UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

VALDELINE DE PAULA MEQUELINO FERREIRA

PREVISÃO DA TEMPERATURA MÁXIMA DE LAVRAS-MG: COMPARAÇÃO DA NORMAL CLIMATOLÓGICA COM A TEORIA DOS VALORES EXTREMOS

ALFENAS/MG

2023

VALDELINE DE PAULA MEQUELINO FERREIRA

PREVISÃO DA TEMPERATURA MÁXIMA DE LAVRAS-MG: COMPARAÇÃO DA NORMAL CLIMATOLÓGICA COM A TEORIA DOS VALORES EXTREMOS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Estatística Aplicada e Biometria.
Orientador: Fabricio Goecking Avelar.
Coorientador: Luiz Alberto Beijo.

ALFENAS/MG

2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas
Biblioteca Central

Ferreira, Valdeline de Paula Mequelino.
Previsão da temperatura máxima de Lavas-MG : comparação da normal climatológica com a Teoria dos Valores Extremos / Valdeline de Paula Mequelino Ferreira. - Alfenas, MG, 2022.
57 f. : il. -

Orientador(a): Fabricio Goecking Avelar.
Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) - Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, MG, 2022.
Bibliografia.

1. Inferência bayesiana. 2. Distribuição GEV. 3. Erro médio de predição. 4. Raiz do erro quadrático médio. 5. Critério de informação de deviance. I. Avelar, Fabricio Goecking, orient. II. Título.

Ficha gerada automaticamente com dados fornecidos pelo autor.

VALDELINE DE PAULA MEQUELINO FERREIRA

Previsão da temperatura máxima de Lavras-MG: comparação da normal climatológica com a teoria de valores extremos

A Banca examinadora abaixo-assinada aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Estatística Aplicada e Biometria.

Aprovada em: 16 de dezembro de 2022.

Prof. Dr. Fabrício Goecking Avelar
Instituição: Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG

Prof. Dr. Carlos José dos Reis
Instituição: Universidade Federal de Alfenas - UNIFAL-MG

Prof. Dr. Davi Butturi-Gomes
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei- UFSJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente, que me possibilitou concluir esta etapa de minha vida.

Aos meus familiares, pelo incentivo, força e apoio incondicional. Em especial, minha mãe Maria Sueli (*in memorian*), meus filhos Victor Gabriel e Pedro Lucca, meu marido Francisco e minhas irmãs Ângela, Luana e Camila.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Fabricio Goecking Avelar e Prof. Dr. Luiz Alberto Beijo, por todo o seu apoio, paciência, confiança e conhecimentos compartilhados.

Aos membros das bancas do exame de qualificação e da banca de defesa de mestrado, pelas sugestões valiosas e contribuições para o desenvolvimento deste trabalho.

À instituição e ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria da UNIFAL-MG por sua contribuição na minha formação.

A todos os amigos que direta ou indiretamente participaram da minha formação, o meu eterno agradecimento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A agricultura representa cerca de 3% da composição do PIB brasileiro e é a quarta atividade econômica mais importante na cidade de Lavras-MG. É a atividade econômica que mais depende das condições climáticas. Por essa razão, o conhecimento do comportamento dos eventos climáticos é essencial para a maximização da produtividade e minimização dos prejuízos. No estudo do comportamento do clima são utilizadas as Normais Climatológicas. Entre as Normais Climatológicas utilizadas está a temperatura máxima. Um questionamento que pode ser feito é a respeito da adequabilidade do uso de Normal Climatológica para predição de eventos extremos, como a temperatura máxima. Nos estudos de eventos extremos utiliza-se a Teoria dos Valores Extremos, sendo a distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV) uma das distribuições mais utilizadas. Os estimadores de máxima verossimilhança são comumente utilizados na estimação dos parâmetros dessa distribuição. Alternativamente, a inferência bayesiana também tem sido utilizada para esse fim. O presente trabalho tem como objetivo comparar as predições obtidas para a temperatura máxima de Lavras-MG por meio das Normais Climatológicas com as predições obtidas por meio da distribuição GEV ajustada via metodologia bayesiana considerando diferentes estruturas de distribuição a *priori* informativa e não informativas. Os dados de temperatura máxima de Machado-MG foram utilizados na elicitação das *prioris* informativas. Conclui-se que a distribuição GEV ajustada por meio da inferência bayesiana forneceu predições melhores para a temperatura máxima de Lavras-MG e que, para a maioria dos meses, as *prioris* informativas tiveram desempenho melhor do que as não informativas.

Palavras-chave: Inferência bayesiana; Distribuição GEV; Erro médio de predição; Raiz do erro quadrático médio; Critério de informação de deviance.

ABSTRACT

Agriculture accounts for approximately 3% of Brazilian GNP and it is the fourth economic activity most important in the Lavras, Minas Gerais state. It is the economic activity that most depends on climatic conditions. For this reason, the knowledge of the extreme climatic events behavior are important for the production maximization and losses minimization. In the study of climate behavior, it is used the climatological normals. Among the climatological normals there is the maximum temperature. One question that it may be done is about the use of climatological normals to predict extreme events, like the maximum temperature. In the study of extreme eventes it is used the Extreme Value Theory, where the Generalized Extreme Value Distribution (GEV) is one of the most applied. The Maximum Likelihood Estimators are usually used on the estimation of GEV distribution parameters. Alternatively, the bayesian inference has been used for this purpose. This work aims to compare the predictions to the maximum temperature of Lavras-MG obtained by climatological normals and those obtained by GEV distribution fitted by bayesian methodology with different structures of informative e non-informative priors distributions. The maximum temperature data from Machado, Minas Gerais state, were used for elicitation of the informative prioris distributions. It was concluded that the GEV distribution fitted by bayesian inference presented betters predictions to maximum temperature of Lavras and, for the most of the months, the informative priors distributions performed better than non-informative ones.

Keywords: Bayesian inference; GEV distribution; Prediction mean error; Mean quadratic error square; Deviance information criterion.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A agricultura é a atividade econômica que mais depende das condições climáticas, pois os elementos meteorológicos afetam, além dos processos metabólicos das plantas, as mais diversas atividades no campo. Como os agricultores não têm meios de exercer algum controle sobre as condições meteorológicas, o conhecimento do comportamento do clima é de suma importância para o planejamento das atividades agropecuárias. Uma das formas de se compreender o comportamento do clima é por meio de Normais Climatológicas.

A Normal Climatológica de uma variável é obtida por meio do valor médio calculado para essa variável no período de 30 anos. No caso da temperatura do ar, a Normal Climatológica é obtida para a temperatura máxima, mínima e média. Portanto, especificamente para as temperaturas do ar máxima, a Normal Climatológica é a média das temperaturas máximas do ar durante o período de 30 anos. A temperatura do ar máxima pode ser considerada como um evento extremo e eventos extremos são modelados por meio da Teoria de Valores Extremos (TVE).

A TVE é o ramo da probabilidade que estuda o comportamento dos eventos extremos. Ela está sendo cada vez mais usada por diversas áreas da ciência devido à importância cada vez maior do conhecimento do comportamento desses eventos. A distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV) é um modelo pertencente à teoria de valores extremos e é comumente utilizada na descrição de eventos desta natureza. Os estimadores de máxima verossimilhança e a inferência bayesiana são muito utilizados no ajuste da distribuição GEV.

Inferência bayesiana é um conjunto de métodos que permitem o ajuste de um modelo de probabilidade a um conjunto de dados e possui duas características fundamentais: a presença da distribuição *a priori* e a determinação de uma distribuição para os parâmetros do modelo. A distribuição a *priori* permite que informações anteriores à coleta da amostra sejam utilizadas. Conforme Coles e Powell (1996), estas características possibilitam que a aplicação da inferência bayesiana reduza as incertezas na estimação dos parâmetros e de quantis da distribuição GEV.

Neste contexto o objetivo deste estudo foi comparar a qualidade das predições obtidas para a temperatura máxima de Lavras-MG por meio das normais climatológicas, no período de 1981 a 2010, com as predições obtidas por meio da distribuição GEV com estimação bayesiana. Então esse trabalho se justifica no fato de verificar, por meio da teoria de valores extremos, se uma mudança na metodologia para a predição da temperatura do ar máxima pode torná-la mais adequada para a sociedade em geral.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho foi comparar as predições obtidas para a temperatura máxima de Lavras-MG por meio das normais climatológicas 1981-2010 com as predições obtidas por meio da distribuição GEV com estimação bayesiana.

Os objetivos específicos foram:

a) Utilizar *priori* não informativa na estimação dos parâmetros da distribuição GEV no ajuste dos dados de temperatura máxima de Lavras-MG, para o período de 1981-2010;

b) Utilizar diferentes estruturas de *prioris* informativas para a estimação dos parâmetros da distribuição GEV no ajuste dos dados de temperatura máxima de Lavras-MG, para o período de 1981-2010;

c) Comparar as predições obtidas por meio das normais climatológicas com as obtidas pelo ajuste da GEV com diferentes *prioris*.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção está apresentada a teoria a respeito de Normal Climatológica, Teoria de Valores Extremos e Inferência Bayesiana utilizada no presente trabalho.

2.1 NORMAL CLIMATOLÓGICA

De acordo com Monteiro (2009), a agricultura é uma atividade econômica que necessita das condições climáticas para ser desenvolvida, pois os elementos meteorológicos afetam, além dos processos metabólicos das plantas, as mais diversas atividades no campo. O autor define a agrometeorologia como a ciência interdisciplinar que estuda a influência do tempo e do clima na produção de alimentos, fibras e energia. Nesse sentido, a agrometeorologia é de suma importância para a agricultura, pois as informações a respeito do clima e do tempo podem auxiliar os agricultores no planejamento de suas ações, visando minimizar o risco de prejuízos e maximizar a produtividade. De acordo com Biscaro (2007), é necessário diferenciar os conceitos de tempo e clima, como apresentados na definição de agrometeorologia. Segundo o mesmo autor, o tempo se refere a uma condição climática local e instantânea, enquanto o clima é o comportamento observado na atmosfera ao longo dos anos. Uma das formas de se compreender o comportamento do clima é por meio de Normais Climatológicas.

De acordo com Silva, Evangelista e Malaquias (2014), os estudos estatísticos de variáveis climáticas nos quais dados de 30 anos seguidos são avaliados, iniciando-se no primeiro ano de uma década, são denominados de Normais Climatológicas. Se os dados não se iniciam no primeiro ano de uma década, os estudos são denominados de Normais Climatológicas não convencionais. As Normais Climatológicas têm o objetivo de fornecer informações consistentes que permitem que os órgãos planejadores, financiadores, produtores e todos os demais envolvidos com a produção agropecuária planejem de forma adequada as suas ações.

Segundo a Organização Meteorológica Mundial (OMM), os climatologistas usam as Normais Climatológicas de variáveis como temperatura e precipitação para prever, por exemplo, a magnitude de uma onda de calor ou uma tempestade atual no contexto histórico.

A Normal Climatológica de uma variável é obtida por meio do valor médio observado para essa variável no período de 30 anos. Segundo Medeiros *et al.* (2005) no caso da temperatura do ar, a Normal Climatológica é obtida para as temperaturas máxima, mínima e média. Portanto, especificamente para a temperatura do ar máxima, a Normal Climatológica é a média das temperaturas máximas do ar no tempo de 30 anos. Uma outra forma de se estudar eventos extremos, como a temperatura do ar máxima, é por meio da Teoria de Valores Extremos.

2.2 TEORIA DOS VALORES EXTREMOS

Segundo Caioni (2020) eventos extremos são eventos raros que possuem potencial de gerar grandes impactos. De acordo com Marengo (2009), os eventos extremos mais importantes para as atividades humanas são os de curto prazo, relacionados com o tempo, e os de médio prazo, relacionados com o clima, pois são eventos que podem ocasionar impactos significativos, tanto sociais quanto econômicos e ecológicos. Segundo Marengo (2006), há evidências de que eventos extremos como secas, enchentes, ondas de calor e de frio, furacões e tempestades têm afetado diferentes partes do planeta e produzido enormes perdas econômicas e de vidas. Como exemplos, o autor cita a onda de calor na Europa em 2003, os furacões Katrina, Wilma e Rita no Atlântico Norte em 2005 e o inverno extremo na Europa e Ásia em 2006. Mais especificamente no Brasil, o autor exemplifica eventos extremos com o furacão Catarina em março 2004, a seca da Amazônia em 2005 e as secas no sul do Brasil em 2004, 2005 e 2006.

A crescente preocupação com a ocorrência de eventos extremos severos, que ocasionam grandes impactos sociais e econômicos, tem chamado a atenção nas últimas décadas pela gravidade das consequentes perdas. Aliada à evolução dos computadores, essa preocupação tem conduzido a um número crescente de publicações sobre a Teoria de Valores Extremos (TVE) nos últimos trinta anos. Esses fatores provocaram o rápido amadurecimento dessa teoria, tornando-a muito atraente em diversas áreas da ciência. Atualmente, as técnicas de valores extremos têm sido amplamente utilizadas em áreas tais como climatologia, meteorologia, hidrologia, engenharias, economia, finanças, astronomia, biologia, entre outras, de acordo com Silva *et al.* (2022).

Segundo Coles (2001) e Cerezer (2008), a TVE é uma área da Estatística e Probabilidade utilizada para modelar eventos raros que estão associados a uma probabilidade pequena de acontecer. O estudo da teria de valores extremos teve um grande avanço a partir de 1953, após a Holanda sofrer uma grande inundação. Como boa parte do território holandês fica abaixo do nível do mar foram criados diques de contenção a fim de impedir que a água viesse submergir esses locais. Entretanto esses diques não estavam preparados para suportar a altura máxima das ondas do mar. Desta forma, em 1953 os diques vieram a se romper causando diversos prejuízos sociais, ambientais, econômicos e principalmente humanos. Após essa tragédia, o governo holandês criou um comitê com o objetivo de compreender melhor o comportamento dos eventos extremos e, com isso, se prevenir de uma nova ocorrência de inundação. Na Figura 2.2 é apresentada uma fotografia da inundação que ocorreu na Holanda em 1953.

Figura 1 – Inundação causada pelo rompimento dos diques na Holanda em 1953.

Fonte: http://www.brasil247.com/pt/247/revista oasis/15607/Aquecimento-global//

O desenvolvimento da TVE iniciou-se com o trabalho de Fisher e Tippett (1928), no qual os autores mostraram que, com uma padronização, a sequência do máximo de uma variável aleatória converge, em distribuição, para a distribuição Gumbel, Fréchet ou Weibull, quando essa convergência acontece para uma distribuição não degenerada. Gnedenko (1943) demonstrou as condições necessárias e suficientes para que essa convergência seja possível. Jenkinson (1955) unificou as três distribuições em uma única forma paramétrica denominada Distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV).

Nesse sentido, por descrever adequadamente tanto valores mínimos extremos como máximos extremos, a distribuição GEV tem sido utilizada frequentemente na solução de importantes problemas em áreas como a climatologia. Entre os vários campos de pesquisa de aplicação da distribuição GEV, destaca-se a sua utilização em pesquisas ligadas a fenômenos hidrometeorológicos, principalmente nos casos em que a variável envolvida no estudo refere-se à precipitação pluviométrica máxima (BEIJO, 2002).

2.3 DISTRIBUIÇÃO GEV

A função de densidade de uma variável aleatória que segue a distribuição GEV pode ser expressa por:

$$f\left(x|\,\mu,\sigma,\xi\right)=\frac{1}{\sigma}\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)}\exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, \qquad (2.1)$$

definida em $1+\xi((x-\mu)/\sigma)>0$, em que $\mu\in\mathbb{R}$ é o parâmetro posição, $\sigma>0$ é o parâmetro escala e $\xi\neq 0$, o parâmetro forma.

Calculando-se $\int_{-\infty}^{x} f\left(t|\,\mu,\sigma,\xi\right)dt$ em que f é a função densidade de probabilidades da GEV, expressa em (2.1), obtém-se a função de distribuição acumulada, denotada por

$F(x)$ de uma variável aleatória que segue a distribuição GEV que pode ser expressa por:

$$F\left(x|\, \mu, \sigma, \xi\right) = \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}. \tag{2.2}$$

Calculando-se a inversa da função de distribuição acumulada $F(x)$ expressa em (2.2) obtém-se a função $Q\left(p|\, \mu, \sigma, \xi\right)$, que é chamada de função quantil da distribuição GEV, e que pode ser expressa por:

$$Q\left(p|\, \mu, \sigma, \xi\right) = \frac{\sigma}{\xi}\left\{-1+\left[-\ln(p)\right]^{-\xi}\right\}+\mu, \tag{2.3}$$

definida para $0 < p < 1$. Dado um valor $p \in (0,1)$, a função quantil aplicada a p, $Q(p)$, fornece o valor $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(X \leq x_0) = p$, em que X tem distribuição GEV de parâmetros μ, σ e ξ.

Os estimadores mais utilizados na estimação dos parâmetros da distribuição GEV são os estimadores de máxima verossimilhança. Segundo Bolfarine e Sandoval (2001), dada uma sequência de variáveis aleatórias $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com função de densidade $f(x|\theta)$, em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros de f, então a função de verossimilhança $L(\theta|\mathbf{x})$ é definida por

$$L(\theta|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta), \tag{2.4}$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é uma amostra aleatória observada de $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$.

Logo, conhecendo-se a função de densidade f das variáveis aleatórias $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ e tomando-se uma amostra aleatória dessas mesmas variáveis, a função de verossimilhança é uma função que depende apenas dos parâmetros de f e é expressa pelo produto das densidades aplicadas nos valores amostrais observados. O método da máxima verossimilhança consiste, basicamente, em se encontrar os valores $\widehat{\theta}$ que maximizam a função de verossimilhança. As funções que permitem encontrar tais valores $\widehat{\theta}$ são chamados de estimadores de máxima verossimilhança de θ.

De acordo com Bautista, Zocchi e Angelocci (2004), dada uma amostra aleatória, a função de verossimilhança da distribuição GEV pode ser expressa por:

$$L(\mu,\sigma,\xi|x) = \frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[1+\xi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)}\right\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{-1\left[1+\xi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi}}\right]\right\}\right\}, \tag{2.5}$$

se todos os valores de x_i forem menores que $\mu-\frac{\sigma}{\xi}$ se $\xi < 0$ ou se todos os valores de x_i forem maiores que $\mu - \frac{\sigma}{\xi}$ se $\xi > 0$. Em todas as outras situações, a função de verossimilhança da distribuição GEV é igual a zero.

Maximizando-se a função de verossimilhança expressa em (2.5), obtém-se os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição GEV que, segundo Bautista Zocchi e Angelocci (2004), podem ser expressos por:

$$\begin{cases} \frac{1}{\widehat{\sigma}}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1+\widehat{\xi}-w_i^{-\frac{1}{\xi}}}{\widehat{\sigma}}\right)=0 \\ -\frac{n}{\widehat{\sigma}}+-\frac{1}{\widehat{\sigma}}\sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\frac{(x_i-\widehat{\mu})\left[\left(1+\widehat{\xi}\right)-w_i^{-\frac{1}{\xi}}\right]}{w_i}\right\}=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left\{\left(1-w_i^{-\frac{1}{\xi}}\right)\left[\frac{1}{\widehat{\xi}^2}\ln(w_i)-\frac{(x_i-\widehat{\mu})}{\widehat{\xi}\widehat{\sigma}w_i}\right]-\frac{(x_i-\widehat{\mu})}{\widehat{\sigma}w_i}\right\}=0, \end{cases} \tag{2.6}$$

em que $w_i = 1+\xi\left(\frac{x_i-\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}}\right)$.

Os estimadores expressos em (2.6) permitem encontrar os valores das estimativas dos parâmetros da distribuição GEV para um conjunto de dados, ou seja, encontra-se o modelo que se ajusta aos dados. Esse modelo ajustado pode ser utilizado para se realizar predições da ocorrência de eventos extremos. Uma das formas de se fazer predições com o uso da distribuição GEV é por meio do nível de retorno. Segundo Bautista, Zocchi e Angelocci (2004), dado um tempo de retorno $T > 1$, o nível de retorno associado a T é o valor que espera-se que seja superado ao menos uma vez no tempo T. Os autores definem o nível de retorno associado ao tempo de retorno T da distribuição GEV por

$$x_p = F^{-1}(1-p) = \mu - \frac{\sigma}{\xi}\{1-[-\ln(1-p)^{-\xi}]\}, \tag{2.7}$$

em que F é a função de distribuição acumulada da distribuição GEV e $p=\frac{1}{T}$. Ou seja, dado um tempo de retorno T, o nível de retorno da distribuição GEV associado a T é obtido ao se aplicar a função quantil, expressa em (2.3), no ponto $1-\frac{1}{T}$.

Além dos estimadores de máxima verossimilhança, métodos bayesianos também podem ser utilizados para a estimação dos parâmetros da distribuição GEV.

Segundo Almeida (2018) a abordagem bayesiana forneceu resultados mais precisos e acurados nas estimativas dos parâmetros das distribuições GEV e Gumbel. A autora comparou o método da máxima verossimilhança com os métodos Bayesianos, avaliando diferentes distribuições *a priori*, na previsão da ocorrência de ventos máximos, por semestre, em Sorocaba e Bauru (SP).

Butturi-Gomes *et al.* (2019), utilizando a inferência bayesiana no estudo de períodos secos em diferentes cenários de tamanho da amostra e graus de informações *a priori*, concluíram que as melhores predições ocorreram nos níveis crescentes de informações a priori.

2.4 INFERÊNCIA BAYESIANA

A inferência bayesiana iniciou-se na década de 30 com o trabalho de Jeffreys (1939) e obteve avanço na década de 90 com o trabalho de Gelfand *et al.* (1990). Jeffreys (1939) se deparou com integrais complexas que não haviam soluções. Diante disso Gelfand *et al.* (1990), encontrou resultados satisfatórios através do algoritmo Amostrador de Gibbs, sendo este um recurso de simulação dinâmica que utiliza a teoria das Cadeias de Markov desenvolvido por Geman e Geman (1984). A metodologia bayesiana utiliza informação *a priori* e dos dados amostrais resultando na distribuição *a posteriori*.

Neste trabalho, o vetor de parâmetros $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ do modelo que se deseja ajustar a um conjunto de dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ será denotado por $\boldsymbol{\theta}$. O modelo de probabilidade completo, denominado distribuição *a posteriori*, será denotado por $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$. A distribuição *a posteriori* é proporcional ao produto da distribuição *a priori* com a distribuição dos dados. A distribuição *a priori* representa a população de todos os valores possíveis para $\boldsymbol{\theta}$. Denotar-se-á a distribuição *a priori* por $p(\boldsymbol{\theta})$. A distribuição dos dados será denotada por $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$, que é a função de verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}$ dada a amostra $\mathbf{x}$. Dessa forma, a regra de Bayes pode ser expressa por

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \propto L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \cdot p(\boldsymbol{\theta}). \tag{2.8}$$

Segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003), a distribuição *a priori* é a representação matemática, probabilística da informação que se tem sobre o vetor de parâmetros antes de se coletar uma amostra. Os parâmetros da distribuição a *priori* são denominados hiperparâmetros. De acordo com Gelman *et al.* (2003), é desejável que a *a priori* tenha um papel mínimo garantido na construção da *posteriori*. Quando o conhecimento a respeito de θ anterior à coleta da amostra é escasso, uma *priori* que representa essa pouca informação deve ser utilizada. A essas *prioris* dão-se o nome de *prioris* não informativas. Existem métodos próprios para a elicitação de *prioris* não informativas. Dentre elas, é possível citar o método de Jeffreys, Box-Tiao, Bayes-Laplace e *prioris* formuladas a partir do conhecimento do pesquisador. De acordo com Paulino, Turkman e Murteira (2003), é natural que a estimação do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ seja baseada na distribuição *a posteriori*, pois ela contém toda informação disponível sobre $\boldsymbol{\theta}$. Na próxima seção serão apresentados métodos de estimação pontual de $\boldsymbol{\theta}$.

2.4.1 Estimação pontual

Segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003), como a Inferência Bayesiana permite obter uma distribuição para o parâmetro θ e a obtenção de uma estimativa pontual para o parâmetro deve ser feita a partir dessa distribuição. Ou seja, a estimativa pontual de θ

deve ser obtida por meio da distribuição *a posteriori* de θ. Para isso, pode-se calcular uma medida de posição a partir dessa distribuição. As medidas de posição mais utilizadas são a média *a posteriori*, a moda *a posteriori* e a mediana *a posteriori*.

A média *a posteriori* é o valor esperado da distribuição *a posteriori*. A moda *a posteriori* é o ponto de máximo da distribuição *a posteriori*. A mediana *a posteriori* é o valor que divide a área sob o gráfico da *posteriori* em duas áreas iguais.

Segundo Oliveira (2015), na teoria da decisão, para escolher uma estimativa pontual de qualquer quantidade deve-se considerar a estimativa como se fosse o verdadeiro valor do parâmetro. Desta forma, se faz necessário especificar uma função perda avaliando os riscos de se trabalhar com a estimativa como se fosse o verdadeiro parâmetro. O melhor estimador, de acordo com o risco, é aquele que o minimiza o erro e é conhecido como estimador de Bayes. No Apêndice E demonstra-se que, quando a função perda é quadrática, o estimador de Bayes é a média *a posteriori*.

2.4.2 Estimação por regiões

A região de credibilidade é obtida por um intervalo. Existem infinitos intervalos que apresentam o mesmo grau de credibilidade. Segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003), a região de credibilidade é definida da seguinte forma:

$R(\mathbf{x})$ é uma região de credibilidade λ para θ se,

$$P(\theta \in R(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = \int_{R(\mathbf{x})} \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta \geq \lambda. \tag{2.9}$$

Desta forma, será selecionado o subconjunto de θ mais credível *a posteriori*, ou seja, aquele que tem a mesma credibilidade λ e que englobe todos os valores de θ.

Entretanto apenas um intervalo possui melhor precisão e acurácia, conhecido com HPD *(Highest Posterior Density)*. Segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003), a região $R(\mathbf{x})$ de credibilidade λ para θ, é uma região com densidade (probabilidade) *a posteriori* máxima (HPD) se,

$$\sup_{\theta \notin R(\mathbf{x})} \pi(\theta|\mathbf{x}) \leq \mathrm{c}_\lambda \leq \inf_{\theta \in R(\mathbf{x})} \pi(\theta|\mathbf{x}) \tag{2.10}$$

para algum c_λ tal que $P(\theta \in R(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \geq \lambda$, ou equivalente, se

$$R(\mathbf{x}) = (\theta : \pi(\theta|\mathbf{x}) \geq c_\lambda) \tag{2.11}$$

com $c_\lambda > 0$ a maior constante tal que,

$$\int_{R(\mathbf{x})} \pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \geq \lambda. \tag{2.12}$$

A determinação dos intervalos HPD exige o cálculo de integrais complexas que, geralmente, não possuem soluções analíticas, sendo os métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC) frequentemente usados para esta finalidade.

2.4.3 Monte Carlo via cadeias de Markov

Segundo Nogueira *et al.* (2004), os métodos MCMC são utilizados como alternativa aos métodos não iterativos para problemas complexos. O intuito é obter uma amostra da distribuição *a posteriori* e calcular estimativas amostrais de características desta distribuição. Diante dos métodos MCMC, tem-se que os algoritmos amostrador de Gibbs e o Metropolis-Hastings são os mais utilizados. Estes estabelecem uma excelente ferramenta para solução de muitas dificuldades práticas na análise Bayesiana. O algoritmo de Metropolis-Hastings é um método de MCMC, que foi desenvolvido por Metropolis (1953) e generalizado por Hastings (1970). Este algoritmo permite gerar uma amostra da distribuição conjunta *a posteriori* a partir das distribuições condicionais completas com formas desconhecidas.

Caso essas distribuições apresentem formas conhecidas, utiliza-se um caso especial do Metropolis-Hastings, o Amostrador de Gibbs. As estruturas desses algoritmos podem ser encontrados em Hastings (1970), Gelman *et al.* (2003) e Paulino, Turkman e Murteira (2003).

2.4.4 Cadeias de Markov

Segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003), o processo Markoviano é dito ser uma Cadeia de Markov quando as variáveis randômicas $X(t)$ estão definidas em um espaço de estados discreto estocástico. Desta forma, têm-se:

$$\begin{aligned} P(X_{(K+1)} = x_{(k+1)}|X_{(K)} = x_{(K)}, X_{(K-1)} = x_{(K-1)}, ..., X_{(1)} = x_{(1)}, X_{(0)} = x_{(0)}) \\ = P(X_{(K+1)} = x_{(K+1)}|X_{(K)} = x_{(k)}) \end{aligned}$$

$\forall\ 1,\ 2, \cdots,\ K-1,\ K,\ K+1.$

Uma cadeia de Markov é um processo em que a probabilidade de estar em um certa posição depende do estado atual e não dos estados em tempos anteriores. De outro modo, em uma cadeia de Markov, o estado atual do sistema depende apenas do estado presente.

2.4.5 Análise de convergência

Os métodos MCMC são muito utilizados na análise Bayesiana, mas possuem limitações em relação ao número necessário de interações para a obteção da convergência da cadeia. A verificação da convergência das cadeias podem ser realizadas através de dois métodos, sendo eles: formais ou informais. Os métodos informais são utilizados através de análise gráfica, ou seja, análise visual e os métodos formais estão relacionados aos métodos de convergência. Segundo Nogueira *et al.* (2004), existem diversos métodos na literatura para verificar convergência. Alguns critérios são apenas computacionais, se que dentre eles têm os que necessitam são facilmente implementável e outros possuem um grande trabalho computacional. Desta forma, para este trabalho foram utilizados os seguintes critérios: critério de Geweke (1992), Raftery e Lewis (1992) e Heidelberger e Welch (1993), pois possuem fácil implementação e também, diante da teoria, podem ser utilizados na interpretação da convergência.

De acordo Nogueira *et al.* (2004) o método de Geweke (1992) é utilizado para identificar a ausência de convergência. A avaliação de convergência é realizada a partir do teste de igualdade de médias da primeira e da última parte da cadeia. O critério de Raftery e Lewis (1992) é um método que define quantas interações são necessárias para obter a convergência à distribuição estacionária. Segundo Nogueira *et al.* (2004), o método concede as estimativas do *burn-in*, em que este é o número de interações que devem ser descartadas e do *thin* que está relacionado à distância mínima de uma interação a outra, para obter independência. Já o critério de Heidelberger e Welch (1993) é utilizado para avaliar a convergência de determinados métodos MCMC.

2.5 SELEÇÃO DE MODELOS

O Critério de Informação da Deviance (DIC), do inglês *Deviance Information Criterion,* introduzido por Spiegelhalter *et al.* (2002) é, particularmente, usual nos problemas Bayesianos de seleção de modelos para os quais amostras da distribuição *a posteriori* dos parâmetros dos modelos foram obtidas por simulação de Monte Carlo em Cadeias de Markov (MCMC), e é definido da seguinte forma:

$$DIC = D(\widehat{\theta}) + 2p_D \tag{2.13}$$

que $D(\widehat{\theta})$ é o desvio avaliado na média *a posteriori* e p_D é o número efetivo de parâmetros do modelo, definido por:

$$p_D = \overline{D} - D(\hat{\theta}) \tag{2.14}$$

que $\overline{D} = E[D(\hat{\theta})]$ corresponde ao desvio médio *a posteriori* que mede a qualidade do ajuste do modelo aos dados.

De acordo com Spiegelhalter *et al.* (2002), na escolha entre dois modelos A e B, conhecidos os valores do DIC dos dois modelos, deve-se calcular o valor de D por meio da expressão:

$$D = |DIC_A - DIC_B|. \tag{2.15}$$

A partir do valor de D obtido por meio da equação (2.15), a seleção do melhor modelo é feita por meio dos seguintes critérios:

a) se $D < 5$, não há diferença substancial entre os modelos, somente por ter o menor DIC. Logo, é necessário utilizar outros critérios para a seleção;

b) se $5 \leq D \leq 10$, considera-se que a diferença entre os modelos são substanciais, podendo-se ter uma preferência para o modelo de menor DIC;

c) se $D > 10$, definitivamente descarta-se o modelo com maior DIC.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Os dados de temperatura diária do município de Lavras (MG), expressos em graus Celsius (°C), foram obtidos a partir das séries históricas de posto pluviométrico automático desse município, junto a estação convencional de código OMM: 83687. Segundo Dantas, Carvalho e Ferreira (2007), Lavras esta situada a 21°14'06" de latitude Sul e 45°00'00" de latitude Oeste, a uma altitude média de 918 m. O clima da região é do tipo Cwb, temperado suave (mesotérmico), segundo a classificação de Köeppen, caracterizado por apresentar inverno seco e verão chuvoso. Esses dados estão disponibilizados para acesso por meio do Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa (BDMEP) do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). Os dados foram organizados de modo que a variável aleatória do estudo fosse a temperatura máxima mensal diária, compreendida entre os anos de 1980 e 2019, sendo cada série mensal foi composta tomando-se a maior observação do mês em cada ano. A série mensal de dados foi dividida em dois grupos: os dados correspondentes ao período entre 1980 e 2009 foram utilizados no cálculo da Normal Climatológica e no ajuste da distribuição GEV e os dados compreendidos entre 2010 e 2019 foram utilizados no cálculo das predições.

Utilizou-se o teste de Ljung-Box para analisar a independência da série de máximos. A hipótese nula deste teste é que as autocorrelações nos dados são iguais a zero. Para analisar se há tendência na série, aplicou-se o teste de Mann-Kendal. A hipótese nula do teste é de que não existe tendência na série. Para verificar o ajuste da distribuição GEV às séries de máximos de temperatura, utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S). A utilização do teste K-S, justifica-se por avaliar o grau de concordância entre a distribuição adotada (GEV) e o conjunto de dados. Para todos os testes foram adotados o nível de significância de 5%.

A distribuição GEV foi ajustada aos dados mensais de temperaturas máxima de Lavras-MG, considerando-se o período compreendido entre 1980 e 2009, por meio da Inferência Bayesiana com o uso de *prioris* não informativas e informativas. As distribuições utilizadas como *priori* não informativas para cada um dos parâmetros da distribuição GEV, com seus respectivos parâmetros, foram: $\mu \sim$ Normal (a=*0*; b=0,0001), $\sigma \sim$ Lognormal (c = 0; d = 0,04) e $\xi \sim$ Normal (e=0; f=0,001). Os parâmetros a, c e e são parâmetros de posição de suas respectivas distribuições, enquanto que os parâmetros b, d e f são parâmetros de precisão, correspondendo ao inverso do quadrado da variância das distribuições.

Para a elicitação das *prioris* informativas foram utilizados os dados de temperatura máxima mensal de Machado (MG). Os dados de temperatura máxima diária, em graus Celsius (°C), compreendidos entre os anos de 1981 e 2009 foram obtidos junto à estação convencional de código OMM: 83687. Segundo Alves *et al.* (2011), o município de Machado, possui as coordenadas geográficas 21,6807220 S e 45,9443890 O e altitude de 969,00 m. As distribuições Normal, para os parâmetros posição e forma, e Lognormal, para o parâmetro escala da distribuição GEV foram elicitadas como *prioris* informativas. Os valores dos hiperparâmetros foram determinados a partir das estimativas obtidas, pelo método da máxima verossimilhança, para os parâmetros da distribuição GEV no ajuste dos dados de temperatura máxima mensal de Machado, da seguinte forma:

a) *Priori* informativa do parâmetro posição da distribuição GEV: distribuição Normal $(a,\ b)$ em que a e b são, respectivamente, a estimativa e o inverso do quadrado do erro padrão da estimativa do parâmetro posição da distribuição GEV ajustada aos dados de temperatura máxima de Machado;

b) *Priori* informativa do parâmetro escala da distribuição GEV: distribuição Lognormal $\left(c,\ \frac{1}{d^2}\right)$ em que c e d são obtidos a partir da solução do sistema não linear

$$\begin{cases} \exp\left(c + \frac{1}{2}d^2\right) - \widehat{\sigma} & = \ 0 \\ \exp\left(2c + d^2\right) \cdot [\exp(d^2) - 1)] - Var(\widehat{\sigma}) & = \ 0 \end{cases}$$

no qual $\widehat{\sigma}$ e $Var(\widehat{\sigma})$ são, respectivamente, a estimativa e a variância da estimativa do parâmetro escala da GEV obtidos no ajuste dos dados de temperatura máxima de Machado. Os hiperparâmetros da distribuição *a priori* do parâmetro escala foram obtidos dessa forma para garantir que a média e a variância dessa distribuição sejam, respectivamente, a estimativa e a variância da estimativa do parâmetro escala da distribuição GEV obtidas no ajuste para os dados de Machado. O cálculo do valor esperado e da variância de uma variável aleatória com distribuição Lognormal, que justifica o uso da solução do sistema com propósito desejado, está apresentado no Apêndice D.

c) *Priori* informativa do parâmetro forma da distribuição GEV: distribuição Normal $(e,\ f)$ em que e e f são, respectivamente, a estimativa e o inverso do quadrado do erro padrão da estimativa do parâmetro forma da distribuição GEV ajustada aos dados de temperatura máxima de Machado.

Outras estruturas de *prioris* informativas foram obtidas multiplicando-se o quadrado do erro padrão das estimativas dos parâmetros da distribuição GEV por $\frac{1}{2}$, 2 e 5. A partir desses novos valores, as novas *prioris* foram elicitadas seguindo-se os mesmos critérios utilizados na elicitação das *prioris* informativas descritas anteriormente.

3.1 COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DE PREDIÇÃO

Para avaliar as estruturas de priori, o DIC foi utilizado de acordo com a seção (2.5). Caso não exista diferença substancial entre os modelos, foram adotados o erro médio de predição (EMP) e a raiz do erro quadrático médio (REQM). Estas métricas, também, foram empregadas para comparar as predições obtidas para a temperatura máxima de Lavras-MG, por meio das Normais Climatológicas, com as predições obtidas por meio da distribuição GEV ajustada via metodologia bayesiana.

O cálculo do erro médio de predição (EMP), é definido por:

$$EMP = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i}\right| \times 100\%, \tag{3.1}$$

em que, x_i é a temperatura do ar máxima observada para o i-ésimo tempo de retorno, $\hat{x}_i$ é a temperatura do ar máxima predita para o i-ésimo tempo de retorno e N é o número de tempos de retorno estudados. Neste trabalho foram adotados 4 tempos de retorno: 3, 5, 8 e 10 anos.

O cálculo da raiz do erro quadrático médio de predição ($EQMP$), é definido por:

$$EQMP = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i - \hat{x}_i)^2}{x_i}} \times 100\%, \tag{3.2}$$

em que, x_i é a temperatura do ar máxima observada para o i-ésimo tempo de retorno, $\hat{x_i}$ é a temperatura do ar máxima predita para o i-ésimo tempo de retorno e N é o número de tempos de retorno estudados. Os tempos de retorno utilizados para o cálculo do $EQMP$ foram os mesmos utilizados no cálculo do EMP.

As métricas de erro consideram o desempenho em termos do desvio da temperatura do ar máxima observada e dos valores de temperatura predita. Assim, a metodologia com menores erros indicam ser melhores em comparação com aqueles que apresentam erros maiores.

A obtenção das marginais das distribuições a posteriori foi realizada aplicando o método MCMC por meio do freeware OpenBugs, que utiliza os algoritmos iterativos Metropolis-Hastings e Amostrador de Gibbs. O processo de estimação foi realizado via software R, utilizando-se os pacotes evd (STEPHENSON, 2002), evdbayes (STEPHENSON; RIBATET., 2023), extRemes (GILLELAND; KATZ, 2016) e R2OpenBUGS (STURTZ; LIGGES; GELMAN, 2005).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Tabela 1 são apresentadas os valores dos hiperparâmetros obtidos via distribuição GEV ajustada aos dados de temperatura do ar máxima, obtidas no ajuste desse modelo aos dados de temperaturas máximas mensais de Machado por meio de máxima verossimilhança.

Tabela 1 – Valores dos hiperparâmetros das distribuições *a priori* informativas dos parâmetros da distribuição GEV utilizados no ajuste da temperatura máxima do ar de Lavras (MG), no período de 1980 a 2009, para os meses estudados, obtidos a partir do ajuste dos dados de temperatura máxima de Machado (MG).

Mês	Posição		Escala		Forma	
	a	b	c	d	e	f
Janeiro	$32,1456$	$11,2939$	$0,3533$	$45,8623$	$-0,1404$	$50,4570$
Fevereiro	$32,3977$	$13,4403$	$0,2954$	$49,5489$	$-0,3436$	$69,0756$
Março	$32,0188$	$14,1543$	$0,2480$	$42,1167$	$-0,4031$	$44,1274$
Abril	$30,6408$	$14,1543$	$0,1438$	$42,7119$	$-0,4031$	$44,4962$
Maio	$28,5849$	$19,1232$	$0,0860$	$45,1044$	$-0,0786$	$48,2926$
Junho	$27,2844$	$14,9693$	$0,2154$	$46,0916$	$-0,2574$	$46,4679$
Julho	$27,9550$	$15,5035$	$0,2183$	$51,4921$	$-0,1393$	$75,4394$
Agosto	$30,9888$	$14,5488$	$0,2286$	$44,7335$	$-0,2344$	$49,4017$
Setembro	$32,0865$	$4,8024$	$0,8296$	$52,1045$	$-0,4333$	$100,0346$
Outubro	$32,9027$	$6,4785$	$0,6439$	$37,7696$	$-0,4741$	$42,8472$
Novembro	$32,4624$	$26,0071$	$-0,0638$	$45,8687$	$-0,1329$	$50,9061$
Dezembro	$31,6396$	$12,27988$	$0,3044$	$44,4625$	$-0,2237$	$42,3655$

a: Parâmetro posição da distribuição Normal
b: Parâmetro precisão da distribuição Normal
c: Parâmetro posição da distribuição Log-normal
d: Parâmetro precisão da distribuição Log-normal
e: Parâmetro posição da distribuição Normal
f: Parâmetro precisão da distribuição Normal

Fonte: do autor

Com o intuito de refinar as distribuições *a priori*, as variâncias dos parâmetros da distribuição GEV obtidos no ajuste dos dados de temperatura máxima mensal de Machado (MG) foram multiplicadas por $\frac{1}{2}$, 2 e 5.

Na Tabela 2 são apresentadas os valores dos hiperparâmetros obtidos via distribuição GEV ajustada aos dados de temperatura do ar máxima.

Tabela 2 – Valores dos hiperparâmetros posição (μ) e precisão (τ) da Log-Normal obtidos via distribuição GEV ao se multiplicar a estimativa da variância do parâmetro escala por $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2} \cdot Var(\widehat{\sigma})\right)$, 2 $(2 \cdot Var(\widehat{\sigma}))$ e 5 $(5 \cdot Var(\widehat{\sigma}))$.

Mês	$\frac{1}{2} \cdot Var(\widehat{\sigma})$		$2 \cdot Var(\widehat{\sigma})$		$5 \cdot Var(\widehat{\sigma})$	
	μ	τ	μ	τ	μ	τ
Janeiro	$0,3587$	$91,2360$	$0,3427$	$23,1806$	$0,3120$	$9,5650$
Fevereiro	$0,3004$	$98,6004$	$0,2855$	$25,0220$	$0,2570$	$10,3020$
Março	$0,2539$	$83,7361$	$0,364$	$21,3054$	$0,2031$	$8,8143$
Abril	$0,1496$	$84,9267$	$0,1323$	$21,6031$	$0,0995$	$8,9334$
Maio	$0,0916$	$89,7115$	$0,0752$	$22,7995$	$0,0440$	$9,4154$
Junho	$0,2208$	$91,6859$	$0,2048$	$23,2931$	$0,1742$	$9,6100$
Julho	$0,2231$	$102,4866$	$0,2088$	$25,9937$	$0,1812$	$10,6910$
Agosto	$0,2342$	$88,9698$	$0,2177$	$22,6140$	$0,1863$	$9,3382$
Setembro	$0,8344$	$103,7113$	$0,8202$	$26,2999$	$0,7930$	$10,8135$
Outubro	$0,6504$	$75,0425$	$0,6310$	$19,1315$	$0,5942$	$7,9439$
Novembro	$-0,0583$	$91,2601$	$-0,0744$	$23,1867$	$-0,1051$	$9,5674$
Dezembro	$0,3100$	$86,4277$	$0,2934$	$22,4785$	$0,2619$	$9,2839$

Fonte: do autor

Na Tabela 3 são apresentados os resultados de independência e tendência das séries mensais de temperatura máxima de Lavras-MG de 1980 a 2020.

Tabela 3 – Resultados do teste de Ljung-Box (LB) para independência e Mann-Kendall (MK) para estacionariedade das séries mensais de temperatura máxima de Lavras-MG .

Meses	Resultado dos testes	
	LB	MK
Jan	0,4286	0,0630
Fev	0,2894	0,2205
Mar	0,8731	0,0632
Abr	0,1295	0,0602
Mai	0,0716	0,1783
Jun	0,5369	0,2845
Jul	0,3756	0,0920
Ago	0,6498	0,5941
Set	0,7364	0,1224
Out	0,6166	0,0607
Nov	0,9592	0,4668
Dez	0,8733	0,0599

Fonte: do autor

Analisando os resultados do teste de Ljung-Box e Mann-Kendall (Tabela 3), pode-se verificar que todas as séries apresentaram independência e comportamento estacionário (valor $p > 0,05$). Estes resultados corroboram com Sansigolo (2008), que também observou a ausência de tendência na série de temperatura máxima de Piracicaba-SP, por meio do teste Kendall.

Primeiramente, serão apresentados os resultados do ajuste da distribuição GEV aos dados de temperatura máxima de Lavras-MG por meio da estimação Bayesiana com *priori* não informativa.

Na Tabela 4 são apresentados os resultados dos critérios de convergência dos parâmetros da distribuição GEV para os dados de temperaturas máximas mensais de Lavras para *priori* não informativa.

Pela Tabela 4, verifica-se que não há evidências que indiquem a ausência de convergência das cadeias *a posteriori.* Analisando-se o fator de dependência do critério de Raffery e Lewis, verifica-se que valores estão próximos de 1 para todas as cadeias, o que indica a independência entre as interações. Pelo critério de Geweke, verifica-se que todos os valores absolutos da estatística do teste de Geweke são menores que 1,96, indicando que não há indícios de ausência de convergência. Observando-se os valores p obtidos a partir do critério de Heidelberger-Welch, foi constatado que a série é estacionária, pois todos são maiores que 0,05. Todos os critérios de convergência foram avaliados com 5% de significância. Diante dos resultados obtidos para as diferentes *prioris* estudadas nota-se que as conclusões são similares. Os resultados dos critérios de convergência aplicados nas cadeias *a posteriori* dos parâmetros da distribuição GEV ajustada com o uso de *prioris* informativas são apresentados no Apêndice C.

Na Tabela 5 são apresentadas as médias *a posteriori*, limites inferiores e limites superiores com 95% de credibilidade dos parâmetros da GEV, com seus respectivos erros padrão, obtidas no ajuste desse modelo aos dados de temperaturas máximas mensais de Lavras-MG.

Pela Tabela 5 a seguinte análise pode ser realizada: considerando *a priori* não informativa e o mês de dezembro, existe 95% de probabilidade (crença) de que μ esteja no intervalo entre 31,060 e 32,160, $\widehat{\sigma}$ esteja entre 0,721 e 1,363 e $\widehat{\xi}$ esteja entre -0,879 e -0,236.

Na Tabela 6 são apresentados os resultados teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S), referentes à analise do ajuste da distribuição GEV às séries mensais de temperatura máxima

Tabela 4 – Resultados dos testes de Convergência no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009, para os meses estudados para *priori* não informativa.

Mês	Parâmetro	Testes de Convergência		
		Geweke	Raftery e Lewis	Heidelberger-Welch
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$1,30$	$1,05$	$0,40$
	$\widehat{\sigma}$	$0,63$	$1,01$	$0,17$
	$\widehat{\xi}$	$0,21$	$1,04$	$0,75$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$0,53$	$1,03$	$0,70$
	$\widehat{\sigma}$	$0,36$	$1,00$	$0,17$
	$\widehat{\xi}$	$0,17$	$1,00$	$0,46$
Março	$\widehat{\mu}$	$0,25$	$1,06$	$0,73$
	$\widehat{\sigma}$	$0,51$	$1,00$	$0,29$
	$\widehat{\xi}$	$0,12$	$0,99$	$0,13$
Abril	$\widehat{\mu}$	$1,08$	$1,01$	$0,62$
	$\widehat{\sigma}$	$1,15$	$1,00$	$0,38$
	$\widehat{\xi}$	$1,45$	$1,00$	$0,55$
Maio	$\widehat{\mu}$	$1,17$	$1,04$	$0,93$
	$\widehat{\sigma}$	$1,07$	$0,99$	$0,98$
	$\widehat{\xi}$	$1,08$	$1,01$	$0,59$
Junho	$\widehat{\mu}$	$1,01$	$1,06$	$0,38$
	$\widehat{\sigma}$	$1,26$	$1,00$	$0,46$
	$\widehat{\xi}$	$0,76$	$1,00$	$0,66$
Julho	$\widehat{\mu}$	$0,30$	$1,04$	$0,48$
	$\widehat{\sigma}$	$1,80$	$1,00$	$0,45$
	$\widehat{\xi}$	$0,22$	$1,01$	$0,43$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$0,99$	$1,04$	$0,88$
	$\widehat{\sigma}$	$0,97$	$1,01$	$0,54$
	$\widehat{\xi}$	$1,08$	$1,00$	$0,18$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$0,92$	$1,00$	$0,17$
	$\widehat{\sigma}$	$0,46$	$1,01$	$0,66$
	$\widehat{\xi}$	$1,43$	$1,00$	$0,70$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$0,60$	$1,01$	$0,74$
	$\widehat{\sigma}$	$0,49$	$1,00$	$0,13$
	$\widehat{\xi}$	$1,25$	$1,01$	$0,13$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$0,02$	$1,05$	$0,80$
	$\widehat{\sigma}$	$0,82$	$1,02$	$0,45$
	$\widehat{\xi}$	$0,68$	$1,01$	$0,71$
Dezembro	$\widehat{\mu}$	$1,20$	$1,03$	$0,48$
	$\widehat{\sigma}$	$0,25$	$1,00$	$0,62$
	$\widehat{\xi}$	$0,53$	$1,00$	$0,60$

Fonte: do autor

de Lavras-MG de 1980 a 2009, considerando as estimativas dos parâmetros obtidas com *a priori* não informativa.

Tabela 5 – Estimativas dos parâmetros da Distribuição GEV, seus respectivos erros padrão (E.P.) e intervalo de 95% de credibilidade ($IC_{95\%}(\theta)$) obtidas no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009, com a elicitação de *prioris não informativas*.

Mês	Parâmetro	Estimativa	
		Estimativa (E.P)	$IC_{95\%}(\theta)$
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$32,0848; (0,2674)$	$[31,570; 32,610]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3033; (0,1840)$	$[0,979; 1,679]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,3366; (0,1504)$	$[-0,593; -0,025]$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$32,2592; (0,1900)$	$[31,890; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9400; (0,1327)$	$[0,702; 1,208]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2956; (0,1234)$	$[-0,531; -0,044]$
Março	$\widehat{\mu}$	$31,7602; (0,1932)$	$[31,360; 32,120]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9475; (0,1433)$	$[0,692; 1,234]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,1555; (0,1161)$	$[-0,375; 0,080]$
Abril	$\widehat{\mu}$	$30,2490; (0,2135)$	$[29,830; 30,660]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,0352; (0,1570)$	$[0,754; 1,352]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2265; (0,1509)$	$[-0,496; 0,085]$
Maio	$\widehat{\mu}$	$28,3675; (0,2250)$	$[27,910; 28,l79]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,1180; (0,1666)$	$[0,832; 1,460]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2403; (0,1251)$	$[-0,4775; -0,018]$
Junho	$\widehat{\mu}$	$27,4318; (0,2968)$	$[26,880; 28,020]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,4111; (0,3381)$	$[0,897; 2,063]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,7422; (0,2275)$	$[-1,46; -0,287]$
Julho	$\widehat{\mu}$	$27,9226; (0,2626)$	$[26,800; 27,690]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,2980; (0,1902)$	$[0,875; 1,473]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2646; (0,1474)$	$[-0,560; 0,027]$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$31,749; (0,47274)$	$[30,780; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$2,398; (0,3194)$	$[1,876; 3,030]$
	$\widehat{\xi}$	$-1,291; (0,4300)$	$[-1,655; -0,550]$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$30,8500; (0.5144)$	$[30,840; 32,900]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,837; (0,3626)$	$[1,872; 3,243]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,5759; (0,1180)$	$[-0,800; -0,332]$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$32,8700; (0,4126)$	$[31,890; 33,480]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,483; (0,3021)$	$[1,433; 2,578]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,251; (0,1860)$	$[-0,585; -0,105]$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$31,548; (0,2119)$	$[30,960; 32,140]$
	$\widehat{\sigma}$	$31,545; (0,1696)$	$[30,960; 32,140]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2443; (0,1719)$	$[-0,575; 0,109]$
Dezembro	$\widehat{\mu}$	$31,6508; (0,3055)$	$[31,060; 32,160]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,743; (0,2393)$	$[0,721; 1,363]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,5559; (0,1181)$	$[-0,879; -0,236]$

Fonte: do autor

Analisando-se os resultados do teste de K-S (Tabela 6), verificou-se que a distri-

Tabela 6 – Resultados (valor-p) do teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) do ajuste da distribuição GEV às séries mensais de temperatura máxima de Lavras-MG, de 1980 a 2009.

Meses	Resultado do teste K-S
Jan	0,6713
Fev	0,3870
Mar	0,4080
Abr	0,7519
Mai	0,6614
Jun	0,2832
Jul	0,7718
Ago	0,6165
Set	0,9398
Out	0,3028
Nov	0,5931
Dez	0,4837

Fonte: do autor

buição GEV ajustou-se à todas as séries de temperaturas máximas de Lavras-MG ($p>$ 0,05).

Na Tabela 7 são apresentados os níveis de retorno de temperaturas máximas, em °C, para os tempos de retorno de 3, 5, 8 e 10 anos, preditos a partir do ajuste bayesiano da distribuição GEV com *priori* não informativa. Nessa tabela também são apresentadas, entre parênteses, as temperaturas máximas mensais que foram observadas em Lavras- MG no período de 2010 a 2019.

Tabela 7 – Níveis de retorno mensais, em °C, obtidos via Distribuição GEV para a série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG de 2010 a 2020, e os valores reais das temperaturas máximas no mesmo período (entre parênteses).

Mês	Tempo de retorno (anos)			
	3	5	8	10
Janeiro	$33,15\ (33,6)$	$33,73\ (33,5)$	$34,18\ (34,4)$	$34,36\ (34,4)$
Fevereiro	$33,01\ (34,1)$	$33,41\ (34,1)$	$33,70\ (34,1)$	$33,82\ (34,8)$
Março	$32,56\ (33,0)$	$33,03\ (33,0)$	$33,40\ (33,0)$	$33,56\ (33,2)$
Abril	$31,62;(31,4)$	$32,12\ (31,4)$	$32,51\ (32,4)$	$32,68\ (32,4)$
Maio	$31,07\ (30,3)$	$31,69\ (30,3)$	$32,27\ (30,3)$	$32,57\ (30,3)$
Junho	$28,35\ (29,0)$	$28,69\ (29,0)$	$28,88\ (29,0)$	$28,84\ (29,0)$
Julho	$28,97\ (29,1)$	$29,55\ (29,2)$	$29,98\ (29,2)$	$30,16\ (29,2)$
Agosto	$32,54\ (31,8)$	$32,81\ (31,8)$	$32,99\ (31,8)$	$32,93\ (31,8)$
Setembro	$33,50\ (33,8)$	$34,30\ (33,8)$	$34,82\ (35,0)$	$35,02\ (36,2)$
Outubro	$33,87\ (35,9)$	$34,66\ (36,4)$	$35,25\ (36,4)$	$35,50\ (36,4)$
Novembro	$32,89\ (34,4)$	$33,42\ (34,4)$	$33,81\ (34,4)$	$33,98\ (34,4)$
Dezembro	$32,65\ (33,2)$	$33,09\ (33,2)$	$33,38\ (33,7)$	$33,48\ (34,2)$

Fonte: do autor

Pela Tabela 7 escolhendo-se o mês de dezembro, com o tempo de retorno de 10 anos, uma interpretação do valor encontrado (33,5 °C) pode ser feita da seguinte forma: em um tempo médio de 10 anos espera-se que, em pelo menos um dia, ocorra uma temperatura maior ou igual a 33,5 °C em Lavras no mês de dezembro. A temperatura máxima ocorrida em Lavras para o mês de dezembro no período de 10 anos a partir do ano de 2010 foi de 34,2 °C. O nível de retorno subestimou, portanto, a temperatura máxima no período para o mês de dezembro em 0,72 °C.

Os valores apresentados na Tabela 7 foram utilizados no cálculo dos erros médios de predição obtidos a partir do ajuste da distribuição GEV com *priori* não informativa com para os meses estudados. Esses erros médios de predição foram comparados com os obtidos a partir das normais climatológicas. Na Tabela 8 são apresentados os erros médios de predição.

Tabela 8 – Erro Médio de Predição (EMP), em °C, para os tempos de retornos de 3, 5, 8 e 10 anos obtidos via normal climatológica (NC) e do ajuste da distribuição GEV com *priori* não informativa (IBNI).

Meses	Erro Médio de Predição	
	NC	IBNI
Jan	1,4179	-0,2016
Fev	-1,6991	-0,7912
Mar	-0,9052	0,0861
Abr	-1,2586	-0,3114
Mai	-1.5276	-0,4261
Jun	-1,3827	-0,2636
Jul	-0,7819	-0,5547
Ago	-1,1320	-0,9983
Set	-2,3311	-0,5411
Out	-3,1893	-1,4551
Nov	-2,0310	-0,8766
Dez	-1,6071	-0,4250

Fonte: do autor

Para todos meses observa-se que os menores erros absolutos foram obtidos utilizando a distribuição GEV com estimação Bayesiana com *a priori* não informativa. Em média, tanto a Normal Climatológica como a GEV subestimaram a temperatura máxima para todos os meses, com exceção dos meses de janeiro e estimação por Normal Climatológica e de março e estimação Bayesiana. Em valores absolutos, o maior erro médio de predição obtido pelo ajuste da distribuição GEV foi de, aproximadamente, 1,45°C, no mês de outubro. Para esse mesmo mês, o erro médio de predição obtido pela normal climatológica em valor absoluto foi praticamente o dobro. Portanto, a distribuição GEV com estimação Bayesiana com *priori* não informativa apresenta menores erros médios de predição que a normal climatológica.

Considerando-se a Normal Climatológica observa-se que os valores absolutos dos erros encontrados estão maiores. Ambas as predições erram para menos, mas o erro absoluto obtido pela Normal Climatológica é maior do que a encontrada pelo modelo bayesiano. O maior erro absoluto pode trazer problemas para a segurança da atividade agropecuária. Segundo Rignot *et al.* (2004), com a elevação das temperaturas, no mínimo 18 espécies estarão ameaçadas de extinção até o ano de 2050. Segundo Assad *et al.* (2004) pode-se admitir o aumento da temperatura nas plantas é diretamente proporcional à atividade fotossintética. Desta forma, as reações químicas enzimáticas podem ser aceleradas, causando perdas no resultado das enzimas, pois este fator associado à tolerância das plantas ao calor. Segundo Cargnelutti Filho *et al.* (2005), entre os elementos meteorológicos, a temperatura do ar é fundamental, principalmente em relação às atividades agropecuárias. Em presença de temperaturas máximas superiores a 28°C há reduções no rendimento de grãos de feijoeiro e superiores a 30°C no florescimento causam cortes de flores, provocando diminuição do número de vagens por planta e redução de rendimento.

A distribuição GEV também foi ajustada aos dados de temperatura máxima de Lavras-MG por meio da estimação Bayesiana com *prioris* informativas. A elicitação dessas *prioris* foi feita a partir do ajuste da distribuição GEV por máxima verossimilhança para os dados de Machado-MG. Na Tabela 9 são apresentadas as estimativas dos parâmetros da distribuição GEV com seus respectivos erros padrão (E.P.), obtidas no ajuste desse modelo aos dados de temperaturas máximas mensais de Machado utilizando o método da máxima verossimilhança.

Tabela 9 – Estimativas dos parâmetros da Distribuição GEV e seus respectivos erros padrão (E.P.), obtidos por meio do método da máxima verossimilhança no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Machado - MG no período de 1980 a 2009, para os meses estudados.

Mês	Estimativas (E.P.)		
	$\widehat{\mu}$	$\widehat{\sigma}$	$\widehat{\xi}$
Janeiro	$32,1456\ (0,2976)$	$1,4394\ (0,2137)$	$-0,1405\ (0,1408)$
Fevereiro	$32,3977\ (0,2728)$	$1,3573\ (0,1938)$	$-0,3436\ (0,1203)$
Março	$32,0188\ (0,2658)$	$1,2967\ (0,2010)$	$-0,4031\ (0,1499)$
Abril	$30,6408\ (0,2428)$	$1,1682\ (0,1798)$	$-0,2709\ (0,1522)$
Maio	$28,5849\ (0,2287)$	$1,1020\ (0,1650)$	$-0,0786\ (0,1439)$
Junho	$27,2844\ (0,2585)$	$1,2539\ (0,1857)$	$-0,2574\ (0,1461)$
Julho	$27,9550\ (0,2540)$	$1,2561\ (0,1759)$	$-0,1393\ (0,1151)$
Agosto	$30,9888\ (0,2622)$	$1,2710\ (0,1911)$	$-0,2344\ (0,1423)$
Setembro	$32,0865\ (0,4563)$	$2,3146\ (0,3222)$	$-0,4333\ (0,1000)$
Outubro	$32,9027\ (0,3929)$	$1,9292\ (0,3160)$	$-0,4741\ (0,1528)$
Novembro	$32,4624\ (0,1961)$	$0,9485\ (0,1408)$	$-0,1329\ (0,1402)$
Dezembro	$31,6396\ (0,2854)$	$1,3712\ (0,2068)$	$-0,2237\ (0,1536)$

Fonte: do autor

Na Tabela 9 observando-se as colunas que contém as estimativas dos parâmetros da distribuição GEV, com seus respectivos erros padrões, é possível observar, ao nível de 5% de significância, que os parâmetros posição e escala dessa distribuição são significativamente diferentes de zero para todos os meses. O parâmetro forma é significativamente igual a zero para os meses de janeiro, abril, maio, junho, julho, agosto, novembro e dezembro e é significativamente diferente de zero para os meses de fevereiro, março, setembro, outubro.

Na Tabela 10 são apresentados os erros médios de predição obtidos pela normal climatológica e pelos ajustes Bayesianos com prioris não informativa e informativas para os dados mensais de temperatura máxima de Lavras-MG.

Tabela 10 – Erro Médio de Predição (EMP) para tempos de retornos de 3, 5, 8 e 10 anos considerando a normal climatológia (NC) e as estimações Bayesianas com prioris não informativa (IBNI)e informativa com as estimativas do ajuste da GEV aos dados de temperatura máxima de Machado-MG (IBI), com a variância multiplicada por $\frac{1}{2}$ (IBI($\frac{1}{2}$)), por 2 (IBI(2)) e por 5 (IBI(5)).

Meses	Erro Médio de Predição					
	NC	IBNI	IBI	IBI($\frac{1}{2}$)	IBI(2)	IBI(5)
Jan	1,4179	0, 2016	0,2029	0,2249	0,2119	0,2108
Fev	1,6991	0,7912	0, 6293	0,7793	0,7766	0,7748
Mar	0,9052	0, 3070	0,3093	0,3597	0,3385	0,3398
Abr	1,2586	0,3114	0,4787	0, 2860	0,2960	0,2999
Mai	1,5276	0,4261	0, 3965	0,4092	0,4157	0,4183
Jun	1,3827	0, 2636	0,2715	0,2741	0,2843	0,2851
Jul	0,7819	0,5547	0, 5048	0,5167	0,5578	0,5601
Ago	1,1320	0,9983	0,6914	0, 6897	0,6957	0,7119
Set	2,3311	0,5411	0,5122	0, 4831	0,4835	0,4862
Out	3,1893	1,4551	1, 3056	1,3553	1,3877	1,4071
Nov	2,0310	0,8766	0,7931	0, 7701	0,8110	0,8490
Dez	1,6071	0,4250	0,4303	0,4368	0,4231	0, 4194

Fonte: do autor

Na Tabela 10 é possível observar que os erros médios de predição obtidos por meio da estimação Bayesiana foram menores que os obtidos pela Normal Climatológica para todos os meses do ano. A estimação Bayesiana com *priori* não informativa apresentou os menores erros médios de predição para os meses de janeiro, março e junho. O uso da priori informativa elicitada a partir do ajuste da distribuição GEV para os dados de temperatura máxima de Machado-MG forneceu menores erros médios de predição para os meses de fevereiro, maio, julho e outubro. A priori elicitada a partir da multiplicação da variância das estimativas por $\frac{1}{2}$ apresentou os menores erros médios de predição para os meses de abril, agosto, setembro e novembro. O menor erro médio de predição para o mês de dezembro foi obtido na priori elicitada a partir da multiplicação da variância das estimativas dos parâmetros da distribuição GEV multiplicadas por 5. A maior diferença obtida para o erro médio de predição a partir da elicitação de duas prioris foi de 0,1619 °C, no mês de fevereiro, entre as prioris não informativa e a elicitada a partir do ajuste da distribuição GEV para os dados de temperatura máxima de Machado-MG.

Na Tabela 11 são apresentados a raiz do erro quadrático médio obtidos pela normal climatológica e pelos ajustes Bayesianos com prioris não informativa e informativas para os dados mensais de temperatura máxima de Lavras-MG.

Tabela 11 – Raiz do Erro Quadrático Médio de Predição (REQMP) para tempos de retorno de 3, 5, 8 e 10 anos considerando a normal climatológia (NC) e as estimações Bayesianas com prioris não informativa (IBNI)e informativa com as estimativas do ajuste da GEV aos dados de temperatura máxima de Machado-MG (IBI), com a variância multiplicada por $\frac{1}{2}$ (IBI($\frac{1}{2}$)), por 2 (IBI(2)) e por 5 (IBI(5)).

Meses	Raiz do Erro Médio de Predição					
	NC	IBNI	IBI	IBI($\frac{1}{2}$)	IBI(2)	IBI(5)
Jan	1,4732	$\underline{0,2361}$	0,2530	0,2582	0,2536	0,2518
Fev	1,7260	0,8355	0,8190	$\underline{0,6882}$	0,8212	0,8220
Mar	0,9093	$\underline{0,3479}$	0,3904	0,3638	0,3646	0,3662
Abr	1,3543	0,3275	0,6535	0,6325	$\underline{0,3072}$	0,3121
Mai	1,5276	0,5786	$\underline{0,5608}$	0,5725	0,5637	0,5676
Jun	1,3828	0,3657	$\underline{0,32565}$	0,3349	0,3400	0,3478
Jul	0,7831	0,6466	0,4766	$\underline{0,4652}$	0,4717	0,4756
Ago	1,6690	1,0102	0,7596	$\underline{0,7215}$	0,7298	0,7398
Set	2,5346	0,6655	0,6394	$\underline{0,4212}$	0,4385	0,4392
Out	3,1966	1,5229	$\underline{1,3528}$	1,4044	1,4254	1,4696
Nov	2,0310	0,9704	0,8692	$\underline{0,8691}$	0,9082	0,9650
Dez	1,6597	0,4833	$\underline{0,4251}$	0,4923	0,4813	0,4784

Fonte: do autor

Para os meses de janeiro e março observa-se que os menores erros foram obtidos utilizando (IBNI) sendo 0,2361 e 0,3479 respectivamente. Para os meses fevereiro, julho, agosto, setembro e novembro observa-se que os menores erros foram obtidos utilizando (IBI($\frac{1}{2}$)) sendo 0,6882; 0,4652; 0,7215; 0,4212 e 0,8691 respectivamente. Para o meses de maio, junho, outubro e dezembro observa-se que os menores erros foi obtidos utilizando (IBI) sendo 0,5608; 0,3256; 1,3528 e 0,4251 respectivamente. Já para o mês de abril observa-se que o erro menor foi obtido utilizando (IBI(2)) sendo 0,3072.

Na Tabela 12 são apresentados os valores do DIC obtidos para os modelos ajustados via metodologia Bayesiana.

Tabela 12 – Resultados do Critério de Informação de Deviance (DIC) obtidos para os modelos ajustados com *priori* não informativa (IBNI), *priori* informativa (IBI), *priori* informativa com variância multiplicada por $\frac{1}{2}$ (IBI($\frac{1}{2}$)),*priori* informativa com variância multiplicada por 2 (IBI(2)) e *priori* informativa com variância multiplicada por 5 (IBI(5)).

Meses	Critério de Informação do Desvio.				
	IBNI	IBI	IBI($\frac{1}{2}$)	IBI(2)	IBI(5)
Jan	96,92	96,67	96,54	96,80	97,00
Fev	79,01	78,80	78,66	78,93	79,04
Mar	83,33	82,88	82,80	82,99	83,13
Abr	87,01	86,60	86,53	86,77	86,60
Mai	90,40	90,02	89,91	90,18	90,02
Jun	87,01	87,12	87,21	86,97	86,65
Jul	99,44	99,40	98,89	99,24	98,96
Ago	99,90	100,60	100,70	100,30	100,60
Set	127,30	126,70	126,50	126,80	126,70
Out	113,40	112,70	112,50	112,90	112,50
Nov	95,05	93,28	93,21	93,40	93,30
Dez	127,30	126,70	126,50	126,80	126,50

Fonte: do autor

Observando-se a Tabela 12 é possível perceber que, para cada mês, o valor absoluto da diferença dos DIC obtidos entre quaisquer dois modelos é menor que 5. Portanto, o DIC não pode ser utilizado na escolha do melhor modelo em nenhum dos meses.

Análise descritivas dos dados de temperaturas máximas estimadas as medidas de posição mínimo, máximo, média e mediana já as medidas de dispersão coeficiente de variação e de assimetria.

Tabela 13 – Resultados das medidas descritivas dos dados de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009, para os meses estudados.

Mês	Estimativas						
	Média	Mediana	Variância	Mínimos	Máximo	CV	CA
Jan	32,58	32,60	1,65	29,80	35,00	3,94	-0,0122
Fev	32,58	32,70	0,77	30,50	34,40	2,69	-0,1701
Mar	32,14	32,00	0,90	30,10	34,60	2,94	0,3183
Abr	30,64	30,70	1,02	28,80	32,80	3,30	0,0645
Mai	28,77	29,00	1,13	26,50	31,20	3,69	-0,0529
Jun	27,62	27,60	1,27	24,80	29,10	4,08	-0,4923
Jul	28,39	28,30	1,58	25,70	30,80	4,42	0,0733
Ago	31,13	31,50	2,13	27,90	33,00	4,69	-0,5582
Set	32,37	32,60	4,94	24,80	35,80	6,86	-1,2778
Out	33,09	32,70	2,98	30,00	36,40	5,22	0,0635
Nov	32,37	32,60	1,29	30,50	34,50	3,51	0,0851
Dez	31,97	32,00	1,50	28,90	33,80	3,83	-0,5597

Fonte: do autor

Diante dos resultados encontrados é possível perceber que os dados são assimétricos. Considera-se os meses de janeiro, fevereiro, maio, junho, agosto, setembro e dezembro os dados são assimétricos a esquerda.

5 CONCLUSÃO

De acordo com os resultados obtidos, pôde-se concluir que a distribuição GEV ajustou-se às séries mensais de temperatura máxima de Lavras-MG, as quais não apresentaram tendência no período estudado. A metodologia bayesiana permitiu estimar os parâmetros, mostrando-se eficaz para realizar predições da temperatura máxima na localidade.

A distribuição GEV, ajustada por meio da inferência bayesiana, forneceu predições melhores para a temperatura máxima de Lavras-MG que as realizadas por meio das Normais Climatológicas. Para a maioria dos meses, as *prioris* informativas tiveram desempenho melhor do que as não informativas, mostrando a eficiência da incorporação de conhecimentos a priori no estudo de temperatura máxima.

Os resultados obtidos no presente trabalho podem ser usados por pesquisadores, gestores, agricultores, entre outros, que tenham interesse em saber a influência da temperatura máxima sobre vários fenômenos ambientais na região de Lavras-MG.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, G. C. **Uma abordagem Bayesiana para a modelagem dos ventos máximos de Sorocaba-SP e Bauru-SP**. 2018. 72 f. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) — Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, MG, 2018.

ALVES, H. M. R. *et al.* Sistema de Informação Geográfica na Análise Espaço-Temporal do Parque Cafeeiro da Região de Machado–MG. *In:* SIMPÓSIO DE PESQUISA DOS CAFÉS DO BRASIL, 6., 2009, Vitória. **Anais[...].** Brasília: Embrapa-Café, 2011.

ASSAD, E. D. *et al.* Impacto das mudanças climáticas no zoneamento agroclimático do café no Brasil. **Pesquisa Agropecuária Brasileira,** Brasília, DF, v. 39, n. 11, p. 1057-1064, 2004.

BAUTISTA, E. A. L.; ZOCCHI, S. S.; ANGELOCCI, L. R. A distribuição generalizada de valores extremos aplicada ao ajuste dos dados de velocidade máxima do vento em Piracicaba, São Paulo, Brasil. **Revista Matemática e Estatística,** São Paulo, v. 22, n. 1, p. 95-111, 2004.

BEIJO, L. A. **Distribuição de Gumbel: estudo de métodos de estimação dos parâmetros e ajuste aos dados de precipitação máxima de Lavras, Minas Gerais**. 2002. 91f. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, 2002.

BISCARO, G. A. **Meteorologia agrícola básica.** Cassilândia: UNIGRAF, 2007.

BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à Inferência Estatística.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

CAIONI, C. **Uso de produtos orbitais para avaliação dos efeitos de eventos extremos de seca sobre o balanço da energia da superfície no sudeste Amazônico**. 2019. 70f. Tese (Doutorado em Ecologia e Conservação) - Universidade do Estado de Mato Grosso, Nova Xavantina, MT, 2020.

CARGNELUTTI FILHO, A. *et al.* Temperaturas máximas prejudiciais ao feijoeiro no Estado do Rio Grande do Sul, Brasil. **Ciência Rural,** Santa Maria, v. 35, n. 5, p. 1019-1026, 2005.

CEREZER, S. M. **Uso da teoria de valores extremos para estimar valores de pressões hidrodinâmicas em ressalto hidráulico formado a jusante de um vertedouro:** o caso da UHE Porto Colômbia. 2008. 190f. Tese (Doutorado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2008.

COLES, S. **An introduction to statistical modeling of extreme values.** London: Springer, 2001.

COLES, S. G.; POWELL, E. A. Bayesian Methods in extreme value modelling: a review and new developments. **International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique**, [*s. l.*], v. 64, n. 1, p. 119-136, 1996.

DANTAS, A. A. A; CARVALHO, L. G. de; FERREIRA, E. Classificação e tendências climáticas em Lavras, MG. **Ciência e Agrotecnologia,** Lavras, v. 31, n. 6, p. 1862-1866, 2007.

FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of largest or smallest member of a sample. **Proceedings of the Cambridge Philosophy Society,** [*s. l.*], v. 24, p. 180-190, 1928.

GELMAN A. *et al.* **Bayesian data analysis.** 2. ed. Boca Raton: Chalpman & Hall, 2003.

GEMAN, S; GEMAN, D. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. **IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence**, [*s. l.*], v. 6, pág. 721-741, 1984.

GILLELAND, E.; KATZ, R. W. extRemes 2.0: An Extreme Value Analysis Package in R. **Journal of Statistical Software,** [*s. l.*], v. 72, n. 8, p. 1-39, 2016.

GNEDENKO, B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. **Ann. Math.,** [*s. l.*], v. 44, n. 3, p. 423-453, 1943.

JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society,** [*s. l.*], v. 81, n. 348, p. 158-171, 1955.

MARENGO, J. A. **Mudanças climáticas globais e seus efeitos sobre a biodiversidade**: caracterização do clima atual e definição das alterações climáticas para o território brasileiro ao longo do século XXI. Brasília: MMA, 2006.

MARENGO, J. A. Impactos de extremos relacionados com o tempo e o clima: impactos sociais e econômicos. **Boletim do Grupo de Pesquisa em Mudanças Climáticas**, São Paulo, v. 8, p. 1-5, 2009.

MEDEIROS, S. S. *et al.* Estimativa e espacialização das temperaturas do ar mínimas, médias e máximas na Região Nordeste do Brasil. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 9, n. 2, p. 247-255, 2005.

MONTEIRO, J. E. B. A. (Org.) **Agrometeorologia dos cultivos:** o fator meteorológico na produção agrícola. Brasília: INMET, 2009.

OLIVEIRA, E. C. **Modelos de fração de cura de mistura e não-mistura na distribuição Weibull Modificada Generalizada.** 2015. 169 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, SP, 2015.

PAULINO, C. D.; TURKMAN, M. A. A.; MURTEIRA, B. **Estatística bayesiana.** Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing.** R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2015. Disponível em: http://www.R-project.org. Acesso em: 27 set. 2018.

RIGNOT, E. *et al.* Accelerated ice discharge from the Antarctic Peninsula following the collapse of Larsen B ice shelf. **Geophysical research letters**, [*s. l.*], v. 31, n. 18, p. 1-4, 2004.

SANSIGOLO C. A. Distribuições de extremos de precipitação diária, temperatura máxima e mínima e velocidade do vento em Piracicaba, SP (1917-2006). **Revista Brasileira de Meteorologia**, Rio de Janeiro, v. 23, n. 3, p. 341-346, 2008.

SILVA, F. A. M.; EVANGELISTA, B. A.; MALAQUIAS, J. V. **Normal climatológica de 1974 a 2003 da estação principal da Embrapa Cerrados.** Planaltina: Embrapa Cerrados, 2014.

SILVA, L. S. *et al.* Modelando a chuva máxima diária no município de João Pessoa-PB por meio da Teoria dos Valores Extremos. **Revista Brasileira de Climatologia**, Curitiba, v. 30, n. 18, p. 488-503, 2022.

STEPHENSON, A. G. evd: Extreme Value Distributions. **R News**, [*s. l.*] v. 2, n. 2, p. 31-32, 2002.

STEPHENSON, A. G.; RIBATET, M. **evdbayes:** Bayesian Analysis in Extreme Value Theory. R package version 1.1-3, 2023.

STURTZ, S.; LIGGES, U.; GELMAN, A. R2WinBUGS: A Package for Running WinBUGS from R. **Journal of Statistical Software,** Innsbruck, v. 12, n. 3, p. 1-16, 2005.

APÊNDICE A – ESTIMATIVAS DOS PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO GEV OBTIDAS NO AJUSTE ÀS SERIES DE TEMPERATURAS MÁXIMAS MENSAIS DE LAVRAS - MG

Tabela 14 – Estimativas dos parâmetros da Distribuição GEV, seus respectivos erros padrão (E.P.) obtidos no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009, para os meses estudados.

Mês	Estimativas (E.P.)		
	$\widehat{\mu}$	$\widehat{\sigma}$	$\widehat{\xi}$
Janeiro	$32,1704\ (0,2712)$	$1,2770\ (0,2000)$	$-0,3366\ (0,1504)$
Fevereiro	$32,2895\ (0,1803)$	$0,8874\ (0,1254)$	$-0.3253\ (0,1105)$
Março	$31,7804\ (0,1797)$	$0,8818\ (0,1236)$	$-0,1901\ (0,1078)$
Abril	$30,2870\ (0,2031)$	$0,9808\ (0,1456)$	$-0,2743\ (0,1322)$
Maio	$28,4032\ (1,0524)$	$1,0524\ (0,1491)$	$-0,2834\ (0,1526)$
Junho	$27,597$	$1,4908$	$-0,9923$
Julho	$27,9621\ (0,2545)$	$1,2262\ (0,1815)$	$-0,2876\ (0,1377)$
Agosto	$31,225\ (0,2823)$	$1,961\ (0,2623)$	$-1,104\ (0,1355)$
Setembro	$31,9317\ (0,4738)$	$2,3746\ (0,3642)$	$-0,5813\ (-0,5813)$
Outubro	$32,5239\ (0,3669)$	$1,6938\ (0,2817)$	$-0,3281\ (0,1721)$
Novembro	$31,977\ (0,2319)$	$1,102\ (0,1693)$	$-0,285\ (0,1517)$
Dezembro	$31,7430\ (0,2824)$	$1,3482\ (0,2389)$	$-0,6103\ (0,1677)$

Fonte: do autor

Tabela 15 – Estimativas dos parâmetros da Distribuição GEV, seus respectivos erros padrão (E.P.) e intervalo de 95% de credibilidade ($IC_{95\%}(\theta)$) obtidas no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009.

Mês	Parâmetro	Estimativa	
		Estimativa (E.P)	$IC_{95\%}(\theta)$
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$32,1251; (0,2472)$	$[31,660; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3400; (0,2089)$	$[0,974; 1,759]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2768; (0,1415)$	$[-0,552; 0,006]$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$32,2838; (0,1806)$	$[31,940; 32,640]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9500; (0,1412)$	$[0,695; 1,224]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,3055; (0,1127)$	$[-0,525; -0,081]$
Março	$\widehat{\mu}$	$31,8012; (0,1802)$	$[31,460; 32,160]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9554; (0,1429)$	$[0,692; 1,235]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,1816; (0,1058)$	$[-0,182; 0,001]$
Abril	$\widehat{\mu}$	$30,3169; (0,1948)$	$[29,920; 30,680]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,0423; (0,1559)$	$[0,764; 1,356]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2165; (0,1409)$	$[-0,245; 0,001]$
Maio	$\widehat{\mu}$	$28,4012; (0,2019)$	$[27,010; 28,790]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,1070; (0,1602)$	$[0,819; 1,430]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2327; (0,1156)$	$[-0,458; -0,003]$
Junho	$\widehat{\mu}$	$27,3662; (0,2391)$	$[26,900; 27,830]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,2944; (0,2281)$	$[0,911; 1,746]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,6236; (0,1829)$	$[-0,984; -0,270]$
Julho	$\widehat{\mu}$	$27,7521; (0,2311)$	$[26,260; 28,170]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3193; (0,2179)$	$[0,942; 1,756]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2353; (0,1309)$	$[-0,480; 0,039]$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$30,8949; (0,2824)$	$[30,300; 31,410]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,6301; (0,2771)$	$[1,177; 2,170]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,6602; (0,1757)$	$[-1,007; -0,315]$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$31,9280; (0,3869)$	$[31,140; 32,660]$
	$\widehat{\sigma}$	$2,4452; (0,3440)$	$[1,830; 3,134]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,5440; (0,1050)$	$[-0,756; -0,342]$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$32,5908; (0,3249)$	$[31,960; 33,230]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,8009; (0,2889)$	$[1,288; 2,381]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,3061; (0,1494)$	$[-0,592; -0,002]$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$32,0549; (0,2122)$	$[31,640; 32,470]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,1650; (01700)$	$[0,843; 1,507]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2571; (0,1495)$	$[-0,550; 0,042]$
Dezembro	$\widehat{\mu}$	$31,9280; (0,3869)$	$[31,140; 32,110]$
	$\widehat{\sigma}$	$2,4452; (0,2393)$	$[0,997; 1,805]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,5444; (0,1050)$	$[-0,794; -0,212]$

Fonte: do autor

Tabela 16 – Estimativas dos parâmetros da Distribuição GEV, seus respectivos erros padrão (E.P.) e intervalo de 95% de credibilidade ($IC_{95\%}(\theta)$) obtidas no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009 em que a variância é multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Mês	Parâmetro	Estimativa	
		Estimativa (E.P)	$IC_{95\%}(\theta)$
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$32,0848; (0,2674)$	$[31,570; 32,610]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3033; (0,1840)$	$[0,979; 1,679]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2336; (0,1168)$	$[-0,400; -0,013]$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$32,2592; (0,1900)$	$[31,890; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9400; (0,1327)$	$[0,702; 1,208]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2847; (0,1104)$	$[-0,497; -0,088]$
Março	$\widehat{\mu}$	$31,7602; (0,1932)$	$[31,360; 32,120]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9475; (0,1433)$	$[0,692; 1,234]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,1553; (0,1155)$	$[-0,374; 0,0797]$
Abril	$\widehat{\mu}$	$30,2490; (0,2135)$	$[29,830; 30,660]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,0352; (0,1570)$	$[0,754; 1,352]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2165; (0,1409)$	$[-0,483; 0,0525]$
Maio	$\widehat{\mu}$	$28,3675; (0,2250)$	$[27,910; 28,l79]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,1180; (0,1666)$	$[0,832; 1,460]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2362; (0,1199)$	$[-0,469; -0,003]$
Junho	$\widehat{\mu}$	$27,2488; (0,1411)$	$[26,960; 27,510]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,2191; (0,3381)$	$[1,062; 1,373]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,3627; (0,2375)$	$[-0,545; -0,177]$
Julho	$\widehat{\mu}$	$27,9226; (0,2626)$	$[26,800; 27,690]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,2980; (0,1902)$	$[0,875; 1,473]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2476; (0,1312)$	$[-0,500; -0,217]$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$31,749; (0,47274)$	$[30,780; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$2,398; (0,3194)$	$[1,876; 3,030]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,491; (0,0755)$	$[-0,600; -0,350]$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$31,9478; (0,2460)$	$[31,440; 32,400]$
	$\widehat{\sigma}$	$2,2882; (0,1358)$	$[2,027; 2,557]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,4791; (0,0568)$	$[-0,586; -0,364]$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$32,7960; (0,2190)$	$[32,8380; 33,230]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,9026; (0,1329)$	$[1,655; 2,173]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,4247; (0,0731)$	$[-0,563; -0,278]$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$32,2727; (0,1133)$	$[32,040; 32,480]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9932; (0,0614)$	$[0,878; 1,118]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2140; (0,0770)$	$[-0,363; 0,-066]$
Dezembro	$\widehat{\mu}$	$31,6508; (0,3055)$	$[31,060; 32,160]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,743; (0,2393)$	$[0,721; 1,363]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,3340; (0,1598)$	$[-0,360; 0,264]$

Fonte: do autor

Tabela 17 – Estimativas dos parâmetros da Distribuição GEV, seus respectivos erros padrão (E.P.) e intervalo de 95% de credibilidade ($IC_{95\%}(\theta)$) obtidas no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009 em que a variância é multiplicada por 2.

Mês	Parâmetro	Estimativa	
		Estimativa (E.P)	$IC_{95\%}(\theta)$
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$32,1207; (0,2571)$	$[31,620; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3464; (0,2141)$	$[0,976; 1,773]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2805; (0,1437)$	$[-0,548; -0,019]$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$32,2789; (0,1828)$	$[31,910; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,6882; (0,1327)$	$[0,688; 1,225]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,3023; (0,1149)$	$[-0,550; -0,075]$
Março	$\widehat{\mu}$	$31,7602; (0,1837)$	$[31,440; 32,150]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9533; (0,1432)$	$[0,702; 1,246]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,1750; (0,1155)$	$[-0,382; 0,044]$
Abril	$\widehat{\mu}$	$30,3010; (0,2007)$	$[29,920; 30,170]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,0422; (0,1603)$	$[0,764; 1,370]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2383; (0,1366)$	$[-0,501; 0,039]$
Maio	$\widehat{\mu}$	$28,3927; (0,2103)$	$[28,010; 28,830]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,1120; (0,1633)$	$[0,817; 1,438]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2337; (0,1184)$	$[-0,455; -0,012]$
Junho	$\widehat{\mu}$	$27,3054; (0,1988)$	$[26,910; 27,680]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,2037; (0,1536)$	$[0,924; 1,510]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,4883; (0,1430)$	$[-0,772; -0,214]$
Julho	$\widehat{\mu}$	$27,9309; (0,2415)$	$[27,460; 28,400]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,2998; (0,1974)$	$[0,945; 1,686]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2498; (0,1363)$	$[-0,516; 0,022]$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$31,749; (0,47274)$	$[30,780; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$2,3980; (0,3194)$	$[1,876; 3,030]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,4910; (0,0755)$	$[-0,600; -0,350]$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$31,9229; (0,4101)$	$[31,140; 32,730]$
	$\widehat{\sigma}$	$2,4672; (0,3547)$	$[1,838; 3,179]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,5508; (0,1096)$	$[-0,785; -0,349]$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$32,5602; (0,3389)$	$[31,890; 33,220]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,7989; (0,2926)$	$[1,274; 2,377]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2933; (0,1567)$	$[-0,590; 0,025]$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$32,0273; (0,2191)$	$[31,620; 32,480]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,1681; (0,1823)$	$[0,841; 1,525]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2532; (0,1566)$	$[-0,562; 0,058]$
Dezembro	$\widehat{\mu}$	$31,6177; (0,2212)$	$[31,190; 32,050]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3084; (0,1655)$	$[1,001; 1,636]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,4986; (0,1236)$	$[-0,677; -0,189]$

Fonte: do autor

Tabela 18 – Estimativas dos parâmetros da Distribuição GEV, seus respectivos erros padrão (E.P.) e intervalo de 95% de credibilidade ($IC_{95\%}(\theta)$) obtidas no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009 em que a variância é multiplicada por 5.

Mês	Parâmetro	Estimativa	
		Estimativa (E.P)	$IC_{95\%}(\theta)$
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$32,6000; (0,2668)$	$[31,600; 32,640]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3550; (0,2215)$	$[0,968; 1,793]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2870; (0,1497)$	$[-0,578; 0,012]$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$32,2736; (0,1883)$	$[31,920; 32,660]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,9519; (0,1436)$	$[0,701; 1,252]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,1683; (0,1178)$	$[-0,383; 0,052]$
Março	$\widehat{\mu}$	$31,7816; (0,1882)$	$[31,420; 32,150]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,7019; (0,1433)$	$[0,702; 1,234]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,1553; (0,1155)$	$[-0,374; 0,0797]$
Abril	$\widehat{\mu}$	$30,3113; (0,1975)$	$[29,920; 30,700$
	$\widehat{\sigma}$	$1,0475; (0,1526)$	$[0,770; 1,353]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2466; (0,1287)$	$[-0,492; 0,014]$
Maio	$\widehat{\mu}$	$28,3855; (0,2164)$	$[27,940; 28,780]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,1155; (0,1670)$	$[0,816; 1,445]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2365; (0,1218)$	$[-0,465; 0,018]$
Junho	$\widehat{\mu}$	$27,3990; (0,2713)$	$[26,870; 27,910]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3380; (0,2735)$	$[0,900; 1,855]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,6840; (0,2043)$	$[-1,088; -0,288]$
Julho	$\widehat{\mu}$	$27,9330; (0,2529)$	$[27,420; 28,410]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,3076; (0,2044)$	$[0,952; 1,724]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2552; (0,1409)$	$[-0,537; 0,024]$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$30,9040; (0,3276)$	$[30,210; 32,500]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,706; (0,3336)$	$[1,169; 2,396]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,7210; (0,2049)$	$[-1,160; -0,334]$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$31,9110; (0,3835)$	$[31,120; 32,620]$
	$\widehat{\sigma}$	$2,4710; (0,3599)$	$[1,832; 3,193]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,5500; (0,1107)$	$[-0,778; -0,340]$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$32,5278; (0,3519)$	$[31,850; 33,230]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,7913; (0,2978)$	$[1,254; 2,364]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,2813; (0,1618)$	$[-0,592; 0,042]$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$31,9379; (0,2082)$	$[31,530; 32,340]$
	$\widehat{\sigma}$	$1,0895; (0,1525)$	$[0,816; 1,392]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,1329; (0,0005)$	$[-0,134; -0,132]$
Dezembro	$\widehat{\mu}$	$31,6508; (0,3055)$	$[31,060; 32,160]$
	$\widehat{\sigma}$	$0,743; (0,2393)$	$[0,721; 1,363]$
	$\widehat{\xi}$	$-0,3340; (0,1598)$	$[-0,360; 0,264]$

Fonte: do autor

APÊNDICE B – RESULTADOS DOS TESTES DE CONVERGÊNCIA DAS CADEIAS DE MARKOV

Tabela 19 – Resultados dos testes de Convergência no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009, para *priori* informativa.

Mês	Parâmetro	Geweke	Raftery e Lewis	Heidelberger-Welch
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$0,19$	$1,06$	$0,57$
	$\widehat{\sigma}$	$0,77$	$1,01$	$0,57$
	$\widehat{\xi}$	$0,63$	$1,03$	$0,25$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$0,36$	$1,03$	$0,77$
	$\widehat{\sigma}$	$1,26$	$1,01$	$0,76$
	$\widehat{\xi}$	$1,56$	$1,01$	$0,28$
Março	$\widehat{\mu}$	$1,00$	$1,06$	$0,15$
	$\widehat{\sigma}$	$1,28$	$1,02$	$0,58$
	$\widehat{\xi}$	$0,24$	$1,02$	$0,30$
Abril	$\widehat{\mu}$	$0,89$	$1,09$	$0,06$
	$\widehat{\sigma}$	$0,13$	$1,01$	$0,74$
	$\widehat{\xi}$	$0,65$	$1,00$	$0,40$
Maio	$\widehat{\mu}$	$0,80$	$1,07$	$0,79$
	$\widehat{\sigma}$	$1,08$	$1,00$	$0,36$
	$\widehat{\xi}$	$0,42$	$1,00$	$0,80$
Junho	$\widehat{\mu}$	$0,23$	$1,03$	$0,58$
	$\widehat{\sigma}$	$0,28$	$0,99$	$0,62$
	$\widehat{\xi}$	$0,30$	$0,99$	$0,20$
Julho	$\widehat{\mu}$	$1,44$	$1,02$	$0,34$
	$\widehat{\sigma}$	$0,28$	$1,01$	$0,99$
	$\widehat{\xi}$	$0,86$	$1,00$	$0,49$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$0,32$	$1,05$	$0,53$
	$\widehat{\sigma}$	$1,05$	$0,99$	$0,19$
	$\widehat{\xi}$	$0,70$	$1,00$	$0,17$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$1,07$	$1,05$	$0,53$
	$\widehat{\sigma}$	$1,56$	$0,99$	$0,19$
	$\widehat{\xi}$	$0,38$	$1,00$	$0,17$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$1,36$	$1,04$	$0,11$
	$\widehat{\sigma}$	$0,84$	$1,00$	$0,43$
	$\widehat{\xi}$	$0,44$	$1,00$	$0,92$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$0,63$	$1,06$	$0,38$
	$\widehat{\sigma}$	$1,14$	$1,01$	$0,91$
	$\widehat{\xi}$	$0,90$	$1,01$	$0,92$
Dezembro	$\widehat{\mu}$	$1,03$	$1,03$	$0,94$
	$\widehat{\sigma}$	$0,35$	$1,01$	$0,73$
	$\widehat{\xi}$	$0,53$	$0,98$	$0,97$

Fonte: do autor

Tabela 20 – Resultados dos testes de Convergência no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009, estudados para *priori* informativa em que a variância foi multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Mês	Parâmetro	Geweke	Raftery e Lewis	Heidelberger-Welch
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$0,01$	$0,99$	$0,97$
	$\widehat{\sigma}$	$1,76$	$0,99$	$0,08$
	$\widehat{\xi}$	$0,86$	$0,99$	$0,46$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$1,51$	$1,06$	$0,37$
	$\widehat{\sigma}$	$0,87$	$0,98$	$0,09$
	$\widehat{\xi}$	$1,13$	$1,01$	$0,92$
Março	$\widehat{\mu}$	$1,25$	$1,09$	$0,46$
	$\widehat{\sigma}$	$0,52$	$1,02$	$0,08$
	$\widehat{\xi}$	$0,13$	$1,00$	$0,85$
Abril	$\widehat{\mu}$	$0,82$	$1,13$	$0,34$
	$\widehat{\sigma}$	$0,06$	$0,99$	$0,36$
	$\widehat{\xi}$	$0,53$	$0,99$	$0,89$
Maio	$\widehat{\mu}$	$0,03$	$1,04$	$0,18$
	$\widehat{\sigma}$	$0,27$	$0,97$	$0,43$
	$\widehat{\xi}$	$0,42$	$1,00$	$0,30$
Junho	$\widehat{\mu}$	$1,44$	$1,06$	$0,26$
	$\widehat{\sigma}$	$1,72$	$1,01$	$0,10$
	$\widehat{\xi}$	$0,61$	$0,98$	$0,48$
Julho	$\widehat{\mu}$	$0,02$	$1,12$	$0,68$
	$\widehat{\sigma}$	$0,40$	$0,99$	$0,99$
	$\widehat{\xi}$	$0,24$	$0,99$	$0,75$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$0,28$	$1,09$	$0,67$
	$\widehat{\sigma}$	$1,66$	$0,99$	$0,15$
	$\widehat{\xi}$	$1,52$	$0,99$	$0,29$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$1,00$	$1,04$	$0,22$
	$\widehat{\sigma}$	$1,51$	$1,01$	$0,07$
	$\widehat{\xi}$	$1,29$	$1,00$	$0,12$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$0,08$	$1,01$	$0,53$
	$\widehat{\sigma}$	$0,39$	$1,00$	$0,49$
	$\widehat{\xi}$	$1,52$	$1,00$	$0,14$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$0,20$	$1,10$	$0,20$
	$\widehat{\sigma}$	$1,66$	$1,00$	$0,23$
	$\widehat{\xi}$	$0,39$	$1,00$	$0,90$

Fonte: do autor

Tabela 21 – Resultados dos testes de Convergência no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009, para *priori* informativa em que a variância foi multiplicada por 2.

Mês	Parâmetro	Geweke	Raftery e Lewis	Heidelberger-Welch
Janeiro	$\widehat{\mu}$	$0,88$	$1,06$	$0,36$
	$\widehat{\sigma}$	$0,82$	$1,01$	$0,72$
	$\widehat{\xi}$	$1,75$	$1,00$	$0,42$
Fevereiro	$\widehat{\mu}$	$1,06$	$1,03$	$0,48$
	$\widehat{\sigma}$	$1,96$	$1,00$	$0,06$
	$\widehat{\xi}$	$1,09$	$1,00$	$0,94$
Março	$\widehat{\mu}$	$1,23$	$1,07$	$0,43$
	$\widehat{\sigma}$	$0,11$	$1,00$	$0,90$
	$\widehat{\xi}$	$0,07$	$0,99$	$0,75$
Abril	$\widehat{\mu}$	$0,24$	$1,04$	$0,11$
	$\widehat{\sigma}$	$0,68$	$0,98$	$0,77$
	$\widehat{\xi}$	$1,05$	$1,00$	$0,46$
Maio	$\widehat{\mu}$	$1,31$	$1,03$	$0,10$
	$\widehat{\sigma}$	$1,19$	$1,00$	$0,21$
	$\widehat{\xi}$	$1,25$	$1,00$	$0,38$
Junho	$\widehat{\mu}$	$0,53$	$1,02$	$0,83$
	$\widehat{\sigma}$	$0,33$	$1,00$	$0,92$
	$\widehat{\xi}$	$0,07$	$1,00$	$0,54$
Julho	$\widehat{\mu}$	$1,62$	$1,07$	$0,06$
	$\widehat{\sigma}$	$1,41$	$1,00$	$0,37$
	$\widehat{\xi}$	$0,96$	$0,99$	$0,49$
Agosto	$\widehat{\mu}$	$0,07$	$1,06$	$0,88$
	$\widehat{\sigma}$	$0,06$	$1,01$	$0,64$
	$\widehat{\xi}$	$1,13$	$1,02$	$0,12$
Setembro	$\widehat{\mu}$	$0,70$	$1,01$	$0,76$
	$\widehat{\sigma}$	$0,29$	$1,00$	$0,32$
	$\widehat{\xi}$	$0,02$	$1,01$	$0,12$
Outubro	$\widehat{\mu}$	$1,15$	$1,04$	$0,92$
	$\widehat{\sigma}$	$0,59$	$1,00$	$0,60$
	$\widehat{\xi}$	$1,06$	$1,00$	$0,17$
Novembro	$\widehat{\mu}$	$0,91$	$1,10$	$0,20$
	$\widehat{\sigma}$	$0,39$	$1,00$	$0,24$
	$\widehat{\xi}$	$0,95$	$1,01$	$0,29$

Fonte: do autor

Tabela 22 – Resultados dos testes de Convergência no ajuste à série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 1980 a 2009, para *priori* informativa em que a variância foi multiplicada por 5.

Mês	Parâmetro	Geweke	Raftery e Lewis	Heidelberger-Welch
	$\widehat{\mu}$	$0,10$	$1,08$	$0,14$
Janeiro	$\widehat{\sigma}$	$0,72$	$1,01$	$0,76$
	$\widehat{\xi}$	$0,02$	$1,01$	$0,88$
	$\widehat{\mu}$	$1,01$	$1,11$	$0,09$
Fevereiro	$\widehat{\sigma}$	$0,89$	$1,01$	$0,71$
	$\widehat{\xi}$	$1,54$	$1,00$	$0,12$
	$\widehat{\mu}$	$1,80$	$1,05$	$0,37$
Março	$\widehat{\sigma}$	$0,41$	$1,00$	$0,95$
	$\widehat{\xi}$	$0,10$	$1,00$	$0,94$
	$\widehat{\mu}$	$0,89$	$1,09$	$0,06$
Abril	$\widehat{\sigma}$	$0,13$	$1,01$	$0,74$
	$\widehat{\xi}$	$0,65$	$1,00$	$0,40$
	$\widehat{\mu}$	$0,80$	$1,07$	$0,79$
Maio	$\widehat{\sigma}$	$1,08$	$1,00$	$0,36$
	$\widehat{\xi}$	$0,42$	$1,00$	$0,80$
	$\widehat{\mu}$	$0,23$	$1,03$	$0,58$
Junho	$\widehat{\sigma}$	$0,28$	$0,99$	$0,62$
	$\widehat{\xi}$	$0,30$	$0,99$	$0,20$
	$\widehat{\mu}$	$1,44$	$1,02$	$0,34$
Julho	$\widehat{\sigma}$	$0,28$	$1,01$	$0,99$
	$\widehat{\xi}$	$0,86$	$1,00$	$0,49$
	$\widehat{\mu}$	$0,32$	$1,05$	$0,53$
Agosto	$\widehat{\sigma}$	$1,05$	$0,99$	$0,19$
	$\widehat{\xi}$	$0,70$	$1,00$	$0,17$
	$\widehat{\mu}$	$1,07$	$1,05$	$0,53$
Setembro	$\widehat{\sigma}$	$1,56$	$0,99$	$0,19$
	$\widehat{\xi}$	$0,38$	$1,00$	$0,17$
	$\widehat{\mu}$	$1,36$	$1,04$	$0,11$
Outubro	$\widehat{\sigma}$	$0,84$	$1,00$	$0,43$
	$\widehat{\xi}$	$0,44$	$1,00$	$0,92$
	$\widehat{\mu}$	$0,63$	$1,06$	$0,38$
Novembro	$\widehat{\sigma}$	$1,14$	$1,01$	$0,91$
	$\widehat{\xi}$	$0,90$	$1,01$	$0,92$
	$\widehat{\mu}$	$1,03$	$1,03$	$0,94$
Dezembro	$\widehat{\sigma}$	$0,35$	$1,01$	$0,73$
	$\widehat{\xi}$	$0,53$	$0,98$	$0,97$

Fonte: do autor

APÊNDICE C – NÍVEIS DE RETORNO MENSAIS PARA A SÉRIE DE TEMPERATURAS MÁXIMAS DE LAVRAS-MG

Tabela 23 – Níveis de retorno mensais, em °C, obtidos via Distribuição GEV para a série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 2010 a 2020

Mês	Tempo de retorno (anos)			
	3	5	8	10
Janeiro	33, 195 (33, 6)	33, 770 (33, 6)	34, 193 (34, 4)	34, 193 (34, 4)
Fevereiro	33, 033 (34, 1)	33, 426 (34, 1)	33, 830 (34, 1)	33, 830 (34, 8)
Março	32, 570 (33, 0)	33, 056 (33, 0)	33, 412 (33, 0)	33, 566 (33, 2)
Abril	31, 161 (31, 4)	31, 625 (31, 4)	31, 974 (32, 4)	32, 120 (32, 4)
Maio	29, 302 (30, 3)	29, 803 (30, 3)	30, 181 (30, 3)	30, 340 (30, 3)
Junho	28, 260 (29, 0)	28, 627 (29, 0)	28, 850 (29, 0)	28, 932 (29, 0)
Julho	28, 825 (29, 1)	29, 420 (29, 2)	29, 868 (29, 2)	30, 057 (29, 2)
Agosto	32, 003 (31, 8)	32, 447 (31, 8)	32, 710 (31, 8)	32, 805 (31, 8)
Setembro	33, 672 (33, 8)	34, 434 (33, 8)	34, 919 (35, 0)	35, 100 (36, 2)
Outubro	34, 011 (35, 9)	34, 757 (36, 4)	35, 298 (36, 4)	35, 520 (36, 4)
Novembro	32, 993 (34, 4)	33, 504 (34, 4)	33, 885 (34, 4)	34, 045 (34, 4)
Dezembro	32, 635 (33, 2)	33, 083 (33, 2)	33, 375 (33, 7)	33, 486 (34, 2)

Fonte: do autor

Tabela 24 – Níveis de retorno mensais, em °C, obtidos via Distribuição GEV para a série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 2010 a 2020 sendo a variância multiplicada por $\frac{1}{2}$.

Mês	Tempo de retorno (anos)			
	3	5	8	10
Janeiro	33, 146 (33, 6)	33, 734 (33, 5)	34, 178 (34, 4)	34, 366 (34, 4)
Fevereiro	33, 008 (34, 1)	33, 407 (34, 1)	33, 700 (34, 1)	33, 821 (34, 8)
Março	32, 558 (33, 0)	33, 028 (33, 0)	33, 398 (33, 0)	33, 560 (33, 2)
Abril	31, 098 (31, 4)	31, 575 (31, 4)	31.939 (32, 4)	32, 093 (32, 4)
Maio	29, 276 (30, 3)	29, 779 (30, 3)	30.159 (30, 3)	30, 319 (30, 3)
Junho	28, 351 (29, 0)	28, 689 (29, 0)	28, 879 (29, 0)	28, 845 (29, 0)
Julho	28, 972 (29, 1)	29, 548 (29, 2)	29, 980 (29, 2)	30, 162 (29, 2)
Agosto	32, 543 (31, 8)	32, 809 (31, 8)	32, 908 (31, 8)	32, 933 (31, 8)
Setembro	33, 498 (33, 8)	34, 295 (33, 8)	34, 816 (35, 0)	35, 016 (36, 2)
Outubro	33, 873 (35, 9)	34, 660 (36, 4)	35, 250 (36, 4)	35, 498 (36, 4)
Novembro	32, 890 (34, 4)	33, 416 (34, 4)	33, 811 (34, 4)	33, 978 (34, 4)
Dezembro	32, 650 (33, 2)	33, 093 (33, 2)	33, 376 (33, 7)	33, 483 (34, 2)

Fonte: do autor

Tabela 25 – Níveis de retorno mensais, em °C, obtidos via Distribuição GEV para a série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 2010 a 2020

Mês	Tempo de retorno (anos)			
	3	5	8	10
Janeiro	33, 146 (33, 6)	33, 734 (33, 5)	34, 178 (34, 4)	34, 366 (34, 4)
Fevereiro	33, 008 (34, 1)	33, 407 (34, 1)	33, 700 (34, 1)	33, 821 (34, 8)
Março	32, 558 (33, 0)	33, 028 (33, 0)	33, 398 (33, 0)	33, 560 (33, 2)
Abril	31, 098 (31, 4)	31, 575 (31, 4)	31.939 (32, 4)	32, 093 (32, 4)
Maio	29, 276 (30, 3)	29, 779 (30, 3)	30.159 (30, 3)	30, 319 (30, 3)
Junho	28, 351 (29, 0)	28, 689 (29, 0)	28, 879 (29, 0)	28, 845 (29, 0)
Julho	28, 972 (29, 1)	29, 548 (29, 2)	29, 980 (29, 2)	30, 162 (29, 2)
Agosto	32, 543 (31, 8)	32, 809 (31, 8)	32, 908 (31, 8)	32, 933 (31, 8)
Setembro	33, 498 (33, 8)	34, 295 (33, 8)	34, 816 (35, 0)	35, 016 (36, 2)
Outubro	33, 873 (35, 9)	34, 660 (36, 4)	35, 250 (36, 4)	35, 498 (36, 4)
Novembro	32, 890 (34, 4)	33, 416 (34, 4)	33, 811 (34, 4)	33, 978 (34, 4)
Dezembro	32, 650 (33, 2)	33, 093 (33, 2)	33, 376 (33, 7)	33, 483 (34, 2)

Fonte: do autor

Tabela 26 – Níveis de retorno mensais, em °C, obtidos via Distribuição GEV para a série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 2010 a 2020 sendo a variância multiplicada por 2.

Mês	Tempo de retorno (anos)			
	3	5	8	10
Janeiro	33, 194 (33, 6)	33, 770 (33, 5)	34, 193 (34, 4)	34, 368 (34, 4)
Fevereiro	33, 029 (34, 1)	33, 424 (34, 1)	33, 711 (34, 1)	33, 829 (34, 8)
Março	32, 587 (33, 0)	33, 048 (33, 0)	33, 408 (33, 0)	33, 564 (33, 2)
Abril	31, 147 (31, 4)	31, 675 (31, 4)	31, 968 (32, 4)	32, 116 (32, 4)
Maio	29, 298 (30, 3)	29, 780 (30, 3)	30, 179 (30, 3)	30, 339 (30, 3)
Junho	28, 280 (29, 0)	28, 641 (29, 0)	28, 857 (29, 0)	28, 934 (29, 0)
Julho	28, 981 (29, 1)	29, 557 (29, 2)	29, 987 (29, 2)	30, 168 (29, 2)
Agosto	32, 015 (31, 8)	32, 454 (31, 8)	32, 711 (31, 8)	32, 802 (31, 8)
Setembro	33, 678 (33, 8)	34, 441 (33, 8)	34, 924 (35, 0)	35, 105 (36, 2)
Outubro	33, 987 (35, 9)	34, 743 (36, 4)	35, 295 (36, 4)	35, 524 (36, 4)
Novembro	32, 970 (34, 4)	33, 485 (34, 4)	33, 870 (34, 4)	34, 031 (34, 4)
Dezembro	32, 650 (33, 2)	33, 093 (33, 2)	33, 379 (33, 7)	33, 487 (34, 2)

Fonte: do autor

Tabela 27 – Níveis de retorno mensais, em °C, obtidos via Distribuição GEV para a série de temperaturas máximas mensais de Lavras - MG no período de 2010 a 2020 sendo a variância multiplicada por 5.

Mês	Tempo de retorno (anos)			
	3	5	8	10
Janeiro	33, 203 (33, 6)	33, 777 (33, 5)	34, 197 (34, 4)	34, 371 (34, 4)
Fevereiro	33, 026 (34, 1)	33, 423 (34, 1)	33, 711 (34, 1)	33, 830 (34, 8)
Março	32, 579 (33, 0)	33, 044 (33, 0)	33, 408 (33, 0)	33, 566 (33, 2)
Abril	31, 134 (31, 4)	31, 605 (31, 4)	31, 960 (32, 4)	32, 110 (32, 4)
Maio	29, 292 (30, 3)	29, 794 (30, 3)	30, 172 (30, 3)	30, 332 (30, 3)
Junho	28, 300 (29, 0)	28, 654 (29, 0)	28, 862 (29, 0)	28, 935 (29, 0)
Julho	28, 988 (29, 1)	29, 563 (29, 2)	29, 993 (29, 2)	30, 173 (29, 2)
Agosto	32, 049 (31, 8)	32, 475 (31, 8)	32, 719 (31, 8)	32, 933 (31, 8)
Setembro	33, 670 (33, 8)	34, 435 (33, 8)	34, 920 (35, 0)	35, 101 (36, 2)
Outubro	33, 956 (35, 9)	34, 720 (36, 4)	35, 281 (36, 4)	35, 514 (36, 4)
Novembro	32, 865 (34, 4)	33, 420 (34, 4)	33, 863 (34, 4)	33, 057 (34, 4)
Dezembro	32, 656 (33, 2)	33, 098 (33, 2)	33, 381 (33, 7)	33, 487 (34, 2)

Fonte: do autor

APÊNDICE D – CÁLCULO DO VALOR ESPERADO E DA VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA COM DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL.

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se $Y = \exp^X$ então a variável aleatória Y tem distribuição Log-normal com parâmetros μ e σ^2.

A função densidade de probabilidade da variável aleatória Y, pode ser expressa por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y \cdot \sqrt{2\pi\sigma_2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\ln y - \mu)^2}{\sigma^2}\right] dy \tag{5.1}$$

em que $y > 0$.

A esperança de Y é obtida por:

$$E(Y) = \int_0^\infty y \cdot \frac{1}{y \cdot \sqrt{2\pi\sigma_2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\ln y - \mu)^2}{\sigma^2}\right] dy \tag{5.2}$$

Fazendo a mudança de variável $t = \ln y$, obtém-se:

- Para $y = 0$, tem-se que $t \to -\infty$.
- Para $y \to \infty$, tem-se que $t \to -\infty$
- $dt = \frac{1}{y} dy$
- $y = e^t$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^t \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2} + t\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2 - 2t\mu + \mu^2 - 2\sigma^2 t}{2\sigma^2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2 - 2t(\mu+\sigma^2)}{2\sigma^2}\right] \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) dt \\
&= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2 - 2t(\mu+\sigma^2) + (\mu+\sigma^2)^2 - (\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right] dt \\
&= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{[t - (\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right] \exp\left(\frac{(\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dt \\
&= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu+\sigma_2)^2}{2\sigma^2}\right) \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{[t - (\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right] dt\right\}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

O termo que esta entre chaves é a integral da densidade de uma variável aleatória com distribuição normal com média $\mu_1 = \mu + \sigma^2$ e variância σ^2. Desta forma, essa integral é igual a 1. Logo,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{-\mu^2 + \mu^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

De forma análoga, com o uso da mesma transformação $t = \ln(y)$ utilizada no cálculo de $E(Y)$, calcula-se $E(Y^2)$.

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_0^\infty y^2 \cdot \frac{1}{y \cdot \sqrt{2\pi\sigma_2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\ln y - \mu)^2}{\sigma^2}\right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^t \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2} + t\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2 - 2t\mu + \mu^2 - 2\sigma^2 t}{2\sigma^2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2 - 2t(\mu + \sigma^2)}{2\sigma^2}\right] \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) dt \\
&= \exp\left(\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{[t-(\mu+\sigma^2)]^2 - (\mu+\sigma_2)^2}{2\sigma^2}\right] dt \\
&= \exp\left(\frac{-\mu^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{[t-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right] \exp\left(\frac{(\mu+\sigma_2)^2}{2\sigma^2}\right) dt \\
&= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu+\sigma_2)^2}{2\sigma^2}\right) \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{[t-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right] dt\right\}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Da mesma forma, o termo que esta entre chaves é a integral da densidade de uma variável aleatória com distribuição normal com média $\mu_1 = \mu + \sigma^2$ e variância σ^2. Portanto, essa integral é igual a 1. Logo,

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{-\mu^2 + \mu^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2}\right) \\
&= \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Como $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$, então:

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= \exp\left(2\mu+\sigma^2\right) - \left[\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]^2 \\
&= \exp\left(2\mu+\sigma^2\right) - \exp\left[2\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \\
&= \exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left[\frac{\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)}{\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)} - 1\right] \\
&= \exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left[\exp\left(2\mu+\sigma^2-2\mu-2\sigma^2\right)-1\right] \\
&= \exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left[\exp\sigma^2-1\right].
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Portanto, $Var(Y) = \exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left[\exp\sigma^2-1\right].$

APÊNDICE E – MINIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO RISCO DE BAYES PARA A FUNÇÃO PERDA QUADRÁTICA.

A média *a posteriori* de cada um dos parâmetros θ do vetor de parâmetros do modelo pode ser obtida por meio da expressão

$$E(\theta|\mathbf{x}) = \int_{\Theta} \theta L(\mathbf{x}|\theta) \cdot p(\theta) d\theta, \tag{5.8}$$

em que Θ é o conjunto de todos os valores que θ pode assumir, ou seja, Θ é o espaço paramétrico de θ.

Definindo-se o risco de Bayes como

$$\begin{aligned} R_B(\pi, \delta) &= \int_{\Theta} \ell(\theta, \delta) \cdot \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta \\ &= E_{\theta|\mathbf{x}} \ell[(\theta, \delta)] \end{aligned} \tag{5.9}$$

sendo $\ell(\theta, \delta)$ a função perda e $\pi(\theta|\mathbf{x})$ distribuição *a posteriori* e considerando-se a perda quadrática $\ell(\theta, a) = (\theta - a)^2$, o estimador de Bayes é aquele que minimiza o risco de Bayes, sendo $\ell(\theta, a)$ a função com a perda sofrida ao tomar a decisão a dado que o valor do parâmetro é θ. Denotando-se o risco de Bayes ao se tomar a decisão a a partir da distribuição *a posteriori* por $g(a)$, têm-se:

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_{\Theta} (\theta - a)^2 \cdot \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta \\ &= \int_{\Theta} (\theta^2 - 2a\theta + a^2) \cdot \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta \\ &= \int_{\Theta} \theta^2 \cdot \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta - 2a \cdot \int_{\Theta} \theta \cdot \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta + a^2 \cdot \int_{\Theta} \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta \\ &= E(\theta^2|\mathbf{x}) - 2a \cdot E(\theta|\mathbf{x}) + a^2 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Derivando $g(a)$ em relação a a e igualando-se o resultado a zero, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{dg(a)}{da} = 0 &\iff -2E(\theta|\mathbf{x}) + 2a = 0 \\ &\iff \widehat{a} = \widehat{\theta}_{Bayes} = E(\theta|\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Logo quando a função perda é quadrática o estimador de Bayes é $E(\theta|\mathbf{x})$, pois $E(\theta|\mathbf{x})$ minimiza a função Risco de Bayes.