}_B(t) + \beta_B \bar{S}_B(t) \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)} - \mu_B \bar{I}_B(t) - \lambda_B \bar{I}_B(t), \\ D_C^\theta C_B(t) = \lambda_B \bar{I}_B(t) - [\mu_B + \alpha_B] \bar{C}_B(t), \\ D_C^\theta S_C(t) = \mu_C(\bar{S}_C(t) + p \bar{I}_C(t)) - \beta_C \bar{S}_C(t) \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)} - \mu_C \bar{S}_C(t), \\ D_C^\theta I_C(t) = \beta_C \bar{S}_C \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)} + (1 - p) \mu_C \bar{I}_C(t) - \mu_C \bar{I}_C(t). \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Simplificando o sistema (4.1) temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} D_C^\theta S_B(t) = (\mu_B + \alpha_B) \bar{C}_B(t) - \beta_B \bar{S}_B(t) \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)}, \\ D_C^\theta I_B(t) = \beta_B \bar{S}_B(t) \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)} - \lambda_B \bar{I}_B(t), \\ D_C^\theta C_B(t) = \lambda_B \bar{I}_B(t) - [\mu_B + \alpha_B] \bar{C}_B(t), \\ D_C^\theta S_C(t) = \mu_C p \bar{I}_C(t) - \beta_C \bar{S}_C(t) \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)} \\ D_C^\theta I_C(t) = \beta_C \bar{S}_C \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)} - p \mu_C \bar{I}_C(t). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Por outro lado,

$$\bar{S}_B(t) + \bar{I}_B(t) + \bar{C}_B(t) = \bar{N}_B(t) \quad e \quad \bar{I}_C(t) + \bar{S}_C(t) = \bar{N}_C(t). \quad (4.3)$$

Como na modelagem do nosso problema estamos considerando a população constante, segue que

$$D_C^\theta(\bar{S}_B(t) + \bar{I}_B(t) + \bar{C}_B(t)) = D_C^\theta \bar{N}_B(t) = 0, \quad (4.4)$$

e

$$D_C^\theta(\bar{S}_C(t) + \bar{I}_C(t)) = D_C^\theta \bar{N}_C(t) = 0. \quad (4.5)$$

Todos os parâmetros desse modelo são não-negativos, como o campo definido pelo lado direito do sistema (4.2) é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}_+^5$ , podemos deduzir que é localmente Lipschitz, usando a teoria de equações de ordem fracionária, pelo Teorema 3.7.1, é possível provar que o sistema acima possui uma única solução  $(\bar{S}_B(t), \bar{I}_B(t), \bar{C}_B(t), \bar{S}_C(t), \bar{I}_C(t))$  em  $\mathbb{R}_+^5$  em relação as condições iniciais, além disso, as soluções estão definidas para todo  $t \geq 0$  e permanecem nesta região.

Introduzindo as proporções

$$S_B(t) = \frac{\bar{S}_B(t)}{\bar{N}_B(t)}, \quad I_B(t) = \frac{\bar{I}_B(t)}{\bar{N}_B(t)}, \quad C_B(t) = \frac{\bar{C}_B(t)}{\bar{N}_B(t)}, \quad S_C(t) = \frac{\bar{S}_C(t)}{\bar{N}_C(t)}, \quad I_C(t) = \frac{\bar{I}_C(t)}{\bar{N}_C(t)},$$

em (4.2) e dividindo as equações (4.3) por  $\bar{N}_B(t)$  e  $\bar{N}_C(t)$ , respectivamente, temos

$$S_B(t) + I_B(t) + C_B(t) = 1 \quad e \quad I_C(t) + S_C(t) = 1.$$

Substituindo no sistema (4.2), vem

$$\left\{ \begin{array}{l} D_C^\theta S_B(t) = (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t) - I_B(t)) - \beta_B S_B(t) I_C(t), \\ D_C^\theta I_B(t) = \beta_B S_B(t) I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ -D_C^\theta (S_B(t) + I_B(t)) = \lambda_B I_B(t) - (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t) - I_B(t)), \\ -D_C^\theta I_C(t) = \mu_{CP} I_C(t) - \beta_C S_C(t) I_B(t), \\ D_C^\theta I_C(t) = \beta_C (1 - I_C(t)) I_B(t) - \mu_{CP} I_C(t). \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Obtemos um sistema de ordem fracionária equivalente que descreve a dinâmica da população de bovinos e carrapatos

$$\left\{ \begin{array}{l} D_C^\theta S_B(t) = (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B(t) - I_B(t)) - \beta_B S_B(t) I_C(t), \\ D_C^\theta I_B(t) = \beta_B S_B(t) I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ D_C^\theta I_C(t) = \beta_C (1 - I_C(t)) I_B(t) - \mu_{CP} I_C(t), \end{array} \right. \quad (4.7)$$

definido na região  $\Omega = \{(S_B, I_B, I_C) : 0 \leq S_B + I_B \leq 1, 0 \leq I_C \leq 1\}$ .

**Proposição 4.1.1** *A região  $\Omega = \{(S_B, I_B, I_C) : 0 \leq S_B + I_B \leq 1, 0 \leq I_C \leq 1\}$  é um conjunto positivamente invariante para o sistema (4.7).*

**Demonstração:** Suponha inicialmente que  $S_B(0) + I_B(0) \leq 1$  e que  $I_C(0) \leq 1$ . No sistema (4.7), somando a primeira com a segunda equação temos

$$\begin{aligned} D_C^\theta(S_B(t) + I_B(t)) &= (\mu_B + \alpha_B) - (\mu_B + \alpha_B)(S_B(t) + I_B(t)) - \lambda_B I_B(t) \\ &\leq (\mu_B + \alpha_B) - (\mu_B + \alpha_B)(S_B(t) + I_B(t)). \end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace na desigualdade acima obtemos

$$\lambda^\theta \mathcal{L}[(S_B(t) + I_B(t))] - \lambda^{\theta-1}(S_B(0) + I_B(0)) \leq (\mu_B + \alpha_B) \frac{1}{\lambda} - (\mu_B + \alpha_B) \mathcal{L}[S_B(t) + I_B(t)],$$

assim

$$(\lambda^\theta + \mu_B + \alpha_B) \mathcal{L}[(S_B(t) + I_B(t))] \leq (\mu_B + \alpha_B) \frac{1}{\lambda} + \lambda^{\theta-1}(S_B(0) + I_B(0)),$$

disto segue que

$$\mathcal{L}[(S_B(t) + I_B(t))] \leq (\mu_B + \alpha_B) \frac{\lambda^{\theta-(1+\theta)}}{\lambda^\theta + \mu_B + \alpha_B} + \frac{\lambda^{\theta-1}}{\lambda^\theta + \mu_B + \alpha_B} (S_B(0) + I_B(0)).$$

Aplicando a  $\mathcal{L}^{-1}$ , pela definição (3.6.1) e usando a identidade para a função de Mittag-Leffler  $E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$ , obtemos

$$\begin{aligned} (S_B(t) + I_B(t)) &\leq t^\theta E_{\theta,\theta+1}(-(\mu_B + \alpha_B)t^\theta)(\mu_B + \alpha_B) + E_{\theta,1}(-(\mu_B + \alpha_B)t^\theta)(S_B(0) + I_B(0)) \\ &\leq t^\theta E_{\theta,\theta+1}(-(\mu_B + \alpha_B)t^\theta)(\mu_B + \alpha_B) + E_{\theta,1}(-(\mu_B + \alpha_B)t^\theta) = 1. \end{aligned}$$

Portanto temos que  $0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq 1$ .

Por outro lado, do sistema (4.7) resta analisar a equação

$$D_C^\theta I_C(t) = \beta_B(1 - I_C(t))I_B(t) - \mu_C p I_C(t) \quad (4.8)$$

$$\leq (\beta_B + \mu_C) - (\beta_B + \mu_C p)I_C(t). \quad (4.9)$$

Procedendo de forma semelhante ao que fizemos no caso anterior, segue que  $0 \leq I_C(t) \leq 1$ .

Provamos dessa forma que  $\Omega$  é positivamente invariante.

## 4.2 Análise do Modelo

Nesta seção, estudamos a existência e estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema (4.7). Esta análise nos permite estudar diferentes cenários relativos à propagação da doença Babesiose na população bovina causada por contato direto com carrapatos infectados. Para isso, vamos usar o seguinte parâmetro, dado por [3].

$$R_0 = \frac{\beta_B \beta_C}{\lambda_B \mu_C p}. \quad (4.10)$$

Agora, introduziremos um teorema de estabilidade para sistemas de ordem fracionária.

Seja  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , definimos o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} D_C^\theta x(t) &= Ax(t) \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.11)$$

**Definição 4.2.1** Dizemos que a solução do sistema linear (4.11) é estável se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x_0\| < \delta$  então  $\|x(t)\| < \epsilon$ , para todo  $t \geq 0$ ; o sistema linear (4.11) é dito assintoticamente estável se é estável e se além disso  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

O próximo resultado nos diz como funciona a estabilidade do sistema linear semelhante ao da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias.

**Teorema 4.2.1** [56] A origem do sistema (4.11) é assintoticamente estável se, e somente se,  $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\theta\pi}{2}$  é satisfeita para todos os autovalores da matriz  $A$ . Além disso, este sistema é estável se, e só se  $|\arg(\lambda_i)| \geq \frac{\theta\pi}{2}$ , é satisfeita para todos os autovalores da matriz  $A$  com esses autovalores críticos satisfazendo  $|\arg(\lambda_i)| = \frac{\theta\pi}{2}$ , tendo um de multiplicidade geométrica.

Considere o seguinte sistema de ordem fracionária

$$\begin{cases} D_C^\theta x(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (4.12)$$

**Definição 4.2.2** Dizemos que  $E$  é ponto de equilíbrio de (4.12), se e somente se,  $f(E) = 0$ .

**Definição 4.2.3** O ponto de equilíbrio  $E$  do sistema autônomo (4.12) é dito estável se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|x_0 - E\| < \delta$  então  $\|x(t) - E\| < \epsilon$ , para todo  $t \geq 0$ ; o ponto de equilíbrio  $E$  do sistema autônomo (4.12) é dito assintoticamente estável se é estável e se  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = E$ .

**Teorema 4.2.2** [57] Os pontos de equilíbrio do sistema (4.12) são localmente assintoticamente estáveis se todos os autovalores  $\lambda_i$  da matriz Jacobiana  $J$ , calculada nos pontos de equilíbrio satisfazem  $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\theta\pi}{2}$ .

Introduziremos agora os pontos de equilíbrio para o modelo fracionário.

### 4.2.1 Pontos de Equilíbrio do Modelo

**Teorema 4.2.3** *O sistema (4.7) tem pontos de equilíbrio  $E_1 = (S_{B_1}, I_{B_1}, I_{C_1}) = (1, 0, 0)$ , que é o ponto de equilíbrio livre da doença, para todos os parâmetros do sistema, e se  $R_0 > 1$ , então há um único ponto de equilíbrio endêmico  $E_2 = (S_{B_2}, I_{B_2}, I_{C_2})$  no interior de  $\Omega$ .*

**Demonstração:** Denotamos por  $S_{B_i}, I_{B_i}, I_{C_i}$  os pontos de equilíbrio do sistema (4.7), onde o estado constante é  $D_C^\theta S_B = 0$ ,  $D_C^\theta I_B = 0$ ,  $D_C^\theta I_C = 0$ , para todo  $t > t_0$ . Os pontos de equilíbrio são os mesmos encontrados para o sistema (2.13)

1. O ponto livre da doença  $E_1 = (S_{B_1}, I_{B_1}, I_{C_1}) = (1, 0, 0)$ ,

2. O ponto de equilíbrio endêmico  $E_2 = (S_{B_2}, I_{B_2}, I_{C_2})$ , onde

$$\begin{aligned} S_{B_2} &= \frac{\lambda_B(\alpha_B + \mu_B)\beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\lambda_B}{\beta_C[\alpha_B(\beta_B + \lambda_B) + \lambda_B\mu_B + \beta_B(\lambda_B + \mu_B)]}, \\ I_{B_2} &= \frac{(\mu_B + \alpha_B)(\beta_C\beta_B - \lambda_B\mu_C\mathcal{P})}{\beta_C[\alpha_B(\beta_B + \lambda_B) + \mu_B\lambda_B + \beta_B(\mu_B + \lambda_B)]}, \\ I_{C_2} &= \frac{(\alpha_B + \mu_B)(\beta_B\beta_C - \lambda_B\mu_C\mathcal{P})}{(\alpha_B + \mu_B)\beta_B\beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\beta_B\mu_C\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

A demonstração da unicidade de  $E_2$  no interior de  $\Omega$ , é semelhante aquela feita no capítulo 2 para o Teorema (4.2.3).

### 4.2.2 Análise de Estabilidade

**Lema 4.2.1** *Se  $R_0 < 1$  então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $E_1$ ) é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** A matriz Jacobiana do sistema (4.7) é

$$J(S_B, I_B, I_C) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C) & -(\mu_B + \alpha_B) & -\beta_B S_B \\ \beta_B I_C & -\lambda_B & \beta_B S_B \\ 0 & \beta_C(1 - I_C) & -I_B\beta_C - \mu_C\mathcal{P} \end{vmatrix}, \quad (4.13)$$

Portanto, temos que

$$J(E_1) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) & -(\mu_B + \alpha_B) & -\beta_B \\ 0 & -\lambda_B & \beta_B \\ 0 & \beta_C & -\mu_C p \end{vmatrix}.$$

O polinômio característico obtido de  $\det(J(E_1) - \lambda I_d) = 0$  é

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3,$$

onde

- $a_1 = \alpha_B + \mu_B + \lambda_B + \mu_C p,$
- $a_2 = -\alpha_B \lambda_B - \alpha_B \mu_C p - \mu_B \lambda_B - \mu_B \mu_C p - \lambda_B \mu_C p + \beta_C \beta_B,$
- $a_3 = -\alpha_B \lambda_B \mu_C p - \mu_B \lambda_B \mu_C p + \beta_B \beta_C \alpha_B + \beta_B \beta_C \mu_B.$

Os autovalores correspondentes para o ponto de equilíbrio  $E_1$  são

$$\lambda_1 = -(\mu_B + \alpha_B), \quad \lambda_2 = \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) - \sqrt{\Delta}}{2},$$

entretanto,  $R_0 < 1$ , assim obtemos

$$\begin{aligned} \Delta &= (\lambda_B - \mu_C p)^2 + 4\beta_B \beta_C, \\ &= \lambda_B^2 + \mu_C^2 p^2 - 2\lambda_B \mu_C p + 4\beta_B \beta_C \\ &< \lambda_B^2 + \mu_C^2 p^2 + 2\lambda_B \mu_C p \\ &= (\lambda_B + \mu_C p)^2 \end{aligned}$$

É fácil ver que  $\lambda_1$  e  $\lambda_3$  são negativos. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) + \sqrt{\Delta}}{2}, \\ &< \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) + (\lambda_B + \mu_C p)}{2}, \\ &= \frac{-(\lambda_B + \mu_C p) + (\lambda_B + \mu_C p)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Portanto  $\lambda_2 < 0$ , logo todos os autovalores da matriz Jacobiana em  $E_1$  são negativos, desta forma  $|\arg(\lambda_i)| = \pi$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Logo pelo Teorema 4.2.2, temos que o ponto de equilíbrio livre da doença  $E_1$  é localmente assintoticamente estável.

**Teorema 4.2.4** *Se  $R_0 < 1$ , então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $E_1$ ) é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Suponha que  $(S_B(t), I_B(t), I_C(t))$  é uma solução do sistema (4.7). Fazendo a mudança de variável  $L_B = 1 - S_B$  obtemos o novo sistema

$$\begin{aligned} D_C^\theta L_B(t) &= -(\mu_B + \alpha_B)L_B(t) + (\mu_B + \alpha_B)I_B(t) + \beta_B I_C(t) - \beta_B L_B(t)I_C(t), \\ D_C^\theta I_B(t) &= \beta_B(1 - L_B(t))I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ D_C^\theta I_C(t) &= \beta_C(1 - I_C(t))I_B(t) - \mu_{CP}I_C(t). \end{aligned}$$

Pelo fato de

$$\begin{aligned} -(\mu_B + \alpha_B)(L_B(t) - I_B(t)) + \beta_B(I_C(t) - \beta_B L_B(t)I_C(t)) &\leq -(\mu_B + \alpha_B)(L_B(t) - I_B(t)) \\ &\quad + \beta_B I_C(t), \\ \beta_B(1 - L_B(t))I_C(t) - \lambda_B I_B(t) &\leq \beta_B I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ \beta_C(1 - I_C(t))I_B(t) - \mu_{CP}I_C(t) &\leq \beta_C I_B(t) - \mu_{CP}I_C(t), \end{aligned}$$

temos que  $(L_B(t), I_B(t), I_C(t))$  satisfaz o sistema de desigualdades diferenciais

$$\begin{aligned} D_C^\theta L_B(t) &\leq -(\mu_B + \alpha_B)L_B(t) + (\mu_B + \alpha_B)I_B(t) + \beta_B I_C(t), \\ D_C^\theta I_B(t) &\leq \beta_B I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ D_C^\theta I_C(t) &\leq \beta_C I_B(t) - \mu_{CP}I_C(t). \end{aligned}$$

Por outro lado, seja  $(X(t), Y(t), Z(t))$  solução do sistema de ordem fracionário

$$D_C^\theta X(t) = -(\mu_B + \alpha_B)X(t) + (\mu_B + \alpha_B)Y(t) + \beta_B Z(t), \quad (4.14)$$

$$D_C^\theta Y(t) = \beta_B Z(t) - \lambda_B Y(t), \quad (4.15)$$

$$D_C^\theta Z(t) = \beta_C Y(t) - \mu_{CP}Z(t), \quad (4.16)$$

com condições iniciais  $(X(t_0), Y(t_0), Z(t_0)) = (X_0, Y_0, Z_0) \in \Omega$ .

Os autovalores do sistema (4.14)-(4.16) são dados pelo determinante da seguinte matriz

$$\begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) & (\mu_B + \alpha_B) & \beta_B \\ 0 & -\lambda_B & \beta_B \\ 0 & \beta_C & -\mu_{CP} \end{vmatrix},$$

de onde obtemos que

$$\lambda_1 = -(\mu_B + \alpha_B), \quad \lambda_2 = \frac{-(\lambda_B + \mu_{CP}) + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{-(\lambda_B + \mu_{CP}) - \sqrt{\Delta}}{2},$$

em que  $\Delta = (\lambda_B - \mu_{CP})^2 + 4\beta_B\beta_C$ .

Como  $R_0 < 1$  podemos inferir que todos os autovalores tem parte real negativa, portanto  $|\arg(x_i)| = \pi$ ,  $i = 1, 2, 3$  daí concluímos pelo Teorema 4.2.1 que  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) =$

$0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0$ .

Pelo princípio da comparação, dado pelo Teorema 3.7.3, temos que as trajetórias  $(L_B(t), I_B(t), I_C(t))$  convergem para  $(0, 0, 0)$ , disto segue que  $(S_B(t), I_B(t), I_C(t))$  convergem para o ponto de equilíbrio livre da doença  $E_1 = (1, 0, 0)$ , desde que  $R_0 < 1$ . Desta forma finalizamos a demonstração.

Mostraremos agora a estabilidade local do ponto de equilíbrio endêmico  $E_2$ . Para isso introduzimos a seguinte definição e faremos uso do próximo Lema. Para mais detalhes veja [58].

**Definição 4.2.4** *Se  $A = a_{ij}$  é uma matriz  $n \times n$ , então a  $k$ -ésima matriz aditiva composta  $A^{[k]}$  de  $A$  é  $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$  dada por  $A^{[k]} = |D(I + hA)^{(k)}| = 0$ , onde  $D$  é a diferencial em relação a  $h$ . Para algum inteiro  $i = 1, \dots, \binom{n}{k}$ , seja  $(i) = (i_1, \dots, i_k)$  o  $i$ -ésimo termo na ordenação lexicográfica de todas as  $k$ -tuplas de inteiros de forma que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq i_n$ . Então*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{i_1 i_1} + \dots + a_{i_k i_k} & \text{se } (i) = (j) \\ (-1)^{r+s} a_{i_s i_r}, & \text{se uma entrada } i_s \text{ de } i \text{ não ocorre em } (j) \text{ e } j_s \text{ não ocorre em } (i) \\ 0, & \text{se } (i) \text{ difere de } (j) \text{ em duas ou mais entradas} \end{cases}$$

**Observação 4.2.1** *Para o caso em que  $n = 3$ , as matrizes  $A^{[k]}$  são*

$$A^{[1]} = A, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{bmatrix}, \quad A^{[3]} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

**Lema 4.2.2** *Seja  $M$  uma matriz real  $3 \times 3$ . Se  $\text{tr}(M) < 0$ ,  $\det(M) < 0$  e  $\det(M^{[2]}) < 0$ , então todos os autovalores de  $M$  tem parte real negativa.*

A demonstração pode ser encontrada em [44].

**Teorema 4.2.5** *Se  $R_0 > 1$  e se os parâmetros  $\mu_B + \alpha_B > \beta_C$  e  $\mu_B + \alpha_B > \beta_B$ , então o ponto de equilíbrio endêmico  $E_2$  é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** A matriz Jacobiana do sistema (4.7) no ponto de equilíbrio endêmico é dada por (4.13). Com isso mostraremos que as seguintes condições são satisfeitas.

- $\text{tr}(J(E_2)) < 0$ .

Pelo fato que  $\text{tr}(J(E_2)) = -(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C) - \lambda_B - I_B \beta_C - \mu_C p < 0$  segue de forma imediata.

- $\det(J(E_2)) < 0$ .

Para mostrar a desigualdade faremos uma simplificação no sistema (4.7), de onde vem

$$-(\mu_B + \alpha_B) = -\frac{\beta_B S_B I_C}{1 - S_B - I_B}, \quad \lambda_B = \frac{\beta_B S_B I_C}{I_B}, \quad \mu_{CP} = \frac{\beta_C(1 - I_C)I_B}{I_C} \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) na matriz (4.13), temos

$$\det(J(E_2)) = \begin{vmatrix} \frac{\beta_B I_C(1 - I_B)}{1 - S_B - I_B} & -\frac{\beta_B S_B I_C}{1 - S_B - I_B} & -\beta_B S_B \\ \beta_B I_C & -\frac{\beta_B S_B I_C}{I_B} & \beta_B S_B \\ 0 & \beta_C(1 - I_C) & -\frac{\beta_C I_B}{I_C} \end{vmatrix}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \det(J(E_2)) &= \left[ \left( -\frac{\beta_B I_C(1 - I_B)}{1 - S_B - I_B} \right) \left( -\frac{\beta_B S_B I_C}{I_B} \right) \left( -\frac{\beta_C I_B}{I_C} \right) - [\beta_B S_B \beta_B I_C \beta_C(1 - I_C)] \right] \\ &\quad - \left[ \left( -\frac{\beta_B I_C(1 - I_B)}{1 - S_B - I_B} \right) \beta_B S_B \beta_C(1 - I_C) \right] + \left[ \frac{\beta_B S_B I_C \beta_C I_B}{(1 - S_B - I_B)I_C} \beta_B I_C \right] \\ &= \left[ -\frac{\beta_B I_C(1 - I_B)\beta_B S_B I_C \beta_C I_B}{(1 - S_B - I_B)I_B I_C} + \frac{\beta_B I_C(1 - I_B)\beta_B S_B \beta_C(1 - I_C)}{1 - S_B - I_B} \right] \\ &\quad - \beta_B S_B \beta_B I_C \beta_C(1 - I_C) - \frac{\beta_B S_B I_C \beta_B I_C \beta_C I_B}{(1 - S_B - I_B)I_C} \\ &= -\frac{(1 - S_B - I_B)I_B I_C(1 - I_B)\beta_B S_B \beta_C I_C}{(1 - S_B - I_B)I_B I_C(1 - S_B - I_B)} - \beta_B S_B \beta_B I_C \beta_C(1 - I_C) \\ &\quad - \frac{\beta_B S_B I_C \beta_B I_C \beta_C I_B}{(1 - S_B - I_B)I_C} \\ &= -\beta_B S_B \beta_C I_C \left[ \frac{(1 - S_B - I_B)I_B I_C(1 - I_B)}{(1 - S_B - I_B)I_B I_C(1 - S_B - I_B)} + \beta_B(1 - I_C) \right] \\ &\quad - \frac{\beta_B S_B \beta_C I_C \beta_B I_C I_B}{(1 - S_B - I_B)I_C}. \end{aligned}$$

Portanto, como todos os parâmetros são constantes e positivos, segue que  $\det(J(E_2)) < 0$ .

- $\det(J^{[2]}(E_2)) < 0$ .

Seja  $J^{[2]}(E_2)$  a matriz aditiva composta.

$$J^{[2]}(E_2) = \begin{vmatrix} M - \lambda_B & \beta_B S_B & \beta_B S_B \\ \beta_C - \beta_C I_C & M + K & -(\mu_B + \alpha_B) \\ 0 & \beta_B I_C & -(\lambda_B + K) \end{vmatrix}.$$

em que  $M = -(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C)$  e  $K = -(I_B \beta_C + \mu_{CP})$ . Logo, calculando  $\det(J^{[2]}(E_2))$

e usando a hipótese  $0 \leq 1 - I_C \leq 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 & \det(J^{[2]}(E_2)) \\
 = & -[(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + I_B \beta_C + \mu_{CP})(\lambda_B + I_B \beta_C + \mu_{CP})] \\
 & + \beta_B S_B I_C \beta_C (1 - I_C) \beta_B - (\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B) \beta_B I_C \\
 & + \beta_B S_B \beta_C (1 - I_C)(\lambda_B + I_B \beta_C + \mu_{CP}) \\
 = & -[(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + I_B \beta_C + \mu_{CP})(\lambda_B + I_B \beta_C + \mu_{CP})] \\
 & + \beta_B S_B \beta_C (1 - I_C)[I_C \beta_B + \lambda_B + I_B \beta_C + \mu_{CP}] \\
 & - (\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B) \beta_B I_C \\
 \leq & -[(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + I_B \beta_C + \mu_{CP})(\lambda_B + I_B \beta_C + \mu_{CP})] \\
 & + \beta_B \beta_C (I_C \beta_B + \lambda_B + I_B \beta_C + \mu_{CP}) - (\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B) \beta_B I_C \\
 = & -(\lambda_B + I_B \beta_C + \mu_{CP})[(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B) \\
 & (\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + I_B \beta_C + \mu_{CP}) - \beta_B \beta_C] - \beta_B I_C [(\mu_B + \alpha_B \\
 & + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B) - \beta_B \beta_C]
 \end{aligned}$$

Analisando os termos da igualdade acima e usando as hipóteses  $\mu_B + \alpha_B > \beta_C$  e  $\mu_B + \alpha_B > \beta_B$ , vem

$$(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + I_B \beta_C + \mu_{CP}) > \beta_B \beta_C$$

e

$$(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C + \lambda_B)(\mu_B + \alpha_B) > \beta_B \beta_C.$$

Daí  $\det(J^{[2]}(E_2)) < 0$  e pelo Lema 4.2.2 o ponto de equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável.

## 4.3 Simulação Numérica

Nesta seção, para verificar a validade dos resultados obtidos, foram feitas algumas simulações numéricas para o sistema de ordem fracionária para a doença da Babesiose Bovina.

### 4.3.1 Ponto de equilíbrio livre da doença

Para o ponto de equilíbrio livre da doença, simulamos um quadro em que a transmissão da Babesia é desacelerada com  $\beta_B = 0,0003$ . Os outros parâmetros permanecem constantes de modo que  $R_0 < 1$  e são dados pela tabela 4.1. O ponto de equilíbrio livre da doença é  $E_1 = (S_B, I_B, I_C) = (1, 0, 0)$ . Foi utilizado  $R_0 = 0,67$ .

Tabela 4.1 – Parâmetros para simulação para o ponto  $E_1$

Fonte: Aranda, et al.

Parâmetros	$\mu_B$	$\mu_C$	$\lambda_B$	$\alpha_B$	$p$	$\beta_B$	$\beta_C$
Valores	0,0002999	0,001609	0,00265	0,001	0,5	0,0003	0,00048

Nesse primeiro quadro analisamos o comportamento da solução do sistema fracionário para  $\theta$  igual a  $(0,5; 0,8)$  e  $t = 8000$  anos.

Observa-se na figura 4.1 que para  $\alpha = 0,5$  e  $t = 8000$ , a solução ainda não apresenta convergência, porém os resultados teóricos garantem tal convergência. Já na figura 4.2 é possível ver que a solução converge para o ponto de equilíbrio livre da doença.

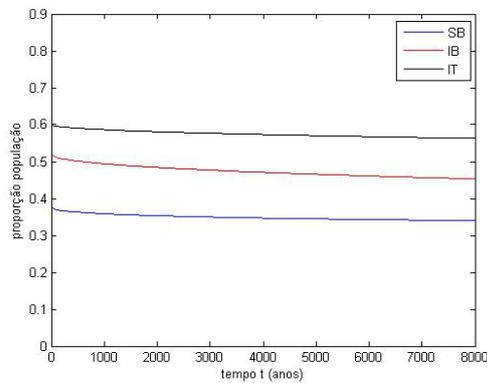


Figura 4.1 – Dinâmica para  $\theta = 0,5$  e  $t = 8000$   
Fonte: Do autor

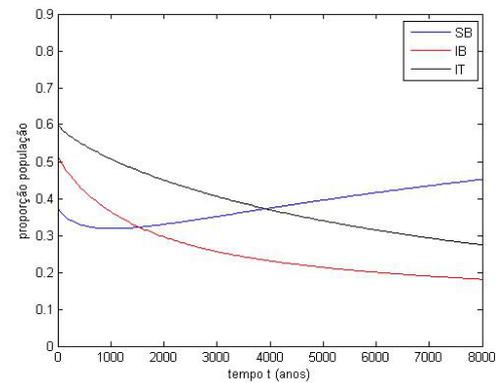


Figura 4.2 – Dinâmica para  $\theta = 0,8$  e  $t = 8000$   
Fonte: Do autor

Nas figuras 4.3 e 4.4, simulamos o que ocorre com a solução do sistema para  $t = 8000$  e  $\alpha$  igual a  $(0,9; 1)$ . Nota-se que ambos os casos a solução do sistema converge para o ponto de equilíbrio livre da doença.

Ao analisar as figuras 4.2, 4.3 e 4.4, notamos que conforme aumentamos a ordem do expoente fracionário a convergência se torna mais rápida. Com isso ao aumentar ou diminuir o expoente fracionário estamos introduzindo um amortecimento na convergência da solução do sistema.

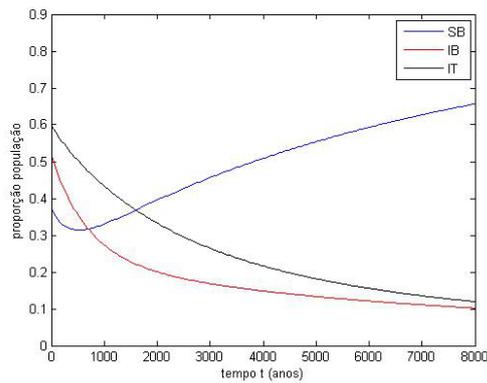


Figura 4.3 – Dinâmica para  $\theta = 0,9$  e  $t = 8000$   
 Fonte: Do autor

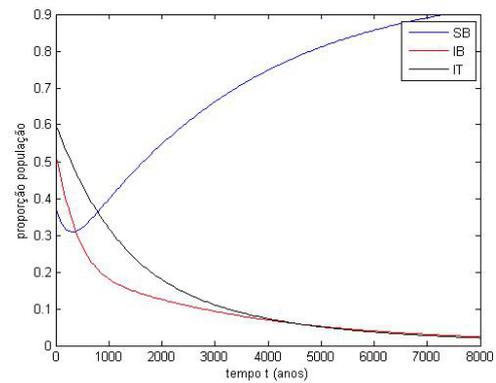


Figura 4.4 – Dinâmica para  $\theta = 1$  e  $t = 8000$   
 Fonte: Do autor

### 4.3.2 Ponto de equilíbrio endêmico

Para realizar as simulações numéricas para o ponto de equilíbrio endêmico, utilizamos  $\beta_B = 0,006$  e levamos em conta que 60% dos carrapatos são infectados pelo Babesia, aproximadamente 51,84% da população bovina são infectados por Babesia e 37,56% dos bovinos são suscetíveis, ou seja, assumimos como condição inicial  $S_B(0) = 0,3756$ ,  $I_B(0) = 0,5184$ ,  $I_C(0) = 0,60$ . A transmissão vertical foi de 90% onde apenas 10% dos bovinos são controlado [22]. Os demais parâmetros permanecem constantes e os valores são dados pela tabela 4.2 [3].

Tabela 4.2 – Parâmetros para simulação para o ponto  $E_2$

Fonte: Aranda, et al.

Parâmetros	$\mu_B$	$\mu_C$	$\lambda_B$	$\alpha_B$	$p$	$\beta_B$	$\beta_C$
Valores	0,0002999	0,001609	0,000265	0,001	0,1	0,006	0,00048

Nós simulamos o efeito da variação no valor do expoente fracionário  $\theta$  para  $t = 8000$ . Os valores de  $\theta$  utilizados foram  $(0,5; 0,8; 0,9; 1)$ . O ponto de equilíbrio endêmico é dado por  $(S_B, I_B, I_C) = (0,0498; 0,7893; 0,70)$ . A taxa de reprodução básica é  $R_0 = 67,54$ .

Neste primeiro quadro simulamos o que ocorre com a solução do sistema para  $t = 8000$  anos e  $\theta$  igual a  $(0,5; 0,8)$ . Isso pode ser visto nas figuras (4.5) e (4.6).

Para  $\theta = 0,5$ , na figura (4.5), a solução do sistema ainda não apresenta convergência, porém os resultados teóricos garantem tal convergência. Já para  $\theta = 0,8$ , na figura 4.6, a solução do sistema apresenta convergência para o ponto de equilíbrio endêmico.

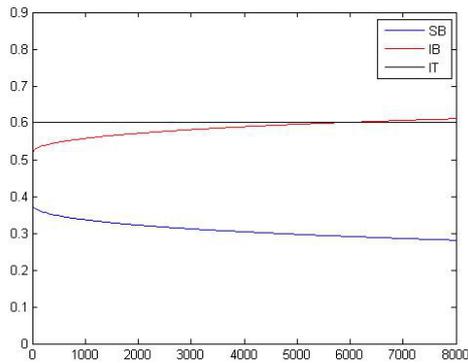


Figura 4.5 – Dinâmica para  $\theta = 0,5$  e  $t = 8000$   
 Fonte: Do autor

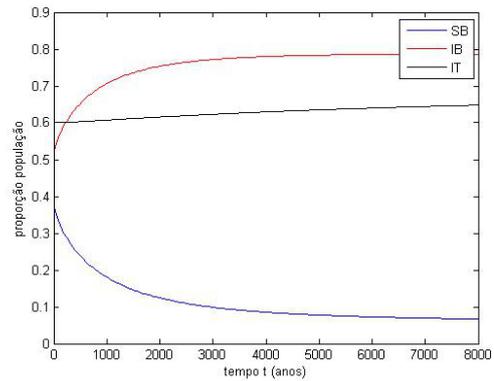


Figura 4.6 – Dinâmica para  $\theta = 0,8$  e  $t = 8000$   
 Fonte: Do autor

Agora simulamos o que ocorre com a solução do sistema para  $t = 8000$  anos e  $\theta$  igual a  $(0,9; 1)$ . Isso pode ser visto nas figuras (4.7) e (4.8).

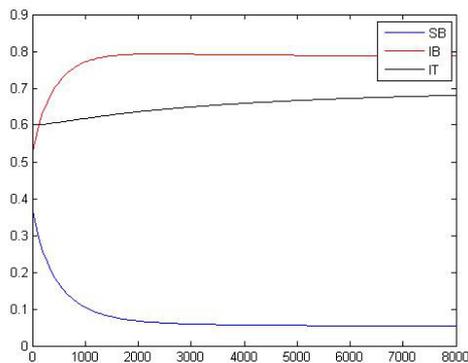


Figura 4.7 – Dinâmica para  $\theta = 0,9$  e  $t = 8000$   
 Fonte: Do autor

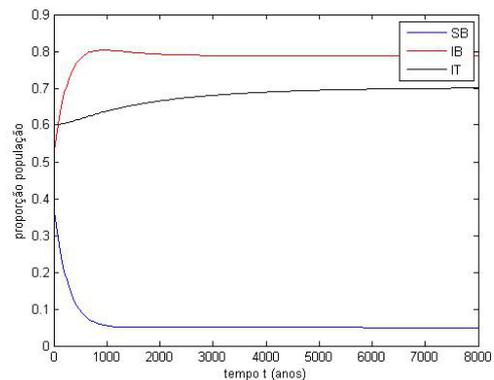


Figura 4.8 – Dinâmica para  $\theta = 1$  e  $t = 8000$   
 Fonte: Do autor

Na figura (4.7) a solução do sistema apresenta convergência para o ponto de equilíbrio endêmico. Para  $\theta = 1$ , na figura (4.1) a solução do sistema fracionário apresenta um comportamento semelhante à derivada usual e a convergência para o ponto de equilíbrio endêmico é imediata. Assim podemos concluir que a convergência da solução do sistema fracionário está diretamente ligada ao valor do expoente fracionário, pois quanto maior for o valor de  $\theta$ , mais rápida será a velocidade de convergência.

Se a dinâmica do modelo fracionário adotado requer um sistema onde a solução demore mais tempo para atingir a convergência, então deve ser tomado um valor de  $\theta$  mais próximo de zero. Isso é importante do ponto de vista epidemiológico em uma situação onde  $R_0 > 1$ , pelo fato de que assim a doença demora um período de tempo maior para atingir o equilíbrio epidêmico. Para em uma situação onde  $R_0 < 1$ , o valor de  $\theta$  adequado é aquele próximo do número inteiro, o que leva a solução do sistema a convergir mais rapidamente para o ponto de equilíbrio livre da doença.

# Capítulo 5

## CONCLUSÃO

Neste trabalho nós inicialmente estudamos um modelo matemático de equações diferenciais ordinárias para a doença da Babesiose Bovina. Para estudar este modelo fizemos uso de conceitos importantes da teoria qualitativa de equações diferenciais. Mostramos através de resultados analíticos e simulação numérica que a taxa de reprodução básica,  $R_0$ , é um valor limite que determina a dinâmica local e global da doença para o caso do sistema de equações diferenciais ordinárias.

A proposta do trabalho, foi escrever um novo modelo matemático para a descrição da doença da Babesiose Bovina usando um sistema de Equações Diferenciais Fracionárias com derivada de Caputo. Para isso inicialmente fizemos um estudo sobre a teoria do cálculo fracionário, desde suas origens históricas, definições mais aceitas até teoremas envolvendo sistemas fracionários. Todos esses conceitos foram indispensáveis para escrevermos o sistema de equações diferenciais de ordem fracionária para a doença da Babesiose bovina.

Novos resultados teóricos foram obtidos sobre o comportamento da dinâmica desse novo modelo. Usando a teoria de comparação e desigualdades diferenciais para sistemas de ordem fracionária, conseguimos obter um resultado inédito sobre o comportamento assintótico global para o ponto de Equilíbrio livre da doença, para a razão de reprodução básica  $R_0 < 1$ . Este fato concorda com a Teoria de Epidemiologia Matemática. Além disso, mostramos que o ponto de equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável, resultado este que é apenas enunciado no trabalho [3].

Outro resultado obtido, está no fato de que as simulações computacionais comprovam os resultados teóricos e mostram que velocidade de convergência da solução do sistema fracionário está diretamente ligada ao valor do expoente fracionário que for adotado, ou seja, a medida que se aumenta ou diminui tal expoente, introduz-se um sistema de amortecimento na velocidade de convergência da solução do sistema para o ponto de equilíbrio.

Como trabalho futuro, a partir do conhecimento da dinâmica e dos métodos de simulação para o sistema de ordem fracionária da Babesiose Bovina, espera-se aplicar o modelo

fracionário em um conjunto de dados reais e comparar com o modelo usual dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias, e verificar qual modelo é mais adequado para a descrição e previsão de informações sobre a doença.

Conforme alguns trabalhos na área de Equações Diferenciais de Ordem Fracionária [59, 60, 61], espera-se que a inclusão da derivada Fracionária no modelo da Babesiose Bovina, agregue o efeito de memória [62] e torne o modelo mais robusto para a descrição dados reais. A Teoria desenvolvida nesse trabalho pode ser aplicada também na modelagem de outras doenças de transmissão direta ou transmitidas por vetores.

# Referências Bibliográficas

- [1] MINISTÉRIO DA AGRICULTURA E PECUÁRIA. **Bovinos e Bubalinos**. Disponível em: < [http : //www.agricultura.gov.br/animal/especies/bovinos - e - bubalinos](http://www.agricultura.gov.br/animal/especies/bovinos_e_bubalinos) > Acesso em: 31 mar. 2014.
- [2] EMBRAPA PUBLICAÇÕES. **Gado de corte divulga, controle do carrapato do boi**. Artigos técnicos. (publicado em agosto 1998). Disponível em: < [http : //www.cnpqc.embrapa.br/publicacoes/divulga/GCD31.html](http://www.cnpqc.embrapa.br/publicacoes/divulga/GCD31.html) > Acesso em: 30/03/2014.
- [3] ARANDA, D. F. et al. A mathematical model for Babesiosis disease in bovine and tick populations, **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, v. 35, m. 3, p. 249-256, 2012.
- [4] PODLUBNY, I. Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integral and Fractional Differentiation, **Frac. Cal. Appl. Anal.**, p. 367-386, 2002.
- [5] CAPUTO, M. **Lectures on Seismology and Rheological Tectonics**. Univ. degli Studi di Roma. La Sapienza, 1992.
- [6] CAPUTO, M. **Elasticità e dissipazione** , Ed. Bologna: Zanichelli, 1969.
- [7] BOTERO, D., AND RESTREPO, M. **Parasitosis Humanas**. 4. ed. Corporación para Investigaciones Biológicas, 2005.
- [8] SACCO, A. M. S. **Controle de Surtos de Tristeza Parasitária Bovina** Pesquisadora da Embrapa Pecuária Sul, Bagé, RS.
- [9] SANCHEZ, C. **Una mirada a las enfermedades parasitarias en el país**. NOVA 4 ,2006.
- [10] MURRAY, J. D. **Mathematical Biology I. An Introduction**, 3. ed. Springer, 2001.

- [11] GRISI, D. et al. Impacto econômico das principais ectoparasitoses em bovinos no Brasil . **A Hora Veterinária**, v. 21, n. 125, p. 8-10, 2002.
- [12] FRIEDHOFF, K.T. Transmission of Babesia in the tick. In: RISTIC, M. **Babesiosis of domestical animals and man**. Florida, p. 23-52, 1988.
- [13] KESSLER, R.H.; SCHENK, M.A.M. **Carrapato, tristeza parasitaria e tripanossomose dos bovinos**. Campo Grande. M.S.: Embrapa-CNPGC, 1998.
- [14] LEMOS, A.A. **Principais enfermidades de bovinos de Corte do Mato Grosso do Sul. Reconhecimento e diagnóstico**. Campo Grande. M.S. p. 358-365, 1998.
- [15] MARQUES, D.C. **Criação de bovinos**. 7. ed. Belo Horizonte: Ed.Consultoria Veterinária e Publicações, p. 586, 2003.
- [16] BASSANEZI, R. **C Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática** 3 ed. São Paulo: Contexto, 2006.
- [17] PEREIRA, D. C; SOUZA, L. R. G.; BAFFI, A. M. Carrapatos de bovinos: método de controle e mecanismos de resistência e acaricidas. **Documentos** v. 276, Planaltina - DF, 2010.
- [18] MAHONEY, D.F.; MIRRE, G.B. A note on the transformation of Babesia bovis. (Sin B. argentna) by the one host tick Boophilus microphus. **Research in veterinary science**, v. 26, p. 253-254, 1979.
- [19] KIKUGAWA, M., **M.Tristeza Parasitária Bovina (Babesiose x Anaplas-mose)**. 41f. Trabalho de Conclusão de Curso, (Graduação) Faculdades Metropolitanas Unidas. FMU: São Paulo, 2009.
- [20] D. MATIGNON, **Stability result on fractional differential equations with applications to control processing**. IMACS-SMC proceedings, Lille, France p. 963-968, 1996.
- [21] MARQUES, D.C. **Criação de bovinos**. 7. ed. Belo Horizonte. Consultoria Veterinária e Publicações, p. 586, 2003.
- [22] URIBE O, HURTADO A, CASTELLANOS G. **Prevalence of pathological disease in bovines in the half Magdalena** Colombia. ICA 1990.
- [23] TPB. **Tristeza Parasitária Bovina**. Disponível em: < <http://www.msdsauade-animal.com.br/Doencas/TPB/010Introduca.aspx> > Acesso em 31 mar. 2014.

- [24] BARREIRA, L., VALLS, C. **Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa**. São Paulo, Livraria da Física, 2012.
- [25] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 2. ed. São Paulo, Livraria da Física, 2006.
- [26] SOTOMAIOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro, IMPA - Projeto Euclides, 1979.
- [27] KERMACK, W.O.; MCKENDRICK, A.G. **A contribution to the mathematical theory of epidemics**, Proc. R. Soc. Lond, p. 700-721, 1927.
- [28] ISEA R., LONNGREN, K. E. On the Mathematical Interpretation of Epidemics by Kermack and McKendrick. **Gen. Math. Notes**, v. 19, n. 2, p. 83-87, 2013.
- [29] DIETZ H. The estimation of the basic reproduction number for infectious diseases. **Statistical Methods in Medical Research**. 1983.
- [30] BRAUER, F., NOHEL J. Qualitative Theory of Differential Equations **Dover Publications**. New York, 1989.
- [31] DIEKMANN, K.; ET AL. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $R_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations. **Journal of mathematical biology**. v 28, n. 4, p. 365-382, 1990.
- [32] ARIAS, C.A. et al. The Estimation of the effective reproductive number from disease outbreak data, **Mathematical Biosciences**, v. 6. 2009.
- [33] TORRES, D. F. M.; POOSEH, S.; RODRIGUES, H. S. **Fractional derivatives in Dengue epidemics**. *arXiv:1108.1683*.
- [34] STANISLAVSKY, A. A. **Memory effects and macroscopic manifestation of randomness**. Institute of Radio Astronomy, Chervonopraporna Street, Ukraine 1999.
- [35] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [36] LIMA, L. E. Curso de Análise. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Projeto Euclides, 2010. v.1
- [37] LIMA, L. E. Curso de Análise. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Projeto Euclides, 2014. v. 2.

- [38] GONZÁLEZ-PARRA. G, C. et al. **Dynamics of model of Toxoplasmosis disease in human and cat populations**. Univ. de Los Andes, Venezuela, 2008.
- [39] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno** 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [40] PODLUBNY, I. **Fractional differential equations, mathematics on science and engineering**, v. 198. San Diego: Academic Press, 1999.
- [41] LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T. **Intialization, Conceptualization, and Aplication in the Generalized Fractional Calculus**. *NASA/TP-1998-208415*, 1998.
- [42] LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T. **Initialized fractional calculus**. *NASA/TP-2000-209943*, 2000.
- [43] MACHADO, J. A. T. A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. **Fractional Calculus and Applied Analysis**. v. 6, p. 73-80, 2003.
- [44] MCCALLEMAIL, P.J., DAVID W. K. Learning and memory in disease vectors **Trends in Parasitology**, v. 18, n. 10, p. 429 - 433. 2002.
- [45] MAOLIN D., ZAIHUA W., HAIYAN H. Measuring memory with the order of fractional derivative. **Scientific Reports** v. 3, 2013.
- [46] CHEN, W. Time-Space Fabric Underlying Anomalous Diffusion. **Chaos, Solitons and Fractals**, n. 28, p.923-929, 2006.
- [47] MITTAG-LEFFLER, M. G. **Sur la nouvelle fonction  $E_{\alpha}(x)$** . Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. v. 137, p. 554-558, 1903.
- [48] CAMARGO, R. F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. 2009. 141f. Tese (Doutorado em Matemática.) Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. UNICAMP: Campinas, 2009.
- [49] DEMIRCI, E.; OZALP, N. A method for solving differential equations of fractional order. **Journal of Computational and Applied Mathematics**. v. 236, n. 11, p. 2754-2762, 2012
- [50] CAPUTO, M. **Lectures on seismology and rheological tectonics**. Univ. degli Studi di Roma. La Sapienza, 1992.

- [51] GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order In: Carpinteri, A.; Mainardi, F. **Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics** New York: Springer-Verlag, p.223-276, 1997.
- [52] DUMBAR, R. S. **Topics in probability theory and stochastic processes.** Department of Mathematics. University of Nebraska, Lincoln/NE. 2009.
- [53] DIETHELM, K. **The analysis of fractional differential equations.** Springer, 2004.
- [54] ZHILIANG W. ET AL. Stability analysis for nonlinear fractional-order systems based on comparison principle **Nonlinear Dyn** v. 75, n. 1-2, p. 387-402, 2014.
- [55] ZHILIANG, W., HUAGUANG, Z., NING, S. **Comparison Inequalities for Nonlinear Fractional-Order Systems.** Shenyang, China: College of Information Science and Engineering, 2010.
- [56] MATIGNON, D. , **Stability result on fractional differential equations with applications to control processing.** IMACS-SMC proceedings, Lille, France p. 963-968, 1996.
- [57] CHANGPIN L., YUTIAN M. Fractional dynamical system and its linearization theorem. **Nonlinear Dyn** p. 621-633, 2013.
- [58] TUMWIINE, J. et al. A mathematical model for the dynamics of malaria in a human host and mosquito vector with temporary immunity **Applied Mathematics and Computation.** p. 1954-1965, 2007.
- [59] POOSEH, S.; RODRIGUES, H. S.; TORRES, D. F. M. **Fractional derivatives in Dengue epidemics.** v. 1. p. 739-742, 2011.
- [60] SARDAR, T. et al. A mathematical model of dengue transmission with memory. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat** 2014.
- [61] DIETHELM, K. A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever **Nonlinear Dynamics**, Springer. 2013.
- [62] DU, M.; WANG, Z.; HU, H. Measuring memory with the order of fractional derivative. **Sci Rep** p. 1-3, 2013.