

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

MICHELE MARTINS LOPES

DINÂMICA DA PROPAGAÇÃO DE MEMES VIA SISTEMAS COM MEMÓRIA

Alfenas/MG

2019

MICHELE MARTINS LOPES

DINÂMICA DA PROPAGAÇÃO DE MEMES VIA SISTEMAS COM MEMÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, área de concentração em Estatística Aplicada e Biometria da Universidade Federal de Alfenas-MG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria. Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada e Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos.

Alfenas/MG

2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas

L864d Lopes, Michele Martins.
Dinâmica da propagação de memes via sistemas com memória. / Michele
Martins Lopes - Alfenas/MG, 2019.
86 f.: il. --

Orientador: José Paulo Carvalho dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) –
Universidade Federal de Alfenas, 2019.
Bibliografia.

1. Equações Diferenciais. 2. Memes. 3. Estabilidade. 4. Epidemiologia.
I. Santos, José Paulo Carvalho dos. II. Título.

CDD-515.35



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Alfenas / UNIFAL-MG
Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria

Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700. Alfenas - MG CEP 37130-000
Fone: (35) 3299-1392 (Secretaria) (35) 3299-1121(Coordenação)
<https://www.unifal-mg.edu.br/ppgeab/>



MICHELE MARTINS LOPES

“DINÂMICA DA PROPAGAÇÃO DE MEMES VIA SISTEMAS COM MEMÓRIA”

A Banca Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas. Área de Concentração: Estatística Aplicada e Biometria

Aprovado em: 1 de fevereiro de 2019.

Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos

Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:

Prof. Dr. Evandro Monteiro

Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:

Prof. Dr. Diego Samuel Rodrigues

Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura:

Dedico esse trabalho aos meus pais, Válter e Rosicler, ao meu irmão Rodolfo e ao meu namorado Luiz Henrique.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus, a força que nos guia e nos faz seguir mesmo diante de cada obstáculo. E, claro, a todas as muitas pessoas especiais que foram Seus instrumentos ao facilitarem minha caminhada por esse caminho árduo.

Primeiramente aos melhores presentes de Deus para minha vida, minha família. Em especial meus pais, Valter e Rosicler, meu irmão, Rodolfo, e meu namorado, Luiz Henrique. Sem a convivência, o amor e a preocupação de vocês, nada teria o mesmo sentido.

A todos os professores, em especial meu orientador professor José Paulo, por toda aprendizagem acadêmica e não acadêmica, sempre buscando aconselhar e preparar para a vida. Em especial também aos professores Fabrício, Anderson, Angela e Evandro, que também muito ajudaram com mais do que conhecimentos. Ao professor Nelson pela grande contribuição ao trabalho, principalmente na parte numérica.

Meu muito obrigada também a todos os amigos tão especiais que sempre estiveram presentes de alguma forma, contribuindo para tornar os dias mais alegres e fáceis. São muito importantes, parte fundamental do processo. Em especial, à uma amiga incrível que sempre esteve do meu lado, preocupada, ajudando e acompanhando sempre, Bruna.

RESUMO

O termo “meme” refere-se a algo que possa ser propagado, tal como uma imagem, um vídeo, um som, uma ideia, uma crença, um valor estético, moral, etc. Hoje em dia é faz-se útil estudar a propagação de um meme devido a sua importância nas mídias sociais e também a sua influência na sociedade, de um modo geral. Tal estudo é chamado “memética”, que é relevante pelo fato de que conhecer o interesse dos agentes envolvidos, no caso dessa dissertação, internautas, permite entender o que contribui para a propagação do meme, isso é, para que ele alcance grande repercussão ou seja logo esquecido. Da mesma forma que na epidemiologia estuda-se o comportamento de uma doença para tentar prever uma eventual epidemia ou endemia e, em caso positivo, buscar formas de erradicá-las, na memética estuda-se o comportamento do meme para se tentar prever se a ocorrência da sua difusão será como o desejado. O diferencial é que não necessariamente se deseja que o meme desapareça com o tempo; em muitos casos, como no marketing, por exemplo, deseja-se que ele persista. Muitos autores utilizam modelos epidemiológicos, em geral do tipo SIR, para modelar a propagação de memes, uma vez que é possível fazer uma analogia entre ambas as áreas. No presente trabalho essa ideia é abordada com riqueza de detalhes. Além disso, são apresentados conceitos do Cálculo Fracionário importantes para a realização de um processo que chamamos “introdução de memória”, capaz de transformar um modelo epidemiológico composto por um sistema de equações diferenciais ordinárias em um sistema de equações diferenciais fracionárias. O objetivo deste trabalho foi introduzir memória em um modelo epidemiológico utilizado na memética e verificar se esse novo modelo descreve com maior precisão o comportamento de um meme em relação aos dados reais, provenientes do “Google Trends”. Esse novo modelo foi analisado qualitativa e numericamente, estudando-se sua eficácia para descrever a propagação de um meme a partir da comparação com sua versão clássica. Com isso, contribuimos com a literatura memética, propondo um novo tipo de modelo para descrever a propagação de memes, um modelo com efeito de memória, uma vez que, até o momento, os modelos utilizados são epidemiológicos clássicos, sem memória. Portanto, mostramos que o processo de introdução de memória é uma opção de melhoria para o modelo e, conseqüentemente, para o estudo da propagação de memes.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Fracionárias. Meme. Análise de Estabilidade. Modelos Epidemiológicos.

ABSTRACT

The word “meme” refers to anything that can be spread, such as an image, a video, a sound, an idea, a belief, a aesthetic or moral value, etc. Nowadays it is very useful to study the propagation of a meme because of its importance in social media and also its influence on society in general. Such a study is called "memetics", which is relevant because knowing the interest of the agents involved (in the case of this dissertation, the netizens), allows to understand what influences for a meme to be propagated over time, that is, for a meme to have wide reverberation or to be soon forgotten. In the same way that epidemiology concerns timing of infectious diseases occurrences to try to predict whether there will be a epidemic or a endemic and, in these cases, to seek ways to eradicate it, in memetic we study the meme behavior to predict whether its propagation will occur as planned. The difference is that one doesn't necessarily desire that the meme die over time: in many cases like in marketing, for example, you want it to persist. Many authors use epidemiological models, usually of the SIR or SIRS type, to model the spread of memes, because it is possible to make an analogy between both areas. In the present work, this idea is adressed in detail. In addition, important concepts of the Fractional Calculus are presented to perform a process called “introduction of memory”, that can transform an epidemiological model composed by an Ordinary Differential Equations System into a Fractional Differential Equations System. The objective of this work was to introduce memory in an epidemiological model used in memetics and to evaluate if this new model describes with more precision the behavior of a meme popularity in relation to the real data, available in Google Trends tool. This new model was analyzed qualitatively and numerically, studying its effectiveness to describe the propagation of a meme from the comparison with its classic version. With this, we contribute with the memetics literature, proposing a new type of model to describe the propagation of memes, a model with memory effect, since, until the moment, the models used are classical epidemiological, without memory. Therefore, we show that the process of memory introduction is an option of improvement for the model and, consequently, for the study of the propagation of memes.

Keywords: Fractional differential equations. Meme. Stability analysis. Epidemiological models.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Valores do erro relativo de cada modelo em cada simulação	59
Tabela 2 –	Valores do erro absoluto de cada modelo em cada simulação	59
Tabela 3 –	Valores das taxas utilizadas no modelo clássico em cada simulação . .	63
Tabela 4 –	Valores das taxas utilizadas no modelo com memória em cada simulação	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama da dinâmica de propagação de memes do modelo de Wang e Wood (2011)	20
Figura 2 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (10,90)$. Podemos observar que a função se estabiliza em um valor próximo a 8,3.	51
Figura 3 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (10,90)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.	51
Figura 4 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (50,50)$. Podemos observar que a função se estabiliza em um valor próximo a 46.	52
Figura 5 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (50,50)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.	52
Figura 6 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (90,10)$. Podemos observar que a função se estabiliza em um valor próximo a 88,7.	53
Figura 7 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (90,10)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.	53
Figura 8 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (10,90)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.	54
Figura 9 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (10,90)$. Podemos observar que a função se estabiliza em $N - \frac{\gamma}{\beta} = 80$	54
Figura 10 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (50,50)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.	55
Figura 11 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (50,50)$. Podemos observar que a função se estabiliza em $N - \frac{\gamma}{\beta} = 80$	55
Figura 12 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (90,10)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.	56
Figura 13 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (90,10)$. Podemos observar que a função se estabiliza em $N - \frac{\gamma}{\beta} = 80$	56

Figura 14 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “I Can Has Cheezburger”. Os dados foram tomados mensalmente, no período de janeiro de 2007 a dezembro de 2017.	60
Figura 15 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “Celular”. Os dados foram tomados mensalmente, no período de fevereiro de 2013 a fevereiro de 2018.	60
Figura 16 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “Facebook”. Os dados foram tomados semanalmente, no período de janeiro de 2004 a dezembro de 2004.	61
Figura 17 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “Avenida Brasil”. Os dados foram tomados semanalmente, no período de setembro de 2012 a dezembro de 2013.	62
Figura 18 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “Já Acabou Jéssica?”. Os dados foram tomados diariamente, no período de novembro de 2015 a dezembro de 2015.	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CONCEITOS MEMÉTICOS E EPIDEMIOLÓGICOS	16
3	CÁLCULO FRACIONÁRIO	22
3.1	FUNÇÕES GAMA E BETA	22
3.2	TRANSFORMADA DE LAPLACE	23
3.3	FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER	26
3.4	DERIVADA E INTEGRAL FRACIONÁRIAS	28
4	MODELAGEM MATEMÁTICA DA PROPAGAÇÃO DE MEMES EM UM SISTEMA COM MEMÓRIA	38
4.1	MODELO PROPOSTO	40
4.2	ANÁLISE DO MODELO	45
4.2.1	Estudo Qualitativo da Estabilidade do Modelo	46
4.2.2	Exemplos Numéricos da Estabilidade do Modelo	50
4.2.3	Ajuste de Parâmetro a Partir de Dados	57
5	CONCLUSÃO	64
	REFERÊNCIAS	66
	APÊNDICES	71

1 INTRODUÇÃO

A comunicação é uma transmissão de ideias ou de informações, que ocorre de diversas formas: verbal, oral, escrita, por olhar, por mímica, etc. Em todas essas formas, a propagação de uma informação é necessária. Sendo assim, a propagação de informações é parte essencial do ser humano, uma vez que ele precisa praticá-la para atender suas expectativas e ansiedades sobre assuntos a sua volta e também como recurso de autodefesa, utilizado-a em situações de medo, angústia, agressividade, coragem, entusiasmo, desejo de poder, dominação, violência, etc (PACHI, 2006; KOSFELD, 2005; TORQUATO, 2006; ALLPORT; POSTMAN, 1947; SPERRY, 1965).

Além de informações e ideias, qualquer coisa que apresente o fenômeno da repercussão entre indivíduos pode ser chamado pelo termo “meme”. São exemplos: imagens, vídeos, sons, pensamentos, comportamentos, idiomas, desenhos, habilidades, valores estéticos e morais, tudo que se pode aprender e transmitir. "Meme"provém do grego e significa imitação (DAWKINS, 1993; PACHI, 2006; NOYMER, 2001; ARIS, 1980; WANG;WOOD, 2011).

Notícias, fama, cultura, bem como jornal, revista, televisão e, principalmente, internet, são exemplos de instrumentos de propagação de memes, que chamamos de rumor. O rumor é muito importante, principalmente na área de Marketing (PACHI, 2006; NOYMER, 2001; ARIS, 1980).

A repercussão de um meme também influencia o aumento ou diminuição das possibilidades de sobrevivência de uma população, pois contribui para a formação e a modificação de uma cultura ao longo de várias gerações (PACHI, 2006; DAWKINS, 1993).

Há memes como, por exemplo, algumas religiões, que propagam informação de forma a induzirem a pessoa a não aceitar outros memes diferentes, pois isso iria alterar e contrariar suas ideologias. Nesse caso, os memes dessas religiões são como sistemas imunológicos mentais. Ainda, há memes que criam novos memes, como os de uma mesma religião, que podem causar o surgimento de novas interpretações e, conseqüentemente, novas religiões (PACHI, 2006; DAWKINS, 1993; CULLEN, 1998).

É valiosa a análise da importância que um meme irá ter no decorrer do tempo, uma vez que buscando prever seu comportamento pode-se tomar importantes decisões no presente, conforme o que se deseja em relação à sua propagação no futuro. O estudo do comportamento de um meme é chamado “memética”. Há muitos trabalhos que buscam fazer tal análise e,

para isso, geralmente utilizam modelos epidemiológicos, como veremos com mais detalhes no próximo capítulo (PACHI, 2006).

Para a formulação de um modelo matemático que descreva uma propagação temporal, como na Epidemiologia, é muito comum o uso de equações que envolvem derivada, como as equações diferenciais, uma vez que elas representam taxas de variação. Por exemplo, em 1798, Thomas Malthus tentou modelar o crescimento populacional. Para isso, usou uma equação diferencial. Foram encontradas falhas em sua modelagem matemática, porém sua equação ainda é usada para modelar o crescimento de populações pequenas. Ele considerou que a taxa de crescimento populacional em um determinado instante é proporcional ao número de pessoas naquele mesmo instante, ou seja, $dP(t)/dt = kP(t)$, em que k é uma constante e $P(t)$ é uma função que representa o número de pessoas no instante t (AMAKU, 2001; MARTCHEVA, 2015; MASSAD, 1996; ZILL, 2011).

Para formular um modelo matemático em memética é comum utilizar o modelo epidemiológico denominado SIR, no qual se divide a população em três compartimentos: indivíduos suscetíveis (S), infectados (I) e recuperados (R). Nesse modelo, considera-se que o indivíduo, após se recuperar de uma doença, ou morre ou adquire imunidade permanente. Em 1927, Kermack e McKendrick criaram esse modelo em um trabalho bem-sucedido. A explicação sobre o uso desse tipo de modelo na memética será feita no próximo capítulo (DOS SANTOS; DE SOUZA, 2012; PACHI, 2006).

Em 1952, Rapoport desenvolveu um primeiro modelo determinístico para descrever a comunicação na sociedade, a fim de melhor compreendê-la. No entanto, a utilização de conceitos epidemiológicos para descrever a propagação de um meme foi feita apenas em 1964, por Daley e Kendall. A partir disso, Rogers conseguiu construir um sistema dinâmico que simbolizasse a propagação de ideias em uma população; no entanto, isso ocorreu somente no ano de 1995. Assim sendo, a memética é uma área com desenvolvimento relativamente recente (PACHI, 2006; MASSAD, 1996; DICKINSON; PEARCE, 2003).

Diversos autores já propuseram modelos para descrever a propagação de memes com base nos conceitos epidemiológicos. No entanto, cada autor considera diferentes fatores no processo de transmissão de informações, gerando diferentes sistemas. Há divergência ao se considerar o modo como um meme pode se espalhar, quem ou o quê pode espalhá-lo, a forma como ele deixa de ser propagado ou que uma pessoa possa perder o interesse por ele, se uma pessoa que perdeu o interesse pode voltar a se interessar, se interesses pessoais levam a pessoa

a ter maior ou menor tendência a se interessar pelo meme, se características pessoais podem exercer influência nessa propagação, tais como a persuasão e a timidez, etc. Seja como for, a maioria dos modelos já propostos não apresenta validação por dados empíricos (PACHI, 2006; MASSAD, 1996; DICKINSON; PEARCE, 2003; PIQUEIRA, 2010; WANG E WOOD, 2011).

Por exemplo, Pachi (2006) e Isea e García (2016) consideram que as pessoas espalham o meme em diferentes intensidades. Huo et al. (2012) acredita que a pessoa, após ter acesso ao meme, leva um tempo para refletir e começar a espalhá-lo. Fedewa et al. (2013) considera que nem todos os indivíduos irão conhecer ou ter acesso ao meme. Nunes (2013) analisa a propagação do meme conforme o tamanho da rede social e a quantidade de informações nela obtidas. Massad (2013) e Jiang et al. (2017) consideram que há pessoas que podem ter maior conhecimento ou maior interesse por um meme do que as demais.

Em especial, Pachi (2006), Piqueira (2010) e Wang e Wood (2011) também propuseram modelos de propagação de memes, que serão descritos com mais detalhes no capítulo seguinte, com a finalidade de se explicarem conceitos meméticos. Piqueira (2010) e Wang e Wood (2011) propuseram modelos para descrever a propagação de rumores em geral, tendo Wang e Wood (2011) realizado aplicações em memes específicos. Por outro lado, Pachi (2006) estudou a propagação de informações através de campanhas educativas.

Nos modelos epidemiológicos em geral são usadas equações diferenciais de ordem inteira. Com o tempo, foram utilizadas equações diferenciais de ordem não-inteira, ampliando-se os modelos clássicos de epidemia, que foram analisados numericamente para diferentes ordens fracionárias, com o objetivo de melhorar os modelos, acrescentando informações. A ideia de utilizar uma equação diferencial cuja ordem n não é um número inteiro originou o Cálculo Fracionário. Com o tempo, descobriu-se que é possível haver uma ordem n que seja um número irracional e até complexo, porém manteve-se o nome Cálculo Fracionário (LEÓN, 2015; CAMACHO; MERMOUD; GALLEGOS, 2014; LIN, 2007; MERMOUD; CAMACHO; GALLEGOS; LINARES, 2015; LI; MA, 2013; CARDOSO, 2015).

A indagação da possibilidade de uma ordem n de uma equação diferencial ser um número fracionário, foi feita por L'Hospital à Leibniz, em uma carta de 1695. Em 1730, Euler questionou a possibilidade de resolver uma derivada de ordem qualquer. Em 1772, Lagrange criou a lei dos expoentes: $\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y$, com m e n valores inteiros, que trouxe uma primeira contribuição para o cálculo fracionário, apesar dessa lei não valer para m e n quaisquer. Em 1812, Laplace definiu derivada fracionária em termos de uma integral, que, em 1819,

apareceu em um texto científico de Lacroix, pela primeira vez (LEÓN, 2015; CAMACHO; MERMOUD; GALLEGOS, 2014; LIN, 2007; MERMOUD; CAMACHO; GALLEGOS; LINARES, 2015; LI; MA, 2013; CARDOSO, 2015).

Daí em diante, versões melhoradas foram surgindo, buscando responder à pergunta de Leibniz. No trabalho de Ortigueira e Machado (2015) são propostos alguns critérios para que uma derivada possa ser considerada fracionária, seguindo e ampliando as ideias de Ross (1975). As definições de derivadas fracionárias que mais aparecem na literatura são a derivada de Riemann-Liouville e a derivada de Caputo. No entanto, muitas definições foram propostas, uma vez que não é trivial a interpretação física e geométrica desse estudo fracionário, principalmente em relação ao cálculo de ordem inteira. Então, buscando-se uma definição de derivada fracionária com as devidas interpretações, foram propostas, ainda, as derivadas fracionárias de Liouville, de Weyl, de Riesz, de Grünwald-Letnikov, de Marchaud, de Hifler, derivada fracionária compatível, proposta por Jhalil-Horani-Yousef-Sababheh, e derivada fracionária alternativa, proposta por Katugampola, sendo essas duas últimas definidas através do limite, diferenciando-se das demais (CAMARGO E OLIVEIRA, 2015; ORTIGUEIRA E MACHADO, 2015; LEÓN, 2015; CAMACHO; MERMOUD; GALLEGOS, 2014; LIN, 2007; MERMOUD; CAMACHO; GALLEGOS; LINARES, 2015; LI; MA, 2013; CARDOSO, 2015).

A derivada fracionária de Caputo é considerada ainda mais adequada do que a de Riemann-Liouville, uma vez que, a partir de sua definição, a derivada de uma função constante é igual a zero, o que não ocorre com a de Riemann-Liouville. Logo, a interpretação física e geométrica da derivada de Caputo é mais real, já que quando a derivada de uma constante não é 0, é inconveniente considerar a derivada uma taxa de variação. Como exemplo, a dissipação de energia de um sistema em equilíbrio é um fenômeno que seria mal explicado se fosse utilizada a derivada de Riemann-Liouville, onde se constata que a derivada de uma constante não é zero. Camargo e Oliveira (2015) também indicam o uso da derivada fracionária de Caputo, pelo menos para problemas com dependência temporal, enquanto que para problemas com dependência espacial, indicam o uso da derivada fracionária de Riesz (CAMARGO E OLIVEIRA, 2015; LEÓN, 2015; CAMACHO; MERMOUD; GALLEGOS, 2014; LIN, 2007; MERMOUD; CAMACHO; GALLEGOS; LINARES, 2015; LI; MA, 2013; CARDOSO, 2015).

Dentre diversas aplicações do Cálculo Fracionário, podemos destacar a inserção de memória em um modelo clássico, ou seja, modificar um sistema dado por equações diferenciais ordinárias, com a finalidade de melhorá-lo. Colocar memória em um modelo enriquece-o, uma

vez que lhe adiciona informações de forma contribuidora. Há várias formas de fazer isso, como será explicado posteriormente. Neste trabalho, inserimos memória em um modelo de propagação de memes. Dentre várias formas possíveis, utilizaremos aquela para a qual é necessário o Cálculo Fracionário, uma vez que, assim, obteremos no modelo uma equação íntegro-diferencial que permite o efeito da memória nas funções.

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos, descritos a seguir:

a) o primeiro capítulo é composto de uma introdução sobre memes, dos principais resultados de memética, do Cálculo Fracionário e de sua utilização na inserção de memória em um modelo;

b) o segundo capítulo apresenta conceitos sobre a memética, sobre a Epidemiologia e sobre a relação entre ambas. Isso é necessário para entender a maneira como a Epidemiologia contribui para a construção de modelos que descrevem a propagação de um meme;

c) o terceiro capítulo traz resultados importantes do Cálculo Fracionário, necessários para a elaboração do modelo que será estudado, bem como traz explicações sobre como utilizar esses resultados para inserir memória em um modelo;

d) no quarto capítulo segue um estudo qualitativo do modelo analisado, onde são apresentados os pontos de equilíbrio, a razão de reprodução básica, a análise de estabilidade e resultados numéricos, onde o modelo clássico e o modelo após inserção de memória são comparados;

e) no quinto capítulo é apresentada a conclusão do trabalho.

2 CONCEITOS MEMÉTICOS E EPIDEMIOLÓGICOS

Como mencionado no capítulo anterior, na memética são usados modelos epidemiológicos para descrever a propagação de memes. Em geral, são modelos determinísticos. Sendo assim, primeiramente falaremos sobre conceitos epidemiológicos para, então, podermos apresentar os conceitos meméticos, fazendo uma analogia essas duas áreas de estudo para mostrar porque é possível utilizar a epidemiologia para analisar uma propagação de ideias.

Na Epidemiologia tem-se como objetivo principal evitar ou acabar com epidemias e endemias. Para isso, estudam-se fatores que deflagram ou propagam uma doença infecciosa e busca-se entender o comportamento da doença em relação ao tempo, como ocorre sua propagação, verificando-se se ela tende a se tornar uma epidemia ou uma endemia. Se isso pode ocorrer, busca-se tomar providências para que a doença seja erradicada antes de atingir tal proporção (ALMEIDA FILHO, 1986).

Para se constatar se uma doença tende a ser uma epidemia, ou uma endemia, há um parâmetro muito importante chamado Razão de Reprodução Básica (\mathcal{R}_0), que é o número de casos secundários que um indivíduo infeccioso pode gerar em uma população suscetível inteiramente exposta a uma doença, ou seja, a razão entre o número de eventuais novos infectados e o número inicial de infectados. Dessa forma, se $\mathcal{R}_0 > 1$, então o número de novos infectados é maior do que o número inicial, o que quer dizer que a quantidade de pessoas doentes tende a crescer e a doença, a se tornar uma epidemia ou uma endemia. Analogamente, se $\mathcal{R}_0 < 1$, a doença tende a desaparecer. Por fim, se $\mathcal{R}_0 = 1$ há um equilíbrio, a doença não tende a aumentar nem a diminuir (PACHI, 2006; AMAKU, 2012; AMAKU, 2001; DIEKMANN; HEESTERBEEK; METZ, 1990; ALMEIDA, 2002; LOPEZ; COUTINHO; BURATIINI; MASSAD, 2002).

Com isso, a partir dos parâmetros que definem o valor de \mathcal{R}_0 no estudo em questão, podemos descobrir um valor limiar que represente, na população analisada, o número máximo de indivíduos que podem se infectar para que não haja nem uma epidemia nem uma endemia, e, então, prever ações para evitar um espalhamento crescente da doença, não permitindo que o número de indivíduos expostos à ela ultrapasse esse valor limiar. Por exemplo, pode-se planejar quantas pessoas devem ser vacinadas, ou animais que devem ser sacrificados, para controlar o número de indivíduos que podem vir a se infectar (PACHI, 2006; AMAKU, 2012; AMAKU, 2001; DIEKMANN; HEESTERBEEK; METZ, 1990; ALMEIDA, 2002; LOPEZ; COUTINHO; BURATIINI; MASSAD, 2002).

Para facilitar estudos e análises de modelos determinísticos, na Epidemiologia, divide-se a população em compartimentos, relacionando o estado de saúde dos indivíduos e os momentos em que eles têm contato. A classificação mais comum para os estados de um indivíduo perante uma doença são:

- a) suscetível: indivíduo vulnerável à doença, que pode ou não desenvolvê-la;
- b) infectado: indivíduo suscetível que desenvolveu a doença, que é quando o agente patógeno se estabelece no organismo;
- c) infeccioso: indivíduo infectado que pode transmitir a doença e, sendo assim, nem todo infectado é infeccioso;
- d) imune: indivíduo que, mesmo exposto à doença, não a desenvolve;
- e) recuperado: indivíduo que já desenvolveu a doença e não mais a tem;
- f) latente: indivíduo infectado que leva um determinado tempo (período de latência) para se tornar infeccioso.

Neste trabalho utilizaremos apenas os termos suscetível, infectado e recuperado que, em geral, são representados, respectivamente, pelas funções $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, em função do tempo t . Neste caso, o total de indivíduos de uma população é dado por $N = S + I + R$ (AMAKU, 2001; LEÓN, 2015; PACHI, 2006; VIEIRA, 2017; GOFFMAN; NEWILL, 1964).

Há cinco tipos principais de modelos para classificar a população, que chamamos de modelos compartimentados: SI, SIS, SIR, SIRS e SLI. No modelo SI, há apenas os indivíduos suscetíveis e os infectados, sendo que, após o suscetível se infectar, não se torna suscetível novamente. Um exemplo de doença que segue este modelo seria a AIDS.

No modelo SIS, há os indivíduos suscetíveis e os infectados, e quando um suscetível é infectado, ele pode voltar a ser suscetível. Doenças bacterianas são exemplos para este modelo.

No modelo SIR, há indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados. Nele, os suscetíveis que são infectados e não morrem, tornam-se recuperados, e não mais suscetíveis. O sarampo, a rubéola e a dengue são exemplos de doença para este modelo.

No modelo SIRS, também há apenas indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, porém o infectado que passa a ser recuperado depois de um tempo volta a ser suscetível. Nestes dois últimos modelos, um suscetível pode se tornar diretamente recuperado, através de vacinas, por exemplo.

Por fim, no modelo SLI há os indivíduos suscetíveis e infectados, porém quando o sus-

cetível é infectado, ele passa por um período de latência, que é quando ele não pode ainda transmitir a doença. A raiva é um exemplo para este modelo. Nos modelos citados, os infectados também podem passar por período de latência, mas esse período não é considerado. Isso ocorre pois ele pode não influenciar a dinâmica do modelo, por exemplo se for um período muito curto (MARTCHEVA, 2015; AMAKU, 2012; AMAKU, 2001).

Como também já foi dito, na construção de um modelo epidemiológico podem ser utilizadas equações diferenciais ordinárias que descrevem a variação do número de indivíduos em cada estado do modelo compartimentado. Por exemplo, a equação diferencial que descreve a variação do compartimento $I(t)$, de pessoas infectadas no decorrer do tempo, é dada em função de sua derivada $I'(t)$. Em cada equação diferencial ordinária são considerados os fatores da doença analisada que fazem um indivíduo entrar ou sair de seu compartimento. No exemplo, seriam os fatores que fazem a pessoa se tornar ou deixar de estar infectada.

É possível relacionar todos esses conceitos epidemiológicos com a propagação de memes. O primeiro indício disso é que meme é um tipo de “contágio comportamental”, podendo ser comparado a uma doença. Para estudar ambas as propagações é necessária a posse de dados semelhantes: variáveis bem definidas e representativas a serem trabalhadas, o tamanho do grupo analisado, a forma de apresentação do fato/doença ao grupo e a forma de contato entre os indivíduos (DAWKINS, 1993; PACHI, 2006; NOYMER, 2001; ARIS, 1980; WANG; WOOD, 2011).

Outra semelhança fundamental entre a epidemiologia e a memética é a classificação dos indivíduos da população em compartimentos. Ao estudar a propagação de informações é comum classificar os indivíduos como infectados, suscetíveis e recuperados. Nesse caso, o indivíduo infectado é o que acredita no rumor e, então, o espalha. O indivíduo suscetível é o que ainda não teve contato com o rumor, mas pertence a uma população a ele exposta e se tornar um infectado. Por fim, o indivíduo recuperado é aquele que em algum momento acreditou no rumor mas, com o tempo, passou a não acreditar mais, adquirindo imunidade pelo menos transitória. Há casos em que o indivíduo recuperado pode se reinfectar, voltando a acreditar no rumor. Ou seja, o recuperado pode voltar a ser suscetível dependendo do meme analisado. Quando uma pessoa não acredita desde o início em um rumor, pode-se compará-la a outra pessoa vacinada contra uma doença: ela está imune ao rumor (PACHI, 2006; KOSFELD, 2005; NOYMER, 2001; MASSAD, 1996).

Devido ao fato de na memética os indivíduos serem comumente classificados em sus-

cetíveis, infectados e recuperados, os modelos epidemiológicos mais comuns para a descrição de propagação de memes são o SIR e o SIRS. É considerado o modelo SIR quando se acredita que, em relação ao meme analisado, uma pessoa que se recupera não se torna mais suscetível ao meme, ou seja, nunca mais se interessa por ele novamente. Analogamente, é considerado o modelo SIRS quando se acredita que uma pessoa recuperada pode se tornar suscetível ao meme outra vez.

Em relação à modelagem da propagação de informações, basta a posse do meme para que haja o espalhamento, ou seja, o indivíduo acreditar em um rumor já significa que o deseja espalhar, o que nos leva à conclusão de que rumores são altamente contagiosos. No entanto, nem sempre se deseja planejar o fim de um espalhamento de informações, muitas vezes deseja-se causá-lo (PACHI, 2006; KOSFELD, 2005; NOYMER, 2001; MASSAD, 1996).

Há diversos aspectos a serem considerados por autores na propagação de memes. Por exemplo, em geral considera-se que para haver a contaminação é necessário um contato entre um indivíduo suscetível e um infectado, porém há diversidade ao se considerar a forma como ocorrem a recuperação e a reinfecção. Por exemplo, Wang e Wood (2011) defendem que para o infectado se recuperar não é necessário um contato com outros indivíduos, basta que ele perca espontaneamente o interesse pelo meme a uma taxa de recuperação. Por outro lado, Piqueira (2010) considera necessário um contato com outro infectado ou com algum recuperado para que o infectado se recupere, ou seja, para uma pessoa perder o interesse pelo meme deve discutir com outra pessoa interessada pelo meme ou com uma pessoa que já se interessou por ele e, por algum motivo, perdeu o interesse. Sobre a reinfecção, Wang e Wood (2011) a consideram possível, desde que um recuperado tenha contato com um infectado para que o faça voltar a ter interesse pelo meme. No entanto, Piqueira (2011) defende que, uma vez recuperado, o indivíduo não se infecta mais, pois deixa de acreditar no rumor permanentemente.

Por sua vez, Pachi (2006) divide a classe de indivíduos em duas: receptivos a novas informações e resistentes. Então, considera os mais receptivos como os mais comunicativos também e, assim, que possuem maior capacidade de persuasão para contaminar. Por outro lado, os resistentes a novas informações também devem ser menos comunicativos. Assim, ela define quatro possíveis formas de contaminação: entre suscetíveis e infectados da mesma classe e de classes diferentes.

Para se identificar um meme, pode-se classificá-lo por determinadas características próprias que influenciam no contágio das pessoas, ou seja, características que contribuem para que

uma pessoa acredite no rumor: experiência pessoal, felicidade, medo, economia e poder, censura, conformidade e inovação. Portanto, o sucesso ao se propagar uma ideia (boa ou ruim) é diretamente relacionado com a capacidade de contágio dos indivíduos e a transmissão tem grande relação com a dos organismos biológicos (PACHI, 2006; CULLEN, 1998).

A seguir é apresentado, como exemplo, o modelo de propagação de memes sugerido por Wang e Wood (2011), já citado anteriormente.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} &= -\alpha S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha S(t)I(t) + \beta I(t)R(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -\beta I(t)R(t) + \gamma I(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

em que α é a taxa de infecção, $\beta (< \alpha)$ é a taxa de reinfecção e γ é a taxa de recuperação (perda de interesse no rumor). A dinâmica do sistema apresentado no modelo acima pode ser representada no diagrama a seguir.

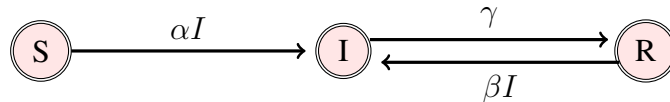


Figura 1 – Diagrama da dinâmica de propagação de memes do modelo de Wang e Wood (2011)

Fonte: Do autor.

Neste trabalho utilizaremos tal modelo para testar a inserção de memória fazendo uso do Cálculo Fracionário, realizando uma análise qualitativa e utilizando método numérico para comparar o modelo clássico com sua versão com memória. A escolha desse modelo foi feita devido a parecer mais adequado considerar que há a possibilidade de reinfecção do indivíduo, como feito por Wang e Wood (2011), isso é, considerar que ele possa voltar a ter interesse por um meme mesmo depois de se desinteressar por determinado tempo.

Em cada equação diferencial do modelo (2.1) podemos analisar o que os autores consideraram necessário, ao formular o sistema, para que os indivíduos entrem e saiam do compartimento referido. Por exemplo, na equação de $dS(t)/dt$ podemos ver que os indivíduos suscetíveis ao meme apenas diminuem em número, ou seja, do compartimento de pessoas suscetíveis apenas saem pessoas, o que ocorre quando se tornam infectadas a uma taxa α e após terem contato com algum indivíduo infectado.

Na equação de $dI(t)/dt$ podemos ver que entram as pessoas que saíram do compartimento de suscetíveis ao serem infectadas, bem como as pessoas que saem do compartimento

de recuperados ao serem reinfectadas a uma taxa β e após terem contato com um indivíduo infectado. Por outro lado, saem do compartimento de infectadas as pessoas que se recuperam a uma taxa γ .

Por fim, na equação de $dR(t)/dt$ entram as pessoas que saíram do compartimento de infectadas ao se recuperarem, e saem as pessoas que se reinfectam e retornam ao compartimento de infectados.

Essa ideia para modelar a propagação de memes, utilizando equações diferenciais ordinárias, é a mesma utilizada na epidemiologia para modelar a propagação de uma doença. Pelos aspectos já descritos neste capítulo, é possível fazer uma relação entre um meme e uma doença e, assim, utilizar os modelos epidemiológicos na memética. Apesar de ser isso o mais comum, o objetivo deste trabalho é analisar o uso desses modelos após introdução de memória, buscando-se mostrar uma maior adequação aos dados reais do que se consegue com os modelos sem memória. Dentre várias formas de introdução de memória em um modelo, a que iremos utilizar transforma as equações diferenciais ordinárias em equações diferenciais fracionárias seguindo a metodologia de Saeedian (2017). Com o intuito de apresentar as ferramentas que utilizamos nesse processo, no capítulo a seguir são apresentados alguns resultados do Cálculo Fracionário.

3 CÁLCULO FRACIONÁRIO

Nesta seção mostraremos alguns resultados importantes do Cálculo Fracionário, para a construção e a análise de um modelo com memória. Primeiramente, estudaremos duas funções relevantes nessa área: função gama e função beta. Logo após, iremos definir e mostrar algumas propriedades da Transformada de Laplace, um conceito fundamental para a resolução de equações diferenciais fracionárias. Também serão definidas e analisadas duas funções muito usadas na composição da solução de equações diferenciais fracionárias. Então, traremos definições de integral e derivada fracionárias. Finalizaremos esta seção mostrando como se utiliza o Cálculo Fracionário para inserir memória em um modelo de equações diferenciais ordinárias, fazendo uso da metodologia de Saeedian (2017).

Neste capítulo utilizaremos a notação $C([0,b] : \mathbb{R}^n)$ para denotar o espaço das funções contínuas $f : [0,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $C^1([0,b] : \mathbb{R}^n)$ para essas funções, quando suas derivadas de primeira ordem também forem contínuas. E mais, trabalharemos com o espaço $L^1([0,b] : \mathbb{R}^n)$ de funções integráveis $f : [0,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, e o espaço $W^{1,1}([0,b] : \mathbb{R}^n)$ dado por

$$W^{1,1}([0,b] : \mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^1; \exists g \in L^1 \text{ tal que } \int_a^b u\phi' = - \int_a^b g\phi, \forall \phi \in C^1([0,b] : \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Dizemos que uma função f definida em \mathbb{R} a valores em \mathbb{R}^n ou \mathbb{C} , é dita localmente integrável se para todo subconjunto relativamente compacto $K \subset \mathbb{R}$ tem-se $f \in L^1(K : \mathbb{R}^n)$ ou $f \in L^1(K : \mathbb{C})$ respectivamente.

Também é conveniente lembrar aqui que se $x \in \mathbb{R}^n$ a norma da soma é dada por: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

3.1 FUNÇÕES GAMA E BETA

A seguir apresentamos a definição e importantes propriedades da função gama.

Definição 3.1 (Função Gama). A integral imprópria

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \quad (3.1)$$

é chamada função Gama e é definida para $Re(\alpha) > 0$, onde ela é convergente.

Propriedade 3.2. A função Gama possui as propriedades

- a) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$;
- b) $\Gamma(1) = 1!$;
- c) $\Gamma(n + 1) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: no Apêndice A.

Agora definiremos a função beta e demonstraremos um teorema que relaciona as funções gama e beta.

Definição 3.3 (Função Beta). A função beta é definida pela integral

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx, \quad (3.2)$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Teorema 3.4. Podemos relacionar as funções gama e beta como segue abaixo.

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (3.3)$$

Demonstração: no Apêndice A.

3.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Para construir a teoria da Transformada de Laplace precisamos, antes, definir o que é uma função do tipo exponencial para provar que a integral utilizada na definição da transformada é convergente.

Definição 3.5. Uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ se diz do tipo exponencial se existir $t_0, M > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|f(t)\| \leq Me^{\gamma t}, \quad (3.4)$$

para todo $t \geq t_0$.

Isso quer dizer que, quando t tende a infinito, a função f não deve crescer mais rapidamente do que uma função exponencial.

Proposição 3.6. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função localmente integrável do tipo exponencial. Então, existe $\gamma > 0$, dado como na definição anterior, tal que $Re(\lambda) > \gamma$ e

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \quad (3.5)$$

é convergente.

Demonstração: no apêndice A.

Agora podemos definir a Transformada de Laplace, sua inversa e apresentar exemplos.

Definição 3.7 (Transformação de Laplace). Seja f como na proposição acima. Dizemos que a função $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação de Laplace de $f(t)$, se

$$F(\lambda) = \mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt. \quad (3.6)$$

Definição 3.8 (Transformação de Laplace Inversa). Seja $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função integrável. Definimos como transformada de Laplace inversa a integral

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(\lambda)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{\lambda t} F(\lambda) d\lambda, \quad (3.7)$$

onde $c > c_0$.

Exemplo 3.9. Seja $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\gamma) > -1$ e $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $f(t) = t^\gamma$. Então, para $Re(\lambda) > 0$ temos

$$\mathcal{L}\{t^\gamma\}(\lambda) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\lambda^{(\gamma+1)}}. \quad (3.8)$$

Com efeito:

$$\mathcal{L}\{t^\gamma\}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^\gamma dt. \quad (3.9)$$

Tomando $u = \lambda t$, temos $du = \lambda dt$, e

$$\mathcal{L}\{t^\gamma\}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^\gamma \frac{du}{\lambda} \quad (3.10)$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^\gamma}{\lambda^{\gamma+1}} du \quad (3.11)$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-u} u^{(\gamma+1)-1} du}{\lambda^{\gamma+1}} \quad (3.12)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\lambda^{(\gamma+1)}}. \quad (3.13)$$

■

A próxima definição é utilizada na demonstração do teorema seguinte, o qual define uma forma de denotar a fração $\frac{1}{\Gamma(z)}$, onde $z \in \mathbb{C}$.

Definição 3.10 (Caminho de Hankel). Dizemos que Ha é um caminho de Hankel se existe $\epsilon > 0$ e $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, onde $Ha = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$, tal que

$$\begin{cases} Ha_1 &= \{te^{i\theta} : t \in [\epsilon, \infty)\}, \\ Ha_2 &= \{\epsilon e^{it} : t \in [-\theta, \theta)\}, \\ Ha_3 &= \{te^{-i\theta} : t \in [\epsilon, \infty)\}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Teorema 3.11. Dado $z \in \mathbb{C}$ com $Re(z) > 0$, temos

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \mu^{-z} e^\mu d\mu, \quad (3.15)$$

onde Ha é algum caminho de Hankel.

Demonstração: no Apêndice A.

A convolução, definida abaixo com algumas propriedades, é usada em muitas situações, inclusive na definição de integral fracionária de Riemann-Liouville e na inserção de memória em um modelo.

Definição 3.12 (Convolução). Seja $\nu \in (0, \infty)$ e considere duas funções mensuráveis $f : [0, \nu] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, \nu] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos a convolução em $[0, \nu]$ entre f e g como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds, \quad (3.16)$$

para todo $t \in [0, \nu]$, sempre que a integral acima existir.

Observação 3.13. Seja $\nu \in (0, \infty)$ e considere as funções mensuráveis $f, g : [0, \nu] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : [0, \nu] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supondo que todas as integrais existam, é possível demonstrar que

- i) $(f * g)(t) = (g * f)(t)$;
- ii) $((f * g) * h)(t) = (f * (g * h))(t)$.

Demonstração: no Apêndice A.

Lema 3.14. Sejam $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções do tipo exponencial. Então a função $f * g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é do tipo exponencial.

Demonstração: no Apêndice A.

A seguir, enunciaremos o teorema sobre a Transformada de Laplace de uma convolução entre duas funções, que é dada pelo produto das Transformadas de Laplace de ambas as funções.

Teorema 3.15. Sejam $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções localmente integráveis do tipo exponencial e suponha que \mathcal{L} é a transformação de Laplace. Então, a função $(f * g) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é localmente integrável do tipo exponencial e

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]. \quad (3.17)$$

Demonstração: no Apêndice A.

3.3 FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER

Ao estudar equações diferenciais ordinárias, aprendemos que as soluções dos sistemas lineares são dadas em função da exponencial. De forma semelhante, as soluções de sistemas com equações diferenciais fracionárias são dadas em função da função de Mittag-Leffler, definida abaixo.

Definição 3.16 (Função de Mittag-Leffler). Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ estritamente positivos. Então, $E_{\alpha, \beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é a função de Mittag-Leffler, dada por

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (3.18)$$

Observação 3.17. Existem algumas funções importantes que possuem relação com a função geral de Mittag-Leffler, como vemos a seguir:

(i) se $\beta = 1$ obtemos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, a mais estudada delas,

$$E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)};$$

(ii) se $\alpha = \beta = 1$:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z;$$

(iii) se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$:

$$E_{\alpha,\beta}(-z^2) = E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2k!} = \cos z;$$

(iv) se $|z| < 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, temos

$$E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}.$$

A função de Mittag-Leffler tem uma representação integral, conforme observamos na proposição seguinte.

Proposição 3.18. Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $E_{\alpha,\beta}(z)$ como definida acima. Então, para $z \in \mathbb{C}$, tomamos $Ha_z = Ha(\epsilon_z, \theta)$ com $\epsilon_z > |z|^{\frac{1}{\alpha}}$ e $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e a função geral de Mittag-Leffler pode ser escrita como

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_z} \frac{\mu^{\alpha-\beta} e^{\mu}}{\mu^{\alpha} - z} d\mu. \quad (3.19)$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.11 temos

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3.20)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_z} \mu^{-\alpha k - \beta} e^{\mu} d\mu \right] \quad (3.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\mu^{\alpha k}} \mu^{-\beta} e^{\mu} d\mu \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_z} \mu^{-\beta} e^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z}{\mu^{\alpha}} \right]^k d\mu \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

Como $|z|^{\frac{1}{\alpha}} < \epsilon_z$ podemos afirmar que

$$|z| < |\mu|^{\alpha}.$$

E, então,

$$\left| \frac{z}{\mu^{\alpha}} \right| < 1,$$

o que garante que podemos usar o caso particular (*iii*) da Observação 3.17. Portanto,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_z} \mu^{-\beta} e^{\mu} \left[\frac{\mu^{\alpha}}{\mu^{\alpha} - z} \right] d\mu \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_z} \frac{\mu^{\alpha-\beta} e^{\mu}}{\mu^{\alpha} - z} d\mu. \quad (3.26)$$

■

3.4 DERIVADA E INTEGRAL FRACIONÁRIAS

A função definida a seguir é utilizada na definição de integral fracionária e na demonstração de algumas de suas propriedades.

Definição 3.19. Seja $\alpha > 0$. Considere a função $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}, \quad (3.27)$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é a função gama.

Proposição 3.20. Sejam $\alpha, \beta > 0$ e $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ como na definição acima. Então, para $t > 0$, temos

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}.$$

Demonstração:

Se $t \leq 0$, temos

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \int_0^t 0 \cdot 0 \, ds = 0 = g_{\alpha+\beta}(t). \quad (3.28)$$

Se $t > 0$,

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds. \quad (3.29)$$

Tomando $u = \frac{s}{t}$, temos $ds = tdu$, e então

$$g_\alpha * g_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (t-ut)^{\alpha-1} (ut)^{\beta-1} tdu \quad (3.30)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (t(1-u))^{\alpha-1} (ut)^{\beta-1} tdu \quad (3.31)$$

$$= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} \left[\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \right] \quad (3.32)$$

$$= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} B(\alpha,\beta) \quad (3.33)$$

$$= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (3.34)$$

$$= g_{\alpha+\beta}(t). \quad (3.35)$$

■

Definiremos agora a integral e a derivada fracionária de Riemann-Liouville e depois a definição de Caputo da derivada fracionária. Como será abordado, pela definição de derivada

fracionária de Caputo a derivada de constante é igual a zero, o que não ocorre com a derivada de Riemann-Liouville.

Definição 3.21 (Integral Fracionária de Riemann-Liouville). Sejam $\alpha \in (0,1)$, $b > 0$ e $f \in L^1([0,b] : \mathbb{R}^n)$. A Integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α é dada por

$$J_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (3.36)$$

para $t \in [0,b]$.

Observação 3.22. Define-se que

$$J_t^0 f(t) = f(t). \quad (3.37)$$

Definição 3.23 (Derivada Fracionária de Riemann-Liouville). Sejam $\alpha \in (0,1)$, $b > 0$ e $f \in L^1([0,b] : \mathbb{R}^n)$, com $f * g_{1-\alpha} \in W^{1,1}([0,b] : \mathbb{R}^n)$. Definimos a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α por

$$D_t^\alpha f(t) = D_t^1 J_t^{1-\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right). \quad (3.38)$$

Exemplo 3.24. Sejam $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (-1, \infty)$ e a função $f(t) = ct^\beta$. Então,

$$D_t^\alpha f(t) = c \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)} t^{\beta-\alpha}. \quad (3.39)$$

De fato,

$$D_t^\alpha f(t) = D_t \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} c s^\beta ds \right\}. \quad (3.40)$$

Tomando $u = \frac{s}{t}$, temos $ds = t du$, e

$$D_t^\alpha f(t) = D_t \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t-tu)^{-\alpha} c (tu)^\beta t du \right\} \quad (3.41)$$

$$= D_t \left\{ \frac{ct^{1+\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_0^1 (1-u)^{-\alpha} u^\beta du \right] \right\} \quad (3.42)$$

$$= D_t \left\{ \frac{ct^{1+\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} B(1-\alpha, \beta+1) \right\} \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

$$= (1 + \beta - \alpha)t^{\beta-\alpha} \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} B(1-\alpha, \beta+1) \quad (3.45)$$

$$= (1 + \beta - \alpha)t^{\beta-\alpha} \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2-\alpha+\beta)} \quad (3.46)$$

$$= (1 + \beta - \alpha)t^{\beta-\alpha} \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{(1-\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha+\beta)} \quad (3.47)$$

$$= ct^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)}. \quad (3.48)$$

■

Observação 3.25. Pelo exemplo anterior, tomando $\beta = 0$, a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma constante é dada por

$$D_t^\alpha c = c \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (3.49)$$

Definição 3.26 (Derivada Fracionária de Caputo). Seja $\alpha \in (0,1)$, $b > 0$ e $f \in C([0,b] : \mathbb{R}^n)$ com $f * g_{1-\alpha} \in W^{1,1}([0,b] : \mathbb{R}^n)$. Definimos a derivada fracionária de Caputo de ordem α por

$${}_c D_t^\alpha f(t) = D_t^\alpha (f(t) - f(0)), \quad (3.50)$$

para $t \in [0,b]$.

A seguir, mostraremos uma das propriedades da derivada de Caputo que a diferencia da derivada de Riemann-Liouville. É através dessa propriedade que podemos concluir que a derivada de Caputo de uma constante é igual a zero.

Proposição 3.27. Seja $\alpha \in (0,1)$ e suponha que $f \in C^1([0,b] : \mathbb{R}^n)$. Então, para todo $t \in [0,b]$,

$${}_c D_t^\alpha f(t) = J_t^{1-\alpha} f'(t). \quad (3.51)$$

Demonstração:

$${}_c D_t^\alpha f(t) = D_t^\alpha (f(t) - f(0)) \quad (3.52)$$

$$= D_t^\alpha f(t) - D_t^\alpha f(0) \quad (3.53)$$

$$(3.54)$$

$$= D_t^1 \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right] - D_t^\alpha f(0) \quad (3.55)$$

$$= D_t^1 \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t -\frac{D_s^1 (t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) ds \right] - D_t^\alpha f(0) \quad (3.56)$$

$$= D_t^1 \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(s) \Big|_0^t + \int_0^t \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} f'(s) ds \right) \right] - D_t^\alpha f(0) \quad (3.57)$$

$$= D_t^1 \left[\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} f(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} f'(s) ds \right] - D_t^\alpha f(0) \quad (3.58)$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) + D_t^1 \left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} f'(s) ds \right] - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) \quad (3.59)$$

$$= D_t^1 [J_t^{2-\alpha} f'(t)] \quad (3.60)$$

$$= D_t^1 J_t^1 [J_t^{1-\alpha} f'(t)] \quad (3.61)$$

$$= J_t^{1-\alpha} f'(t). \quad (3.62)$$

■

Abaixo temos propriedades que relacionam a integral fracionária com a derivada fracionária, tanto de Caputo como de Riemann-Liouville.

Proposição 3.28. As seguintes propriedades são válidas para as definições de integral e derivada fracionária: sejam $\alpha_1, \alpha_2, b \geq 0$, com $f \in L^1([0, b] : \mathbb{R}^n)$ e $h \in C([0, b] : \mathbb{R}^n)$, então:

i) $J_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_2} f(t) = J_t^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t);$

ii) $D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} f(t) = f(t);$

iii) se $g_{1-\alpha_1} * f \in W^{1,1}([0, b] : \mathbb{R}^n)$, então

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{ J_s^{1-\alpha_1} f(s) \} \Big|_{s=0}.$$

Ainda, se existe uma função integrável ϕ tal que $f = J_t^{\alpha_1} \phi(t)$, então

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = f(t);$$

iv) $cD_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) = h(t);$

v) se $g_{1-\alpha_1} * h \in W^{1,1}([0, b] : \mathbb{R}^n)$, então $J_t^{\alpha_1} cD_t^{\alpha_1} h(t) = h(t) - h(0).$

Demonstração:

i)

$$J^{\alpha_1} J^{\alpha_2} f(t) = g_{\alpha_1} * (g_{\alpha_2} * f)(t) \quad (3.63)$$

$$= ((g_{\alpha_1} * g_{\alpha_2}) * f)(t) \quad (3.64)$$

$$= (g_{\alpha_1 + \alpha_2} * f)(t) \quad (3.65)$$

$$= J^{\alpha_1 + \alpha_2} f(t); \quad (3.66)$$

ii)

$$D^{\alpha_1} J^{\alpha_1} f(t) = (D^1 J^{1-\alpha_1}) J^{\alpha_1} f(t) \quad (3.67)$$

$$= D^1 (J^{1-\alpha_1} J^{\alpha_1}) f(t) \quad (3.68)$$

$$= D^1 J^1 f(t) \quad (3.69)$$

$$= f(t); \quad (3.70)$$

iii)

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = D_t^1 J_t^1 [J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t)] \quad (3.71)$$

$$= D_t^1 [J_t^{\alpha_1 + 1} D_t^{\alpha_1} f(t)] \quad (3.72)$$

$$= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_s^{\alpha_1} f(s) ds \right\} \quad (3.73)$$

$$= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1} D_s^1 J_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\} \quad (3.74)$$

$$= D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \{ (t-s)^{\alpha_1} J_s^{1-\alpha_1} f(s) \} \Big|_0^t \right\} \quad (3.75)$$

$$- D_t^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} \int_0^t D_s^1 (t-s)^{\alpha_1} J_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\} \quad (3.76)$$

$$= D_t^1 \left\{ -\frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1} \{ J_s^{1-\alpha_1} f(s) \} \Big|_{s=0} \right\} \quad (3.77)$$

$$+ D_t^1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} J_s^{1-\alpha_1} f(s) ds \right\} \quad (3.78)$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{ J_s^{1-\alpha_1} f(s) \} \Big|_{s=0} + D_t^1 J_t^{\alpha_1} J_t^{1-\alpha_1} f(t) \quad (3.79)$$

$$= f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{ J_s^{1-\alpha_1} f(s) \} \Big|_{s=0}. \quad (3.80)$$

Ainda, se $f(t) = J_t^{\alpha_1} \Phi(t)$, então:

$$J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} f(t) = J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} \Phi(t) \quad (3.81)$$

$$= J_t^{\alpha_1} \Phi(t) \quad (3.82)$$

$$= f(t); \quad (3.83)$$

iv) sabendo que

$$\|J_s^{\alpha_1} h(s)|_{s=0}\| \leq \|h\|_{C([0,b]:X)} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^s (s-u)^{\alpha_1-1} du|_{s=0} = 0, \quad (3.84)$$

temos

$${}_c D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) = D_t^{\alpha_1} (J_t^{\alpha_1} h(t) - J_s^{\alpha_1} h(s)|_{s=0}) \quad (3.85)$$

$$= D_t^{\alpha_1} J_t^{\alpha_1} h(t) \quad (3.86)$$

$$= h(t); \quad (3.87)$$

v) chamemos $H(t) = h(t) - h(0)$. Logo,

$$J_t^{\alpha_1} {}_c D_t^{\alpha_1} h(t) = J_t^{\alpha_1} D_t^{\alpha_1} H(t) \quad (3.88)$$

$$= H(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} t^{\alpha_1-1} \{J_s^{1-\alpha_1} H(s)\}|_{s=0} \quad (3.89)$$

$$= H(t) \quad (3.90)$$

$$= h(t) - h(0). \quad (3.91)$$

■

As duas propriedades a seguir são fundamentais para a resolução de equações diferenciais de ordem fracionária, como podemos ver em um exemplo logo em seguida.

Proposição 3.29. Sendo $E_{\eta,\beta}(ct^\eta)$ a função de Mittag-Leffler, a Transformada de Laplace da função $f(t) = t^{\beta-1} E_{\eta,\beta}(ct^\eta)$ é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)](\lambda) = \frac{\lambda^{\eta-\beta}}{\lambda^\eta - c}. \quad (3.92)$$

Demonstração:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{\beta-1} E_{\eta,\beta}(ct^\eta) dt \quad (3.93)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\lambda t} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct^\eta)^k}{\Gamma(\eta k + \beta)} dt \quad (3.94)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{\Gamma(\eta k + \beta)} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\lambda t} t^{\eta k + \beta - 1} dt. \quad (3.95)$$

Realizando a substituição $u = \lambda t$,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{\Gamma(\eta k + \beta)} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-u} \frac{u^{\eta k + \beta - 1}}{\lambda^{\eta k + \beta - 1}} \frac{du}{\lambda} \quad (3.96)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{\Gamma(\eta k + \beta) \lambda^{\eta k + \beta}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-u} u^{(\eta k + \beta) - 1} du \quad (3.97)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{\lambda^{\eta k + \beta}} \quad (3.98)$$

$$= \frac{1}{\lambda^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c}{\lambda^\eta} \right)^k. \quad (3.99)$$

Sabendo-se sobre a convergência da série geométrica, temos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{\lambda^\beta} \frac{\lambda^\eta}{\lambda^\eta - c} = \frac{\lambda^{\eta - \beta}}{\lambda^\eta - c}. \quad (3.100)$$

■

Propriedade 3.30. $\mathcal{L}[D^m f(t)](\lambda) = \lambda^m \mathcal{L}[f(t)] - f(0)\lambda^{m-1}$.

A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em Camargo (2009) e Camargo (2015).

Lema 3.31. A transformada de Laplace da integral fracionária é $\mathcal{L}[J^\eta f(t)](\lambda) = \lambda^{-\eta} \mathcal{L}[f(t)]$.

Demonstração: Tomemos a função $\phi_\eta(t) = \frac{t^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)}$. Então,

$$\mathcal{L}[\phi_\eta(t)](\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{\eta-1} dt. \quad (3.101)$$

Realizando a substituição $u = \lambda t$, temos $du = \lambda dt$, e

$$\mathcal{L}[\phi_\eta(t)] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\Gamma(\eta)\lambda^\eta} \int_0^b e^{-u} u^{\eta-1} du \right] \quad (3.102)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\eta)\lambda^\eta} \Gamma(\eta) \quad (3.103)$$

$$= \lambda^{-\eta}. \quad (3.104)$$

Logo, pelo Teorema 3.15,

$$\mathcal{L}[J^\eta f(t)] = \mathcal{L}[\phi_\eta(t) * f(t)] \quad (3.105)$$

$$= \mathcal{L}[\phi_\eta(t)] \mathcal{L}[f(t)] \quad (3.106)$$

$$= \lambda^{-\eta} \mathcal{L}[f(t)]. \quad (3.107)$$

■

Proposição 3.32. A Transformada de Laplace da derivada de Caputo de ordem η é dada por

$$\mathcal{L}[{}_c D_t^\eta f(t)](\lambda) = \lambda^\eta \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0)\lambda^{\eta-1}, \quad (3.108)$$

onde $0 < \eta \leq 1$.

Demonstração:

$$\mathcal{L}[{}_c D_t^\eta](\lambda) = \mathcal{L}[J^{m-\eta}(D^m f(t))]. \quad (3.109)$$

Pelo Lema 3.31,

$$\mathcal{L}[{}_c D_t^\eta](\lambda) = \lambda^{-m+\eta} \mathcal{L}[D^m f(t)]. \quad (3.110)$$

Pela Propriedade 3.30,

$$\mathcal{L}[{}_c D_t^\eta](\lambda) = \lambda^{-m+\eta} [\lambda^m \mathcal{L}[f(t)] - f(0)\lambda^{m-1}] \quad (3.111)$$

$$= \lambda^\eta \mathcal{L}[f(t)] - f(0)\lambda^{\eta-1}. \quad (3.112)$$

■

Exemplo 3.33. Seja $D_t^\eta I(t) = -\alpha I$. Usaremos os lemas anteriores para encontrar a função $I(t)$.

$$D_t^\eta I(t) = -\alpha I \Rightarrow \quad (3.113)$$

$$\mathcal{L}[D_t^\eta I(t)](\lambda) = \mathcal{L}[-\alpha I](\lambda). \quad (3.114)$$

Utilizando a Proposição 3.32,

$$\lambda^\eta \mathcal{L}[I] - \lambda^{\eta-1} I(0) = -\alpha \mathcal{L}[I] \Rightarrow \quad (3.115)$$

$$(\lambda^\eta + \alpha) \mathcal{L}[I] = \lambda^{\eta-1} I(0) \Rightarrow \quad (3.116)$$

$$\mathcal{L}[I] = \frac{\lambda^{\eta-1} I(0)}{\lambda^\eta + \alpha}. \quad (3.117)$$

Então, pela Proposição 3.29,

$$I(t) = E_\eta(-\alpha t^\eta) I(0). \quad (3.118)$$

■

Após o estudo do Cálculo Fracionário, é possível utilizar os resultados apresentados como ferramenta para introduzir memória no modelo epidemiológico clássico de Wang e Wood (2011). No capítulo a seguir será explicado o processo de introdução de memória, bem como será estudado esse novo modelo, o modelo com memória, qualitativa e numericamente.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA DA PROPAGAÇÃO DE MEMES EM UM SISTEMA COM MEMÓRIA

É natural pensarmos na influência da memória no processo de espalhamento de uma ideia, uma vez que o efeito da memória permite maior recurso de escala, ou seja, em determinado tempo a função analisada pode apresentar decaimento mais lento ou mais rápido. Entretanto, uma forma efetiva de introduzir esse tipo de parâmetro em modelos de propagação de memes é um tópico pouco explorado na literatura.

Alguns trabalhos, como os de Heymans (2008), Fang et al. (2013), Du et al. (2013), Richard (2014), Sardar et al. (2015), Zhou e Yang (2018) e Aounallah et al. (2018), têm utilizado Cálculo Fracionário e Equações com Derivadas Fracionárias para introduzir memória em modelos epidemiológicos, inteligência artificial, teoria de materiais, hidrologia, entre outras áreas. Em particular, Saeedian (2017), a partir de teoria de Processos Não-Markovianos, utiliza a teoria de Equações Integrais com memória e estabelece uma relação entre esse tipo de Equação e Equações com Derivada Fracionária.

Seguindo a mesma metodologia de Saeedian (2017), iremos introduzir memória no modelo epidemiológico clássico de Wang e Wood (2011), já citado anteriormente em (2.1), e segue abaixo, novamente:

$$\begin{cases} S'(t) &= -\alpha S(t)I(t), \\ I'(t) &= \alpha S(t)I(t) + \beta I(t)R(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) &= -\beta I(t)R(t) + \gamma I(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Primeiramente aplica-se uma convolução, com uma função f nomeada “kernel”, em cada uma das equações do lado direito do sistema. Para lembrar, uma convolução entre duas funções f e g é dada por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds. \quad (4.2)$$

Assim, passaríamos a ter o sistema de equações integro-diferenciais

$$\begin{cases} S'(t) &= - \int_0^t f(t-s)(\alpha S(s)I(s))ds, \\ I'(t) &= \int_0^t f(t-s)(\alpha S(s)I(s) + \beta I(s)R(s) - \gamma I(s))ds, \\ R'(t) &= \int_0^t f(t-s)(-\beta I(s)R(s) + \gamma I(s))ds, \end{cases} \quad (4.3)$$

em que f é a função kernel.

A função kernel pode ser definida de várias formas, desde que satisfaça determinadas propriedades. É por isso que há mais de uma forma de inserção de memória. Em particular, uma forma específica para a função kernel é

$$f(t) = \frac{t^{\eta-2}}{\Gamma(\eta-1)}. \quad (4.4)$$

Esta função foi a escolhida para a introdução de memória neste trabalho, uma vez que ao substituí-la no sistema de equação integro-diferenciais (4.3) o modelo se torna um sistema de equações de ordem fracionária. De fato, substituindo f no sistema acima obtemos equações que, segundo a definição de Riemann-Liouville, são integrais fracionárias de ordem $\eta - 1$,

$$\begin{cases} S'(t) &= J_t^{\eta-1}(-\alpha S(t)I(t)), \\ I'(t) &= J_t^{\eta-1}(\alpha S(t)I(t) + \beta I(t)R(t) - \gamma I(t)), \\ R'(t) &= J_t^{\eta-1}(-\beta I(t)R(t) + \gamma I(t)). \end{cases} \quad (4.5)$$

Por fim, aplicando $J^{1-\eta}$ em ambos os lados de cada equação, obtemos exatamente o modelo de Wang e Wood (2011) de ordem fracionária,

$$\begin{cases} D_t^\eta S(t) &= -\alpha S(t)I(t), \\ D_t^\eta I(t) &= \alpha S(t)I(t) + \beta I(t)R(t) - \gamma I(t), \\ D_t^\eta R(t) &= -\beta I(t)R(t) + \gamma I(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

onde a derivada de ordem fracionária segue a definição de Caputo.

Portanto, trabalhar com um modelo com equações de ordem fracionária é uma forma de inserir memória no modelo clássico de equações diferenciais ordinárias. Ou seja, esse é o modelo de Wang e Wood (2011) com memória, do qual iremos analisar o comportamento quali-

tativo nesta seção. Isso será feito do ponto de vista analítico e também numérico-computacional.

4.1 MODELO PROPOSTO

O modelo de estudo, então, é dado por

$$\begin{cases} D_t^\eta S(t) &= -\alpha S(t)I(t), \\ D_t^\eta I(t) &= \alpha S(t)I(t) + \beta I(t)R(t) - \gamma I(t), \\ D_t^\eta R(t) &= -\beta I(t)R(t) + \gamma I(t), \end{cases} \quad (4.7)$$

em que α é a taxa de infecção, β a de reinfecção e γ a de recuperação. As funções $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ tratam, respectivamente, de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados, em função do tempo t .

Equivalentemente ao modelo original de Wang e Wood (2011), considera-se que para um indivíduo suscetível se infectar, ou um recuperado se reinfecar, é necessário um contato com um infectado. Por outro lado, consideram que, para um infectado se recuperar, não é necessário ter contato com outro indivíduo, os infectados se recuperam a uma taxa γ .

Inicialmente, mostraremos que este modelo está bem definido na região $\mathbb{R}_+^3 = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$, ressaltando que, se uma condição inicial do sistema estiver nessa região, a solução do sistema permanece nela. Precedendo tal resultado, seguem alguns teoremas necessários para sua demonstração.

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} {}^c D_t^\eta x(t) &= f(t, x) \\ x(t)|_{t=t_0} &= x_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde f é definida em um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1 (Existência). Seja f uma função contínua no conjunto fechado $\bar{S} = \{(t, x) : t \in [t_0, t_0 + a], \|x - x_0\|_1 \leq b\}$ para algum $a > 0$ e $b > 0$, tal que $\bar{S} \subset D$. Então, (4.8) tem uma solução $x(t) \in C([t_0, t_0 + h] : \mathbb{R}^n)$, onde $h = \min \left\{ a, \left[\frac{b\Gamma(\eta + 1)}{M} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$ e $M = \max_{(t,x) \in \bar{S}} \|f(t, x)\|_1$.

Teorema 4.2 (Unicidade). Seja f contínua em t e Lipschitziana em x no conjunto fechado \bar{S} . Então, (4.8) tem uma única solução $x(\cdot) \in C([t_0, t_0 + h] : \mathbb{R}^n)$.

As respectivas demonstrações dos Teoremas 4.1 e 4.2 podem ser encontradas no Capítulo 6 de Diethelm (2010). Para os próximos resultados vamos introduzir a seguinte definição.

Definição 4.3. Seja $x = x(t)$, t em (t_0, ω) e $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$, t em $(t_0, \tilde{\omega})$ ambas soluções de (4.8). Se $\tilde{\omega} < \omega$ e $x(t) = \tilde{x}(t)$ para $t \in (t_0, \tilde{\omega})$, dizemos que $\tilde{x}(\cdot)$ pode ser continuada ou estendida até $x(\cdot)$. A solução $x(\cdot)$ é não continuável se ela não pode ser estendida. A existência de um intervalo em que a solução é não continuável $x(\cdot)$ é dito intervalo máximo de existência de $x(\cdot)$. Quando a solução é $x(\cdot)$ definida em $[t_0, \infty)$ dizemos que a solução é globalmente definida.

Teorema 4.4 (Prolongamento de Soluções). Seja D um conjunto aberto tal que $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Suponha, ainda, que $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Se $x(t)$ é uma solução de (4.8) em algum intervalo, então ela pode ser estendida sobre o intervalo maximal de existência. E mais, se $[t_0, \omega)$ é um intervalo maximal de existência, então quando $t \rightarrow \omega^-$, temos $(t, x(t))$ tendendo para o limite de D .

Corolário 4.5 (Soluções globalmente definidas). Seja $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ em que $D = [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Se $x(\cdot)$ é uma solução de (4.8) em um intervalo maximal de existência $J = [t_0, \omega)$, então

- (i) ou $\omega = \infty$ e $\limsup_{t \rightarrow \omega^-} \|x\|_1 = \infty$,
- (ii) $\omega = \infty$ se para qualquer $\gamma > t_0$, $x(\cdot)$ é limitada em $J \cap [t_0, \gamma)$.

A demonstração do Teorema 4.4 e do Corolário 4.5 podem ser encontrada no Teorema 3.2.3 da página 32 e Corolário 3.2.1 de Wu (2017).

As demonstrações dos próximos dois teoremas podem ser encontradas no Teorema 4.4 da página 71 e no Teorema 7.5 da página 141 de Diethelm (2010), respectivamente.

Teorema 4.6. Seja $\eta > 0$. A função de Mittag-Leffer $E_{\eta,1}(re^{i\phi})$ se comporta da seguinte forma:

- (a) $E_{\eta,1}(re^{i\phi}) \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$ se $|\phi| > \frac{\eta\pi}{2}$,
- (b) $E_{\eta,1}(re^{i\phi})$ permanece limitada para $r \rightarrow \infty$ se $|\phi| = \frac{\eta\pi}{2}$,
- (c) $E_{\eta,1}(re^{i\phi}) \rightarrow \infty$ para $r \rightarrow \infty$ se $|\phi| < \frac{\eta\pi}{2}$.

Agora apresentamos um resultado sobre o número de zeros da função de Mittag-Leffer.

Teorema 4.7. Considere a função $u_0(t) = E_{\eta,1}(-\mu t^\eta)$ com algum $\mu > 0$.

- (a) No caso em que $0 < \eta < 1$, u_0 não tem zeros em $[0, \infty)$,
- (b) No caso em que $1 < \eta < 2$, u_0 o número de zeros de u_0 em $[0, \infty)$ (contando multiplicidades) é finito e ímpar.

Teorema 4.8. A região $\mathbb{R}_+^3 = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$ é um conjunto positivamente invariante para o sistema (4.7) e, para cada dado inicial em \mathbb{R}_+^3 , existe uma única solução desse sistema que é globalmente definida.

Demonstração: Analisando agora o sistema (4.7), vamos mostrar que, tomando-se um dado inicial $(S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$, a solução $(S(t), I(t), R(t))$ permanece em \mathbb{R}_+^3 , para todo $t \geq 0$. Vamos separar em dois casos:

Afirmção 1: se $(S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$, então $(S(t), I(t), R(t))$ não pode cruzar um dos eixos, escapando \mathbb{R}_+^3 . Observação: a origem $(0,0,0)$ está contida no eixos.

De fato, seja $F(S, I, R) = (-\alpha SI, \alpha SI + \beta RI - \gamma I, -\beta IR + \gamma I)$. Observemos que os eixos de S e R são soluções de equilíbrio do campo F , ou seja, se $\bar{S} \geq 0$ e $\bar{R} \geq 0$, então quaisquer pontos $P_{\bar{S}} = (\bar{S}, 0, 0)$ e $P_{\bar{R}} = (0, 0, \bar{R})$ satisfazem $F(P_{\bar{S}}) = F(P_{\bar{R}}) = (0, 0, 0)$.

Suponhamos, por contradição, que exista outra solução (S, I, R) que cruze um dos dois eixos, digamos S , escapando de \mathbb{R}_+^3 . Então, existe $\bar{S} \geq 0$ tal que $(S(t), I(t), R(t)) = (\bar{S}, 0, 0)$, para algum $t = t_0$. Desta forma, existem duas soluções passando por um mesmo ponto, $(\bar{S}, 0, 0)$, o que é uma contradição devido à propriedade da unicidade de soluções. Portanto, $(S(t), I(t), R(t))$ não cruza o eixo S . De forma análoga, podemos mostrar que também não cruza o eixo R .

Em relação ao eixo $I = \{(0, I, 0) : I \geq 0\}$, observemos que o campo sobre I fica da forma

$$F(0, I, 0) = (0, -\gamma I, \gamma I). \quad (4.9)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} D_t^\eta S(t) &= 0, \\ D_t^\eta I(t) &= -\gamma I(t), \\ D_t^\eta R(t) &= \gamma I(t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

com $(S(0), I(0), R(0)) = (0, I_0, 0)$.

Ao resolver esse sistema temos $S(t) = c$, onde c é uma constante. Como $S(0) = 0$ obtemos que $S(t) = 0$, para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, pelo exemplo 3.33, tomando $\alpha = \gamma$, temos

$$I(t) = E_\eta(-\gamma t^\eta)I(0). \quad (4.11)$$

Portanto, pelo item (a) do Teorema 4.7,

$$I(t) > 0. \quad (4.12)$$

E mais,

$$D_t^\eta R(t) = \gamma I = \gamma E_\eta(-\gamma t^\eta)I(0). \quad (4.13)$$

Então, aplicando J^η em ambos os lados, obtemos

$$R(t) - R(0) = \gamma J^\eta(E_\eta(-\gamma t^\eta)I(0)) \quad (4.14)$$

$$= \gamma \int_0^t \frac{(t-s)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} E_\eta(-\gamma s^\eta)I(0)ds. \quad (4.15)$$

Portanto, como $R(0) = 0$,

$$R(t) = \gamma \int_0^t \frac{(t-s)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} E_\eta(-\gamma s^\eta)I(0)ds \geq 0, \quad (4.16)$$

pois $E_\eta(-\gamma s^\eta)I(0) > 0$. Logo, se o dado inicial for tomado no eixo I , que está em \mathbb{R}_+^3 , então a solução $(S(t), I(t), R(t)) = \left(0, E_\eta(-\gamma t^\eta)I(0), R(0) + \gamma \int_0^t \frac{(t-s)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} E_\eta(-\gamma s^\eta)I(0)ds\right)$ permanece em \mathbb{R}_+^3 , para todo $t \geq 0$. Portanto, ao encontrar o eixo a solução permanece nele ou volta para o octante positivo.

Resta analisar os planos.

Afirmção 2: se $(S_0, I_0, R_0) \in \mathbb{R}_+^3$, então $(S(t), I(t), R(t))$ não pode cruzar um dos planos, escapando \mathbb{R}_+^3 .

Seja $(S(t), I(t), R(t))$, tal que $S_0 > 0, I_0 > 0$ e $R_0 > 0$. Supondo, por contradição, que a solução escape por um plano, temos as três opções abaixo:

1. se a solução escapa pelo plano onde $I = 0$, então existe t^* tal que $S(t^*) > 0, I(t^*) = 0$ e $R(t^*) > 0$.

Observemos que, para todo $t \in [0, t^*]$,

$$D_t^\eta I = \alpha SI + \beta RI - \gamma I \geq -\gamma I. \quad (4.17)$$

Com efeito,

$$\lambda^\eta \mathcal{L}[I] - \lambda^{\eta-1} I(0) \geq -\gamma \mathcal{L}[I]. \quad (4.18)$$

Então,

$$(\lambda^\eta + \gamma) \mathcal{L}[I] \geq \lambda^{\eta-1} I(0). \quad (4.19)$$

Logo,

$$\mathcal{L}[I] \geq \frac{\lambda^{\eta-1}}{\lambda^\eta + \gamma} I(0). \quad (4.20)$$

Portanto,

$$I(t) \geq E_\alpha(-\gamma t^\alpha) I(0) > 0, \quad (4.21)$$

para $t \in [0, t^*]$. Ou seja, $I(t) > 0$, o que é uma contradição;

2. se a solução escapa pelo plano onde $R = 0$, então existe t^* tal que $S(t^*) > 0$, $I(t^*) > 0$ e $R(t^*) = 0$.

Seja $\hat{I} = \max_{t \in [0, t^*]} I(t)$. Então, para todo $t \in [0, t^*]$,

$$D_t^\eta R(t) = -\beta IR \geq -\beta \hat{I} R. \quad (4.22)$$

Dessa forma,

$$R(t) \geq E_\eta(-\beta \hat{I} t^\eta) R(0) > 0. \quad (4.23)$$

Logo, $R(t) > 0$, para todo $t \in [0, t^*]$, o que é uma contradição;

3. se a solução escapa pelo plano onde $S = 0$, então existe t^* tal que $S(t^*) = 0$, $I(t^*) > 0$ e $R(t^*) > 0$.

Novamente, seja $\hat{I} = \max_{t \in [0, t^*]} I(t)$. Então, para todo $t \in [0, t^*]$,

$$D_t^\eta S(t) = -\alpha SI \geq -\alpha S \hat{I}. \quad (4.24)$$

Assim,

$$S(t) \geq E_\eta(-\alpha \hat{I} t^\eta) S(0). \quad (4.25)$$

Logo, $S(t) > 0$ para todo $t \in [0, t^*]$, o que é uma contradição. Portanto, o conjunto $\mathbb{R}_+^3 = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$ é positivamente invariante.

É fácil ver que F é um campo de classe C^1 , logo é localmente lipschitz. Portanto, pelo Teorema 4.2 e Corolário 4.5, para cada dado inicial em \mathbb{R}_+^3 existe uma única solução que é globalmente definida. ■

4.2 ANÁLISE DO MODELO

Nesta seção mostraremos que o modelo estudado, com três equações, pode ser reduzido a um modelo equivalente com apenas duas equações. Então, encontramos os pontos de equilíbrio, endêmico e livre da doença, e com isso o valor de reprodução básica (\mathcal{R}_0).

No modelo de Wang e Wood (2011) o tamanho da população (N) é uma constante, pois

$$D_t^\eta N = D_t^\eta S + D_t^\eta I + D_t^\eta R = 0. \quad (4.26)$$

Assim, $S(t) + I(t) + R(t) = N$, para todo $t \geq 0$.

Fazendo $R = N - S - I$ é possível realizar uma substituição tornando a equação $D_t^\eta R$ uma combinação linear das demais, podendo ser desconsiderada. Com isso, $D_t^\eta S$ continuaria com a mesma forma, uma vez que não depende de R . Substituindo $R = N - S - I$,

$$\begin{aligned} D_t^\eta I &= \alpha S(t)I(t) + \beta I(t)N - \beta I(t)S(t) - \beta I(t)^2 - \gamma I(t) \\ &= (\alpha - \beta)S(t)I(t) + (\beta N - \gamma - \beta I(t))I(t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim, obtemos o novo sistema equivalente

$$\begin{aligned} D_t^\eta S &= -\alpha S(t)I(t), \\ D_t^\eta I &= (\alpha - \beta)S(t)I(t) + (\beta N - \gamma - \beta I(t))I(t). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Podemos observar que as soluções do sistema (4.28) continuam definidas para todo $t \geq 0$ e que a mudança de variável não modifica a unicidade e a existência de solução global para esse novo sistema.

4.2.1 Estudo Qualitativo da Estabilidade do Modelo

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema devemos fazer $D_t^\eta S = D_t^\eta I = 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} D_t^\eta S &= -\alpha S(t)I(t) = 0, \\ D_t^\eta I &= I(t)[(\alpha - \beta)S(t) + \beta N - \gamma - \beta I(t)] = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Considerando que $\alpha SI = 0$, temos duas possibilidades para o ponto (S, I) ser um ponto de equilíbrio, ou $I = 0$ e $S \neq 0$, ou $S = 0$ e $I \neq 0$.

Se $I = 0$ e $S \neq 0$, obtemos o ponto de equilíbrio livre da doença $(S^*, 0)$, sendo $S^* \in (0, S_0]$, onde $S_0 = S(0)$, uma vez que $D_t^\eta S \leq 0$. Isso pode ser verificado no Lema 5.3 de Vieira (2017).

Se $S = 0$ e $I \neq 0$, então

$$I[\beta N - \gamma - \beta I] = 0. \quad (4.30)$$

Como $I \neq 0$,

$$\beta N - \gamma - \beta I = 0. \quad (4.31)$$

Então, o ponto de equilíbrio endêmico é dado por $(0, I^*)$, onde, por (4.31),

$$I^* = \frac{\beta(-N) + \gamma}{-\beta} = \frac{\beta(N) - \gamma}{\beta} = \left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right). \quad (4.32)$$

Como nesse caso temos $I(t) > 0$, para todo $t \geq 0$, devemos ter a restrição: $N > \frac{\gamma}{\beta}$. Portanto, os pontos de equilíbrio são:

$(S^*, 0)$, para qualquer $0 \leq S^* \leq S_0$, se $N \leq \frac{\gamma}{\beta}$.

$(0, I^*)$, em que $I^* = \left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right)$, se $N > \frac{\gamma}{\beta}$.

Agora, para encontrar a razão de reprodução básica \mathcal{R}_0 devemos analisar a situação em que não há endemia, e nesse caso $\mathcal{R}_0 < 1$, ou o caso em que há endemia e $\mathcal{R}_0 > 1$.

Sabemos que não há endemia quando $N \leq \frac{\gamma}{\beta}$. Ou seja, quando $\beta N \leq \gamma$, o que ocorre quando $\frac{\beta N}{\gamma} \leq 1$. Por outro lado, há endemia quando $N > \frac{\gamma}{\beta}$, o que ocorre quando $\frac{\beta N}{\gamma} > 1$. Portanto, podemos concluir que $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$.

Agora, analisaremos os pontos de equilíbrio utilizando linearização e, posteriormente,

simulação numérica. Para a demonstração do próximo teorema, é necessário enunciar o lema a seguir.

Lema 4.9. Se f é uma função contínua diferenciável em $[0, \infty)$ e $D_t^\eta f(t) \leq 0$, para todo $0 < \eta < 1$, então f é monótona decrescente. Se $D_t^\eta f(t) \geq 0$, para todo $0 < \eta < 1$, então f é monótona crescente.

Teorema 4.10. Seja $S(0) = S_0$. Se $\alpha \geq \beta$ e $\frac{\alpha S_0}{\gamma} + \mathcal{R}_0 \leq 1$, ou se $\alpha < \beta$ e $\mathcal{R}_0 \leq 1$, então, com o tempo, o meme desaparece.

Demonstração: Primeiramente vamos analisar o caso em que temos $\alpha > \beta$ e $\frac{\alpha S_0}{\gamma} + \mathcal{R}_0 \leq 1$.

A partir do sistema (4.28) podemos ver que, como $S(t), I(t) \geq 0$ e $D_t^\eta S(t) \leq 0$, então $S(t) \leq S_0$. Usando essa desigualdade na equação de $D_t^\eta I$, obtemos

$$D_t^\eta I(t) \leq (\alpha - \beta)S_0 I(t) + (\beta N - \gamma)I(t) - \beta I(t)^2 \quad (4.33)$$

$$\leq [(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma)]I(t) \quad (4.34)$$

Logo, utilizando as Proposições 3.29 e 3.32, que se encontram nas páginas 35 e 37, ^(4.35)

$$\mathcal{L}[D_t^\eta I(t)] \leq [(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma)]\mathcal{L}[I(t)] \Rightarrow \quad (4.36)$$

$$\lambda^\eta \mathcal{L}[I] - \lambda^{\eta-1} I(0) \leq [(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma)]\mathcal{L}[I] \Rightarrow \quad (4.37)$$

$$(\lambda^\eta - [(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma)])\mathcal{L}[I] \leq \lambda^{\eta-1} I(0) \Rightarrow \quad (4.38)$$

$$\mathcal{L}[I] \leq \frac{\lambda^{\eta-1} I(0)}{\lambda^\eta - [(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma)]} \Rightarrow \quad (4.39)$$

$$I(t) \leq E_\eta([(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma)]t^\eta) I(0). \quad (4.40)$$

Pelo Teorema 4.6, se $(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma) \leq 0$, então $E_\eta([(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma)]t^\eta)$ converge para 0 e, assim, $I(t)$ converge para 0 também.

De fato, pela hipótese, temos $\frac{\alpha S_0}{\gamma} + \mathcal{R}_0 \leq 1$. Então, como $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$, temos $\frac{\alpha S_0 + \beta N}{\gamma} \leq \frac{\gamma}{\gamma}$. Logo,

$$\alpha S_0 + \beta N - \gamma \leq 0. \quad (4.41)$$

Com efeito,

$$(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma) \leq \alpha S_0 + \beta N - \gamma \leq 0. \quad (4.42)$$

Por outro lado, temos o caso em que $\alpha < \beta$ e $\mathcal{R}_0 \leq 1$. Podemos provar esse caso de forma análoga, uma vez que com essas hipóteses temos, diretamente, $(\alpha - \beta)S_0 + (\beta N - \gamma) \leq 0$.



Agora analisaremos o ponto de equilíbrio endêmico de forma semelhante. No entanto, vejamos primeiramente algumas definições e um importante resultado para a realização de tal análise.

Definição 4.11. Um ponto de equilíbrio $p \in D$ é dito estável se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\|x_0 - p\| < \delta$ então $\|x(t) - p\| < \epsilon$, para $t \geq t_0$; Ele é dito instável se ele não for estável. Ainda, ele é dito assintoticamente estável se é estável e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$.

Definição 4.12. Uma matriz A é dita matriz de estabilidade ou matriz de Hurwitz quando todos seus autovalores têm parte real negativa.

Teorema 4.13. Seja $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$, f um campo tal que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e $x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considere o sistema de ordem fracionário não linear

$$D_t^\eta x(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.43)$$

A origem desse sistema é localmente assintoticamente estável, se:

(i) $f(0) = 0$ e $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0$;

(ii) A é uma matriz de Hurwitz.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no Teorema 6 de Wang, Yang e Zhang (2016).

Teorema 4.14. Se $\mathcal{R}_0 > 1$, então o ponto de equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável. Assim sendo, o meme persiste.

Demonstração: Vamos analisar o ponto de equilíbrio endêmico $E = (0, I^*)$, onde $I^* = \left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right)$. Seja $X = I - I^* = I - \left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right)$. Como $I = X + \left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right)$, obtemos o novo sistema

$$D_t^\eta S = -\alpha \left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right) S - \alpha SX, \quad (4.44)$$

$$D_t^\eta X = (\alpha - \beta) \left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right) S - \beta \left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right) X + (\alpha - \beta) SX - \beta X^2.$$

Podemos escrever esse sistema na forma matricial

$$D_t^\eta \begin{bmatrix} S \\ X \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} S \\ X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha SX \\ (\alpha - \beta) SX - \beta X^2 \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha(N - \frac{\gamma}{\beta}) & 0 \\ (\alpha - \beta)(N - \frac{\gamma}{\beta}) & -\beta(N - \frac{\gamma}{\beta}) \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Podemos observar que A é uma matriz de Hurwitz, uma vez que seu traço é negativo e seu determinante positivo.

De fato,

$$\text{tr}(A) = -\alpha \left(N - \frac{\gamma}{\beta} \right) - \beta \left(N - \frac{\gamma}{\beta} \right) < 0, \quad (4.47)$$

e

$$\det(A) = \left[-\alpha \left(N - \frac{\gamma}{\beta} \right) \right] \cdot \left[-\beta \left(N - \frac{\gamma}{\beta} \right) \right] > 0. \quad (4.48)$$

Por outro lado,

$$f(S, X) = \begin{bmatrix} -\alpha SX \\ (\alpha - \beta)SX - \beta X^2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

satisfaz $f(0,0) = (0,0)$.

Resta mostrar que $\lim_{\|(S,X)\| \rightarrow 0} \frac{\|f(S,X)\|}{\|(S,X)\|} = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{\|(S,X)\| \rightarrow 0} \frac{\|f(S,X)\|}{\|(S,X)\|} &= \lim_{\|(S,X)\| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\alpha^2 S^2 X^2 + ((\alpha - \beta)SX - \beta X^2)^2}}{\sqrt{S^2 + X^2}} \\ &= \lim_{\|(S,X)\| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\alpha^2 S^2 X^2 + (\alpha - \beta)^2 S^2 X^2 - 2(\alpha - \beta)SX\beta X^2 + \beta^2 X^4}}{\sqrt{S^2 + X^2}} \\ &\leq \lim_{\|(S,X)\| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{X^2(\alpha^2 S^2 + (\alpha - \beta)^2 S^2 - 2(\alpha - \beta)SX\beta + \beta^2 X^2)}}{\sqrt{X^2}} \\ &= \lim_{\|(S,X)\| \rightarrow 0} \sqrt{\alpha^2 S^2 + (\alpha - \beta)^2 S^2 - 2(\alpha - \beta)SX\beta + \beta^2 X^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Logo, pelo Teorema 4.13, a origem do sistema (4.44) é localmente assintoticamente estável. Ou seja, o ponto $(S, X) = (0,0)$ é localmente assintoticamente estável. Como $X = I - I^*$, então quando $X = 0$ temos $I = I^*$. Portanto, o ponto de equilíbrio endêmico $(S, I) = (0, I^*) = \left(0, N - \frac{\gamma}{\beta} \right)$ é localmente assintoticamente estável. ■

4.2.2 Exemplos Numéricos da Estabilidade do Modelo

Nesta seção vamos mostrar numericamente a estabilidade dos pontos de equilíbrio livre da doença e endêmico. Para isso, foram tomados diferentes valores iniciais para o sistema, proporcionais ao valor total da população. Então, mostramos que os pontos de equilíbrio convergem de acordo com os resultados analíticos, conforme o valor de \mathcal{R}_0 , como odemos ver nas Figuras 2 - 13.

Vimos que se $\mathcal{R}_0 > 1$, então, quando $t \rightarrow \infty$, $S(t)$ se estabiliza em 0 e $I(t)$ em $\left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right)$. Por outro lado, se $\mathcal{R}_0 \leq 1$, então, quando $t \rightarrow \infty$, $I(t)$ se estabiliza em 0 e $S(t)$ em $(S^*, 0)$, para algum $S^* \in [0, S_0)$.

Então, foram tomados valores para os parâmetros para mostrar, numericamente, que, quando satisfazem as hipóteses acima, a convergência de fato se dá da forma analisada. Como $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$, então a taxa de infecção α e a ordem da derivada η não influenciam o valor de \mathcal{R}_0 . Assim, foram fixados $\alpha = 0,001$ e $\eta = 0,7$, apenas para acelerar a convergência. O valor total da população foi tomado como $N = 100$, pois será utilizado como escala posteriormente. E mais, consideramos que no tempo inicial da dinâmica não há, ainda, pessoas recuperadas e, então, $R_0 = 0$. Por fim, foram tomados valores para β e γ de forma que \mathcal{R}_0 seja como desejado.

Primeiramente, foi analisado o caso $\mathcal{R}_0 < 1$. Para isso, basta tomar, como exemplo, $\beta = 0,004$ e $\gamma = 0,8$. Então, é possível ver nas figuras abaixo os diferentes comportamentos das funções $S(t)$ e $I(t)$, conforme a variação dos valores iniciais do sistema com os parâmetros citados. Em todos os casos a convergência segue como esperada.

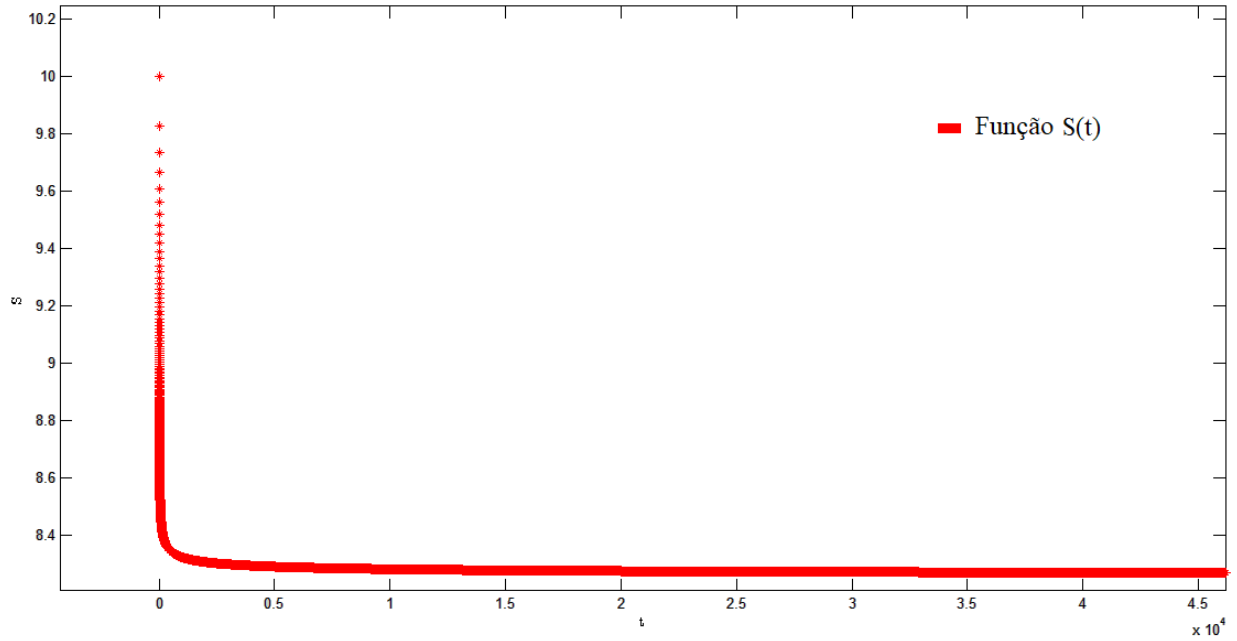


Figura 2 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (10,90)$. Podemos observar que a função se estabiliza em um valor próximo a 8,3.
 Fonte: Do autor.

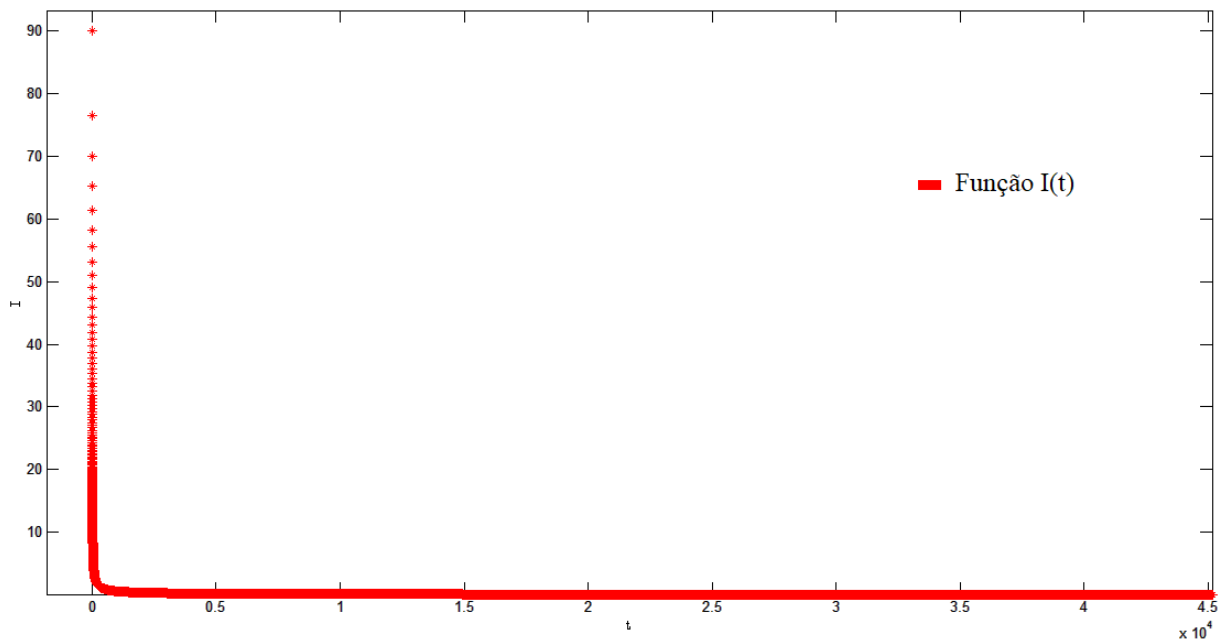


Figura 3 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (10,90)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.
 Fonte: Do autor.

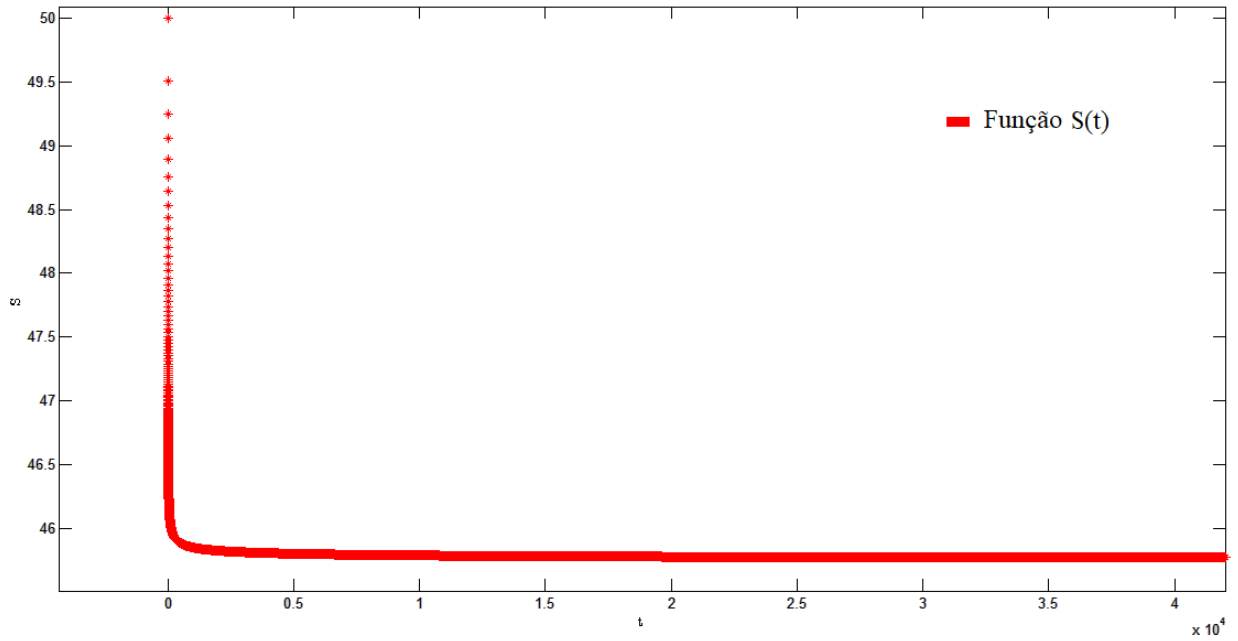


Figura 4 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (50,50)$. Podemos observar que a função se estabiliza em um valor próximo a 46.
Fonte: Do autor.

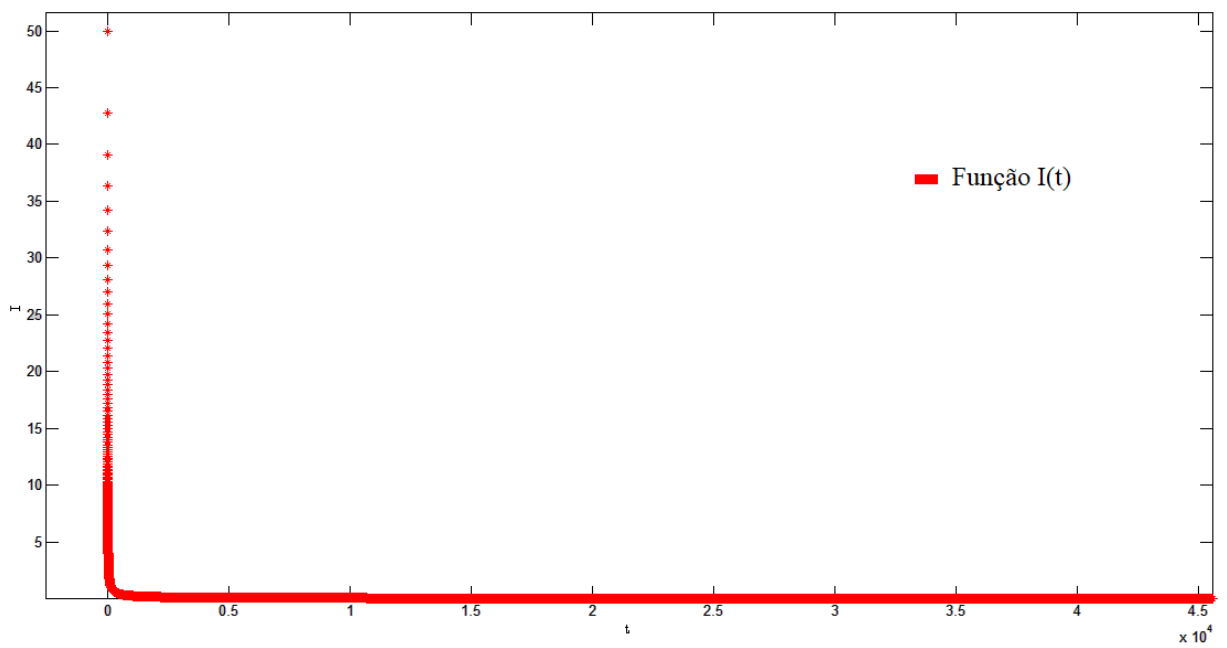


Figura 5 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (50,50)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.
Fonte: Do autor.

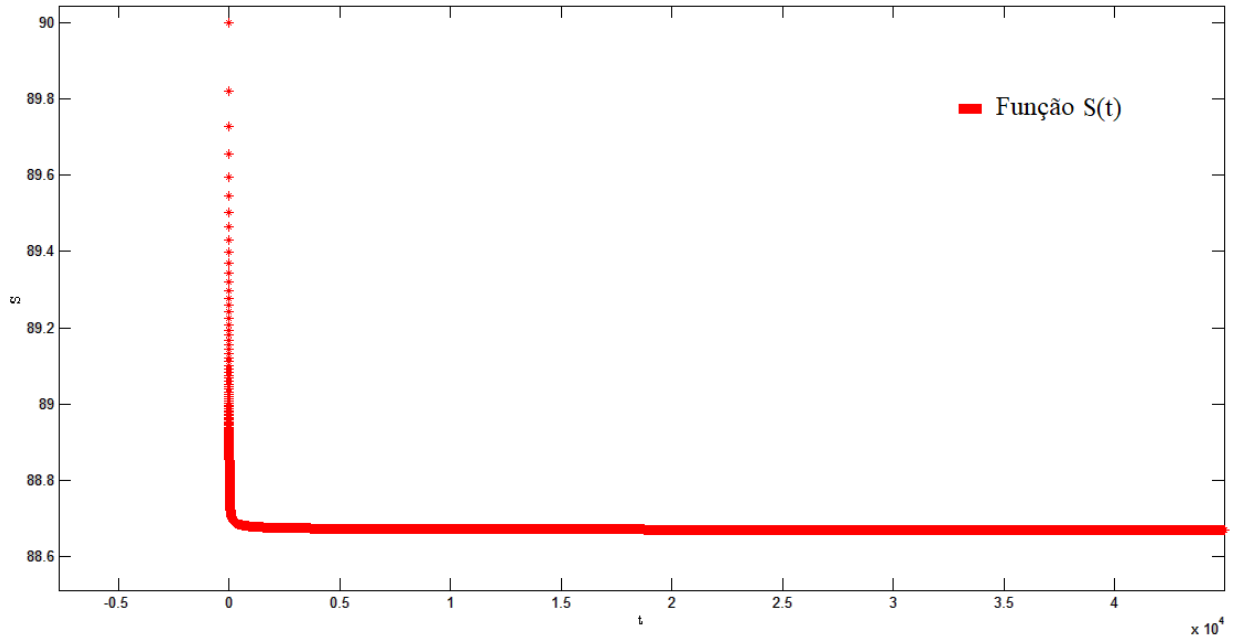


Figura 6 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (90,10)$. Podemos observar que a função se estabiliza em um valor próximo a 88,7.

Fonte: Do autor.

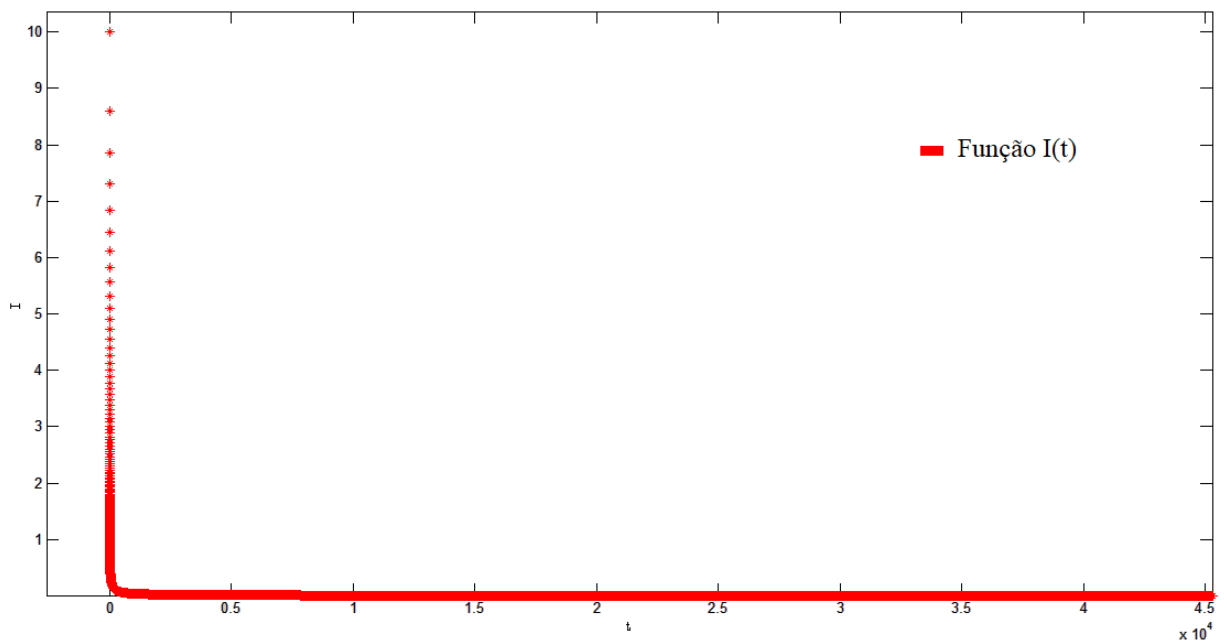


Figura 7 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (90,10)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.

Fonte: Do autor.

Em todos os casos acima, de fato temos $S(t)$ convergindo para S^* , onde $S^* \in [0, S_0)$, e $I(t)$ convergindo para 0. Também foi analisado o caso $\mathcal{R}_0 > 1$. Para isso, basta tomar $\beta = 0,04$ e $\gamma = 0,8$. Neste caso, o valor para o qual se espera que a função $I(t)$ convirja é dado por $N - \frac{\gamma}{\beta} = 80$. Daí,

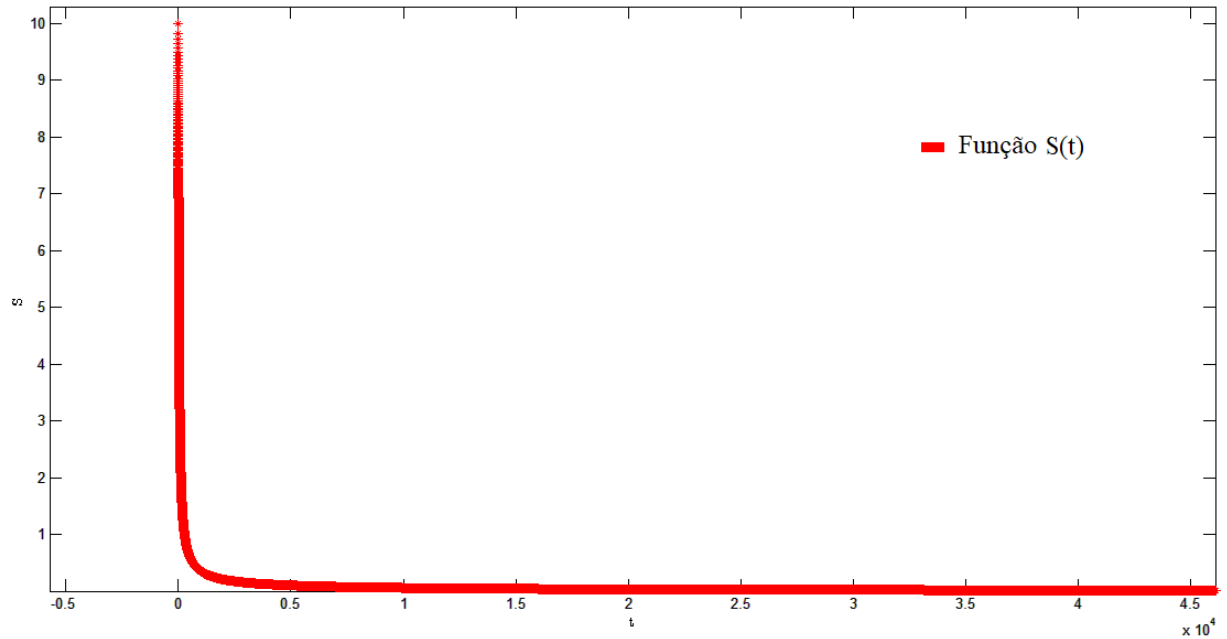


Figura 8 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S, I) = (10, 90)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.

Fonte: Do autor.

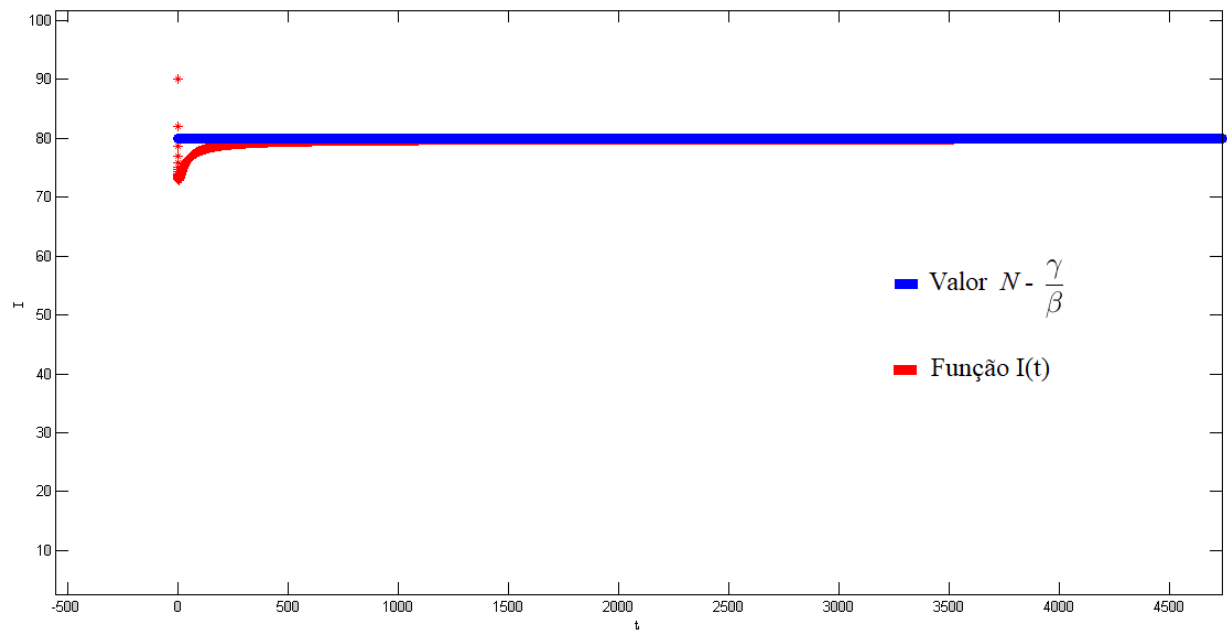


Figura 9 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S, I) = (10, 90)$. Podemos observar que a função se estabiliza em $N - \frac{\gamma}{\beta} = 80$.

Fonte: Do autor.

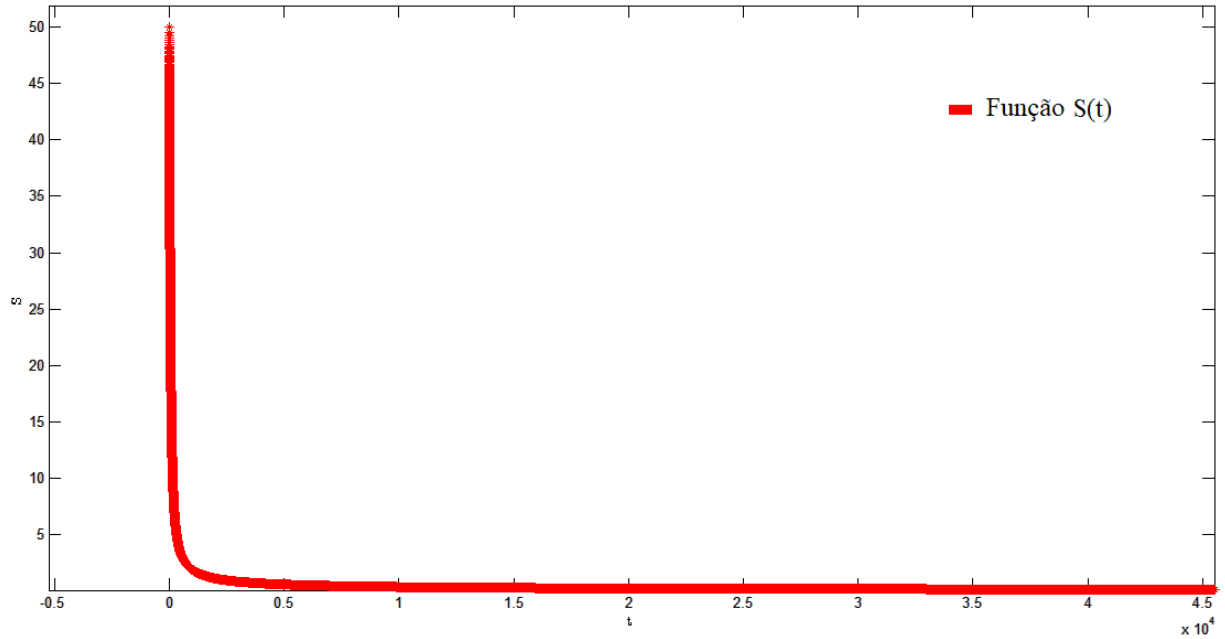


Figura 10 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (50,50)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.

Fonte: Do autor.

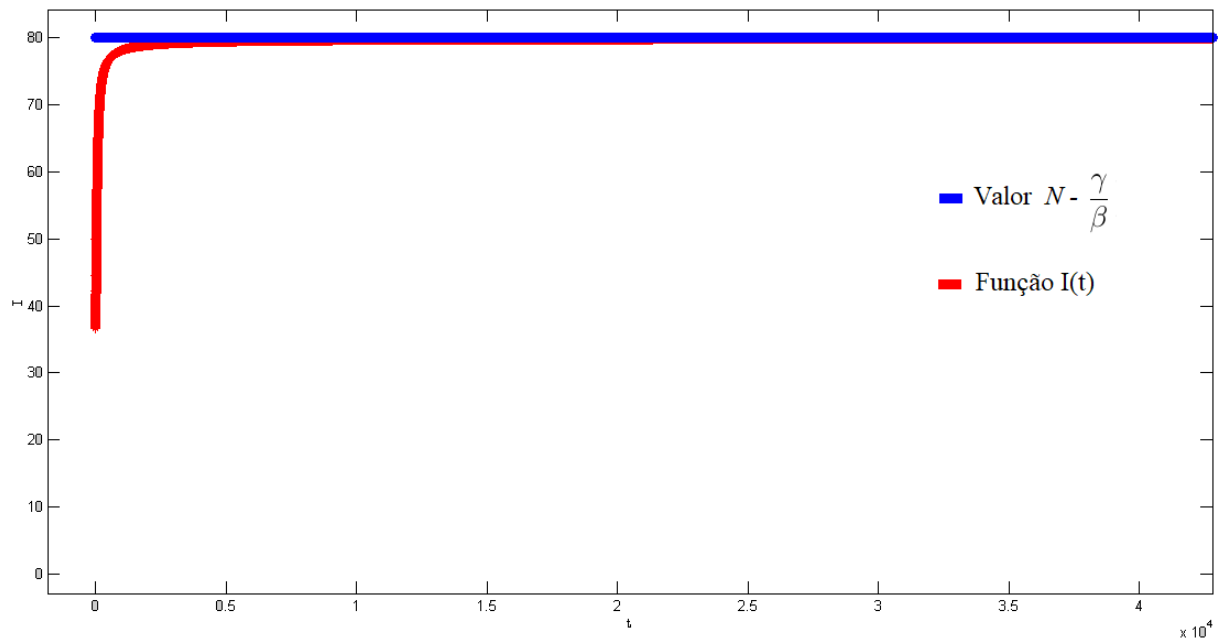


Figura 11 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S,I) = (50,50)$. Podemos observar que a função se estabiliza em $N - \frac{\gamma}{\beta} = 80$.

Fonte: Do autor.

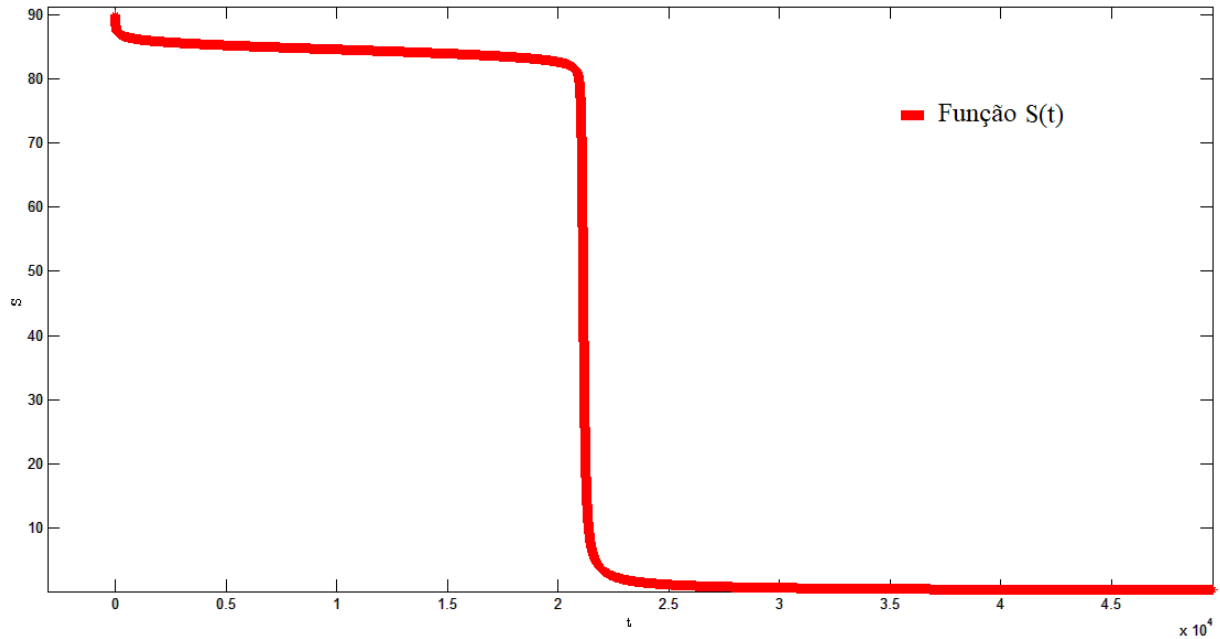


Figura 12 – Função de indivíduos suscetíveis ($S(t)$), com o dado inicial $(S, I) = (90, 10)$. Podemos observar que a função se estabiliza em 0.

Fonte: Do autor.

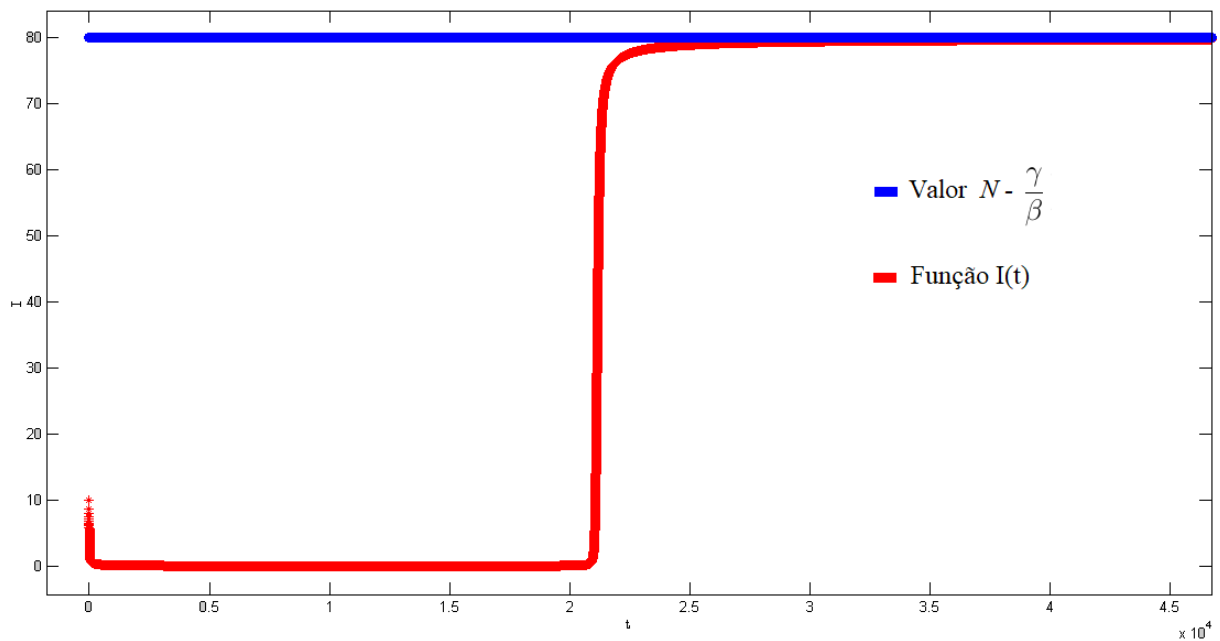


Figura 13 – Função de indivíduos infectados ($I(t)$), com o dado inicial $(S, I) = (90, 10)$. Podemos observar que a função se estabiliza em $N - \frac{\gamma}{\beta} = 80$.

Fonte: Do autor.

Em ambos os casos é possível ver que, de fato, $S(t)$ converge para 0 e $I(t)$ para $\left(N - \frac{\gamma}{\beta}\right)$, enquanto $N > \frac{\gamma}{\beta}$.

Sabendo-se o comportamento do modelo com memória, na próxima subseção ele será utilizado para uma aplicação numérica, onde é analisada sua eficácia e realizada uma comparação em relação ao modelo sem memória.

4.2.3 Ajuste de Parâmetro a Partir de Dados

Nesta seção iremos analisar o modelo epidemiológico (2.1), proposto por Wang e Wood (2011), em relação ao modelo fracionário (4.7), que trata do modelo original (2.1) após a inserção de memória.

Foi realizada uma comparação entre ambos os modelos. Para isso, foram feitas cinco simulações em relação à propagação de cinco memes. O primeiro trata de um site que se tornou temporariamente popular, "I Can Has Cheezburger". O segundo é constantemente procurado, "celular". O terceiro é um assunto hoje muito disseminado, porém foi analisado em uma época em que ainda estava começando a ganhar popularidade, "facebook". O quarto é referente a uma novela que, em sua época, ganhou grande popularidade, que, aos poucos, foi diminuindo e, logo após, aumentou novamente: "Avenida Brasil". Por fim, o último trata de um vídeo de uma briga entre duas garotas em uma escola, que também mostrou apenas um pico de popularidade na época de sua repercussão, "Já Acabou Jéssica?".

Para realizar tal comparação, primeiramente coletamos os dados observados utilizando a ferramenta Google Trends, que fornece o percentual de buscas realizadas sobre o meme estudado, pelos internautas, em relação ao tempo, no Google. Esse percentual se dá em relação ao maior número de pesquisas pelo meme no tempo estudado, por exemplo, se em determinado mês podemos observar que o maior número de pesquisas pelo meme foi k , em um dia específico, esse valor k se torna 100% e os demais valores de pesquisas pelo meme, no mês, podem também ser escritos como um percentual, de forma proporcional ao valor $k = 100\%$. E mais, é possível filtrar essa análise por tempo, por local (países e estados), por categoria (arte, negócios, literatura, entretenimento, etc.) e por fonte de busca, sendo essas fontes o Google Imagens, Google News, Google Shopping ou Youtube. Por fim, em relação a unidade de tempo, quanto menor é a restrição de tempo feita para analisar um meme, menor é a unidade, e vice-versa. Ou seja, se a análise do meme foi feita para um mês, os dados são obtidos por dia, mas se for feita por ano, os dados são obtidos por semana, e assim em diante.

As pessoas que procuraram pelo meme através do Google Trends foram consideradas pessoas infectadas, uma vez que apresentaram interesse por ele no tempo analisado. Desta forma, o que obtemos é a função real de infectados em relação ao tempo $I(t)$.

Então, para analisar a eficácia de cada modelo na descrição da propagação de um meme buscamos encontrar as funções de pessoas infectadas $I(t)$ fornecidas por eles e compará-los

com a função da vida real, obtida no Google Trends. Para encontrar as funções de infectados de cada modelo utilizamos um software para resolver os sistemas, com os valores dos parâmetros otimizados.

Para otimizar os valores dos parâmetros, primeiramente o software resolve o sistema desejado, de equações diferenciais ordinárias ou fracionárias, utilizando um valor inicial dado aos parâmetros do modelo. Logo após, calcula-se o erro, utilizando o método dos mínimos quadrados, entre a função encontrada no Google Trends e a função de infectados obtida no sistema de cada modelo. A fim de minimizar esse erro, o software utiliza o método simplex para, após um número determinado de iterações, encontrar os valores ótimos para os parâmetros.

Os valores iniciais dados aos parâmetros no processo de otimização são obtidos por aproximações, levando em consideração que a taxa de infecção α representa a inclinação inicial da curva, a taxa de reinfeção β e de recuperação γ influenciam na altura da “calda” à direita e a ordem da derivada η conduz, dentre algumas coisas, a velocidade do crescimento do número de infectados no tempo.

O valor de N foi considerado 100 em todos os casos, uma vez que nos dados observados trabalhamos com frequência, ou seja, o número de pesquisas encontrado com a ferramenta Google Trends é dado em porcentagem: a cada 100 pessoas. A partir desse valor é possível encontrar o valor inicial do Sistema de Equação Diferencial, sendo I_0 determinado pelo primeiro valor já observado de infectados, $S_0 = N - I_0$ e $R_0 = 0$.

Após encontrar as respectivas curvas de I otimizadas e obter os dados observados no Google Trends, foram calculados dois tipos de erro entre a curva real e as simuladas: o erro relativo (E_R) e o erro absoluto (E_A). Isso foi feito em relação a todos os memes. As fórmulas para calcular tais erros foram obtidas no trabalho de Jin et al. (2013) e seguem abaixo.

$$E_R = \frac{\|I(t) - obs(t)\|_2}{\|obs(t)\|_2} \quad \text{e} \quad E_A = \frac{\sum_{i=1}^n |I(t_i) - obs(t_i)|}{n}. \quad (4.51)$$

Abaixo podemos ver as tabelas contendo os valores dos erros de cada modelo nas devidas simulações.

Tabela 1 – Valores do erro relativo de cada modelo em cada simulação

	“I Can Has Cheezburger”	“Celular”	“Facebook”	“Avenida Brasil”	“Já Acabou Jéssica?”
Modelo Clássico	0,1852	0,0782	0,1542	0,4651	0,3782
Modelo com Memória	0,1800	0,0770	0,1542	0,4651	0,1601

Fonte: Do autor.

Tabela 2 – Valores do erro absoluto de cada modelo em cada simulação

	“I Can Has Cheezburger”	“Celular”	“Facebook”	“Avenida Brasil”	“Já Acabou Jéssica?”
Modelo Clássico	4,0944	5,5583	3,3872	9,1094	8,3732
Modelo com Memória	4,6449	5,4150	3,3727	9,1082	4,9524

Fonte: Do autor.

Podemos observar, nas tabelas 1 e 2, que o modelo com memória apresenta erros relativos sempre menores ou iguais aos erros relativos do modelo clássico. O mesmo ocorre em relação ao erro absoluto, com a exceção do meme “I Can Has Cheezburger”. Isto ocorre porque os parâmetros são otimizados pelo método dos mínimos quadrados, cuja equação é mais próxima da equação do erro relativo e apresenta certa diferença da equação do erro absoluto. Ao otimizarmos os parâmetros utilizando a fórmula do erro absoluto, o erro apresentado pelo modelo com memória foi menor do que o apresentado pelo modelo clássico. Não é possível que o modelo com memória apresente erro maior do que o modelo clássico, uma vez que o segundo pode ser obtido do primeiro quando $\eta = 1$.

Os valores dos erros relativos em relação aos memes “Facebook” e “Avenida Brasil” foram iguais para o modelo clássico e para o com memória, considerando quatro casas decimais. Se aumentarmos o número de casas decimais, podemos ver que em algum momento o modelo com memória apresenta erro menor, apesar de ser pouca a diferença.

Os gráficos obtidos dos modelos ajustados seguem abaixo, nas Figuras 14-18.

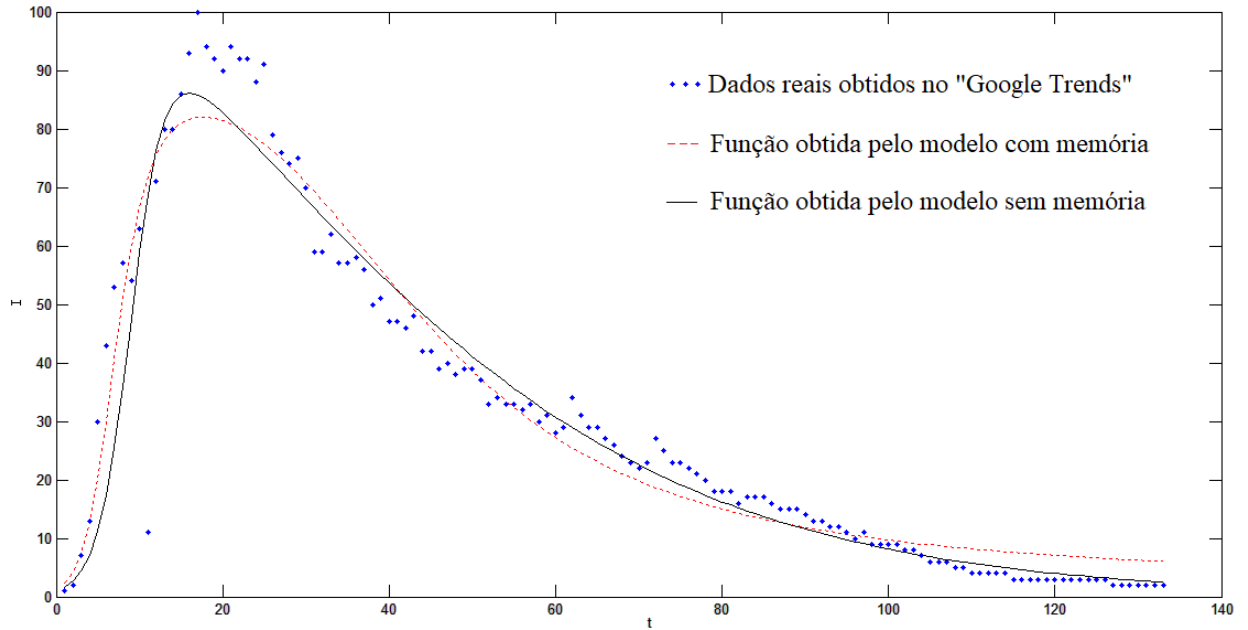


Figura 14 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “I Can Has Cheezburger”. Os dados foram tomados mensalmente, no período de janeiro de 2007 a dezembro de 2017.

Fonte: Do autor.

Podemos observar que ambos os modelos, com e sem memória, descrevem a propagação do meme relativamente bem, se tratando de um meme com apenas um pico de popularidade. No entanto, como podemos ver nas tabelas 1 e 2, o modelo com memória foi ainda mais eficaz em tal descrição.

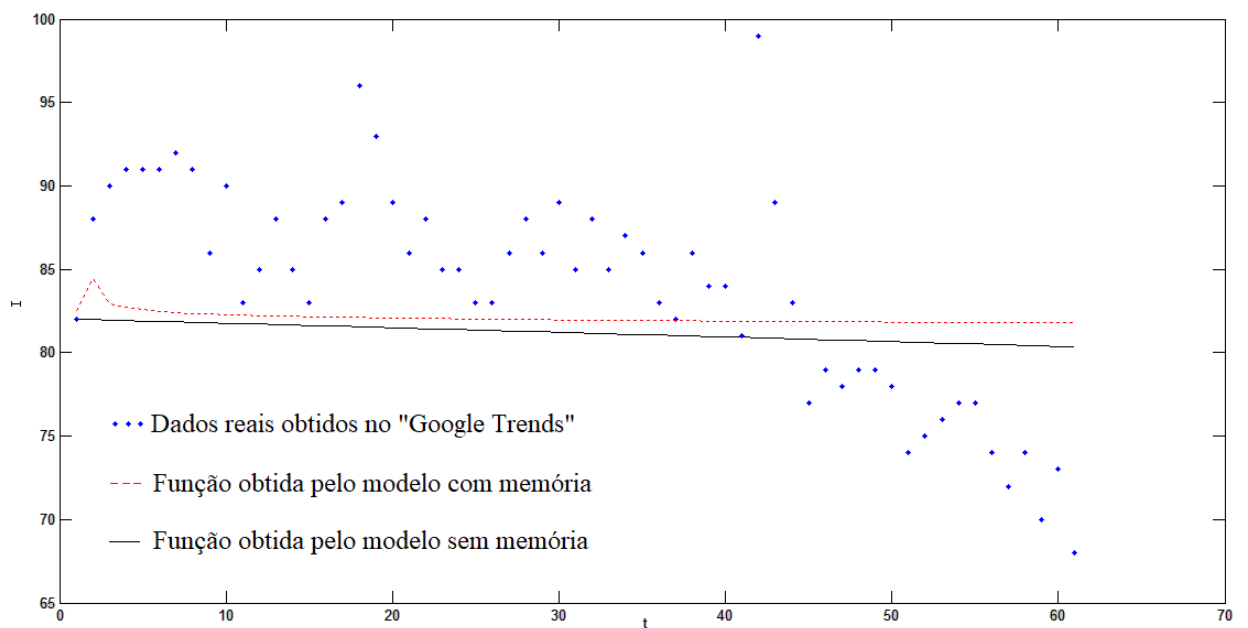


Figura 15 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “Celular”. Os dados foram tomados mensalmente, no período de fevereiro de 2013 a fevereiro de 2018.

Fonte: Do autor.

Para descrever a propagação desse meme, que possui vários picos de popularidade, ambos os modelos não foram eficazes. Porém, o modelo com memória ainda apresentou menor erro.

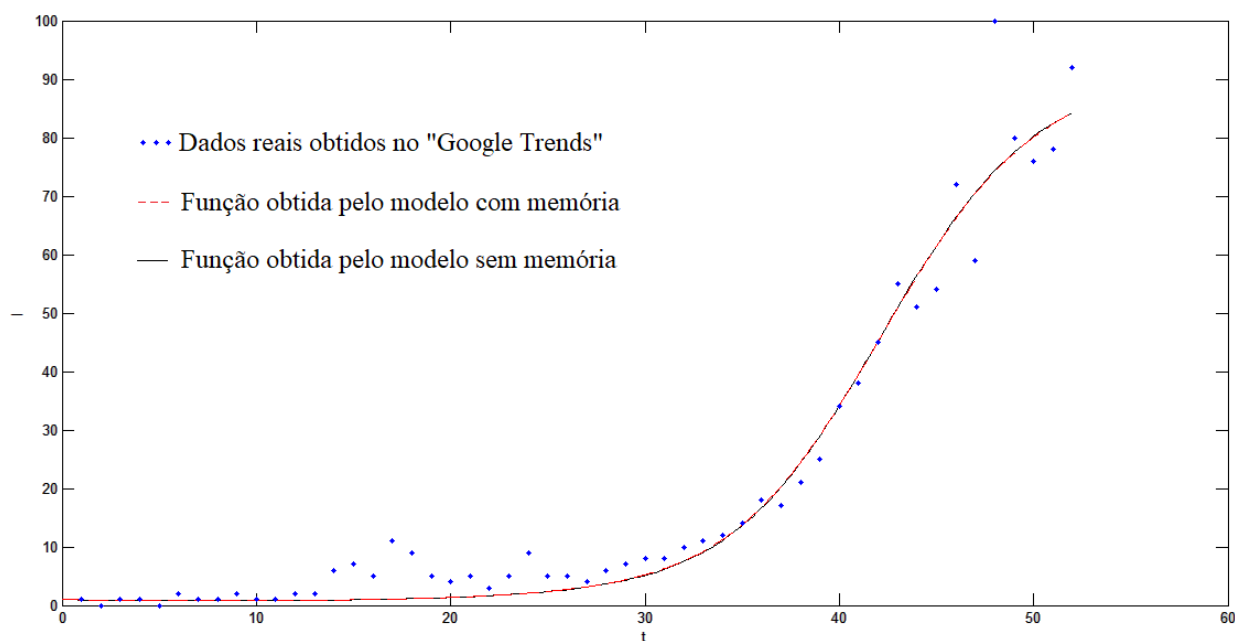


Figura 16 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “Facebook”. Os dados foram tomados semanalmente, no período de janeiro de 2004 a dezembro de 2004.

Fonte: Do autor.

O meme “facebook” foi analisado quando estava começando a se popularizar, apresentando um gráfico apenas crescente, o qual foi bem ajustado por ambos os modelos. Apesar de pouca diferença, vimos que o modelo com memória novamente se ajustou melhor.

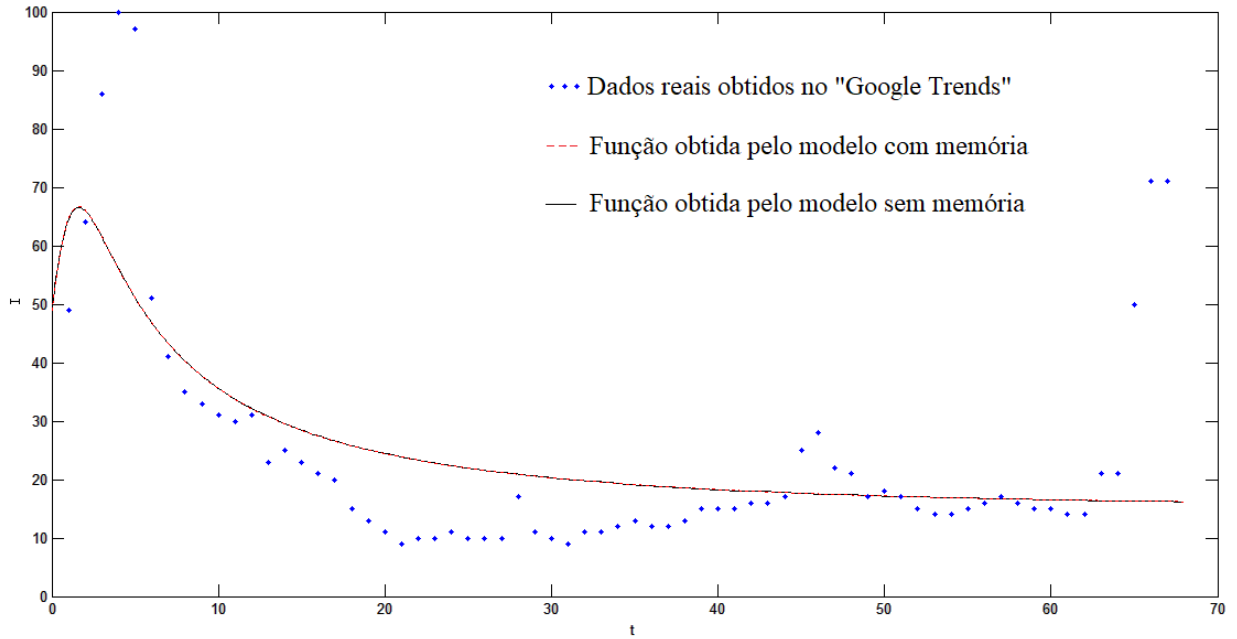


Figura 17 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “Avenida Brasil”. Os dados foram tomados semanalmente, no período de setembro de 2012 a dezembro de 2013.

Fonte: Do autor.

Novamente, temos uma situação em que o meme apresenta mais de um pico de popularidade e encontramos o mesmo problema: ambos os modelos descrevem curvas com apenas um pico. Para esse caso, como vimos, os erros calculados para cada modelo são também próximos, no entanto o modelo com memória apresentou erro menor.

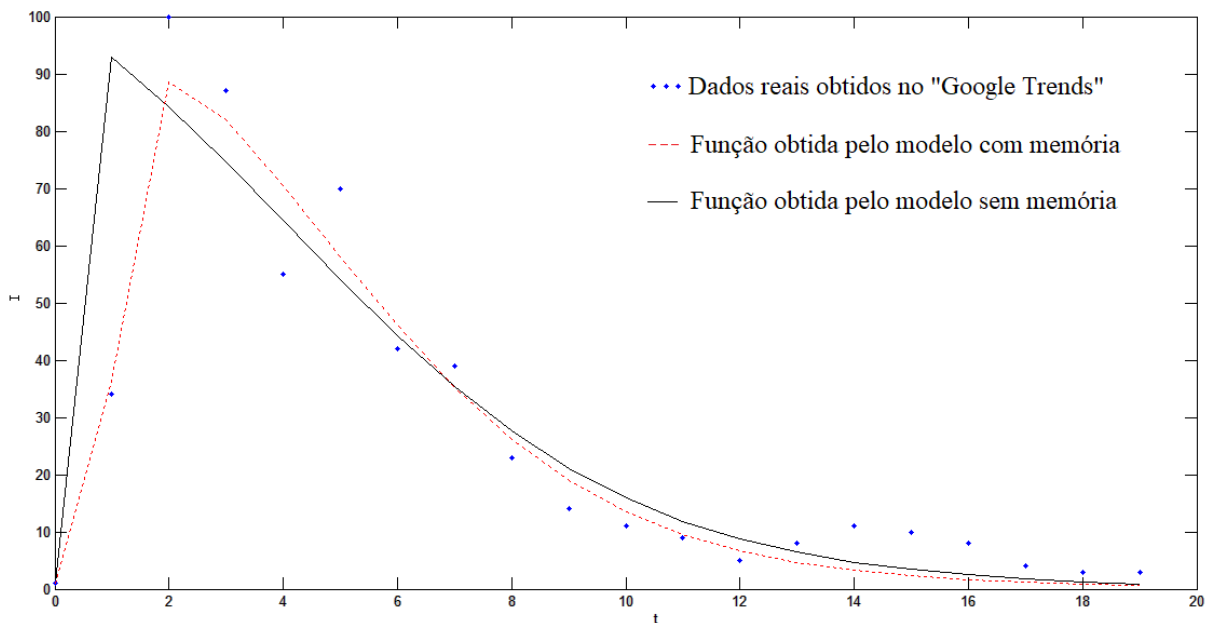


Figura 18 – Comparação do modelo com e sem memória, na análise da propagação de “Já Acabou Jéssica?”. Os dados foram tomados diariamente, no período de novembro de 2015 a dezembro de 2015.

Fonte: Do autor.

Confirmando a ideia descrita para o meme “I Can Has Cheezburger”, quando o meme apresenta apenas um pico de popularidade ambos os modelos apresentam boa precisão, sendo, novamente, o modelo com memória o melhor.

Segue, agora, uma tabela com os valores ótimos utilizados para cada parâmetro nas simulações feitas.

Tabela 3 – Valores das taxas utilizadas no modelo clássico em cada simulação

Modelo Clássico	α	β	γ	I_0
“I Can Has Cheezburger”	0,502607	0,499891	0,507523	1
“Celular”	0,499991	0,995484	0,455191	82
“Facebook”	0,002720	0,039681	0,341905	1
“Avenida Brasil”	0,013776	0,002798	0,236533	49
“Já acabou Jéssica?”	0,962840	0,498683	0,533528	1

Fonte: Do autor.

Tabela 4 – Valores das taxas utilizadas no modelo com memória em cada simulação

Modelo com Memória	α	β	γ	I_0	η
“I Can Has Cheezburger”	0,503493	0,499125	0,503763	1	0,741420
“Celular”	0,499991	0,567406	0,500391	82	0,588396
“Facebook”	0,002696	0,040415	0,339866	1	0,998349
“Avenida Brasil”	0,013973	0,002805	0,237068	49	0,999999
“Já acabou Jéssica?”	0,520243	0,498306	0,538576	1	0,985034

Fonte: Do autor.

Portanto, o modelo com memória se ajustou melhor aos dados. No entanto, com a ordem da derivada fracionária (η) variando entre 0 e 1, o modelo com memória apresenta um mesmo problema encontrado para o modelo clássico: ele não se comporta bem quanto a curvas com mais de um pico. Existe a possibilidade de que para outros valores de η esse problema seja resolvido, o que fica como sugestão para trabalhos futuros.

5 CONCLUSÃO

Iniciamos este trabalho estudando alguns conceitos importantes nos primeiros capítulos, em relação à memética, uma área atualmente inovadora, e em relação ao conteúdo do Cálculo Fracionário.

Após este estudo inicial, analisamos alguns modelos epidemiológicos citados por autores para modelar a propagação de memes e escolhemos o modelo de Wang e Wood (2011) para realizar introdução de memória, utilizando equações diferenciais de ordem fracionária, a fim de expandir os conceitos utilizados na memética e estabelecer novos teoremas. Com isso, foi possível analisar qualitativa e numericamente o novo modelo.

Quanto à análise de estabilidade, encontramos os pontos de equilíbrio do sistema e o valor de reprodução básica \mathcal{R}_0 , que determina o valor limiar para que o meme persista ou desapareça. Foi possível mostrar que o ponto de equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável e que, se $\alpha \geq \beta$ e $\frac{\alpha S_0}{\gamma} + \mathcal{R}_0 \leq 1$, ou se $\alpha < \beta$ e $\mathcal{R}_0 \leq 1$, o meme tende a desaparecer, enquanto que quando $\mathcal{R}_0 > 1$ o meme persiste e tende a se estabilizar no valor de $N - \frac{\gamma}{\beta}$, onde N é o valor total da população e α , γ e β são taxas do modelo, de infecção, recuperação e reinfeção, respectivamente. Isto também pôde ser visualizado numericamente.

Por fim, foi realizada uma aplicação, utilizando a ferramenta “Google Trends” para obter os dados reais da função de pessoas infectadas ($I(t)$) por diversos memes, no tempo. Então, otimizando os parâmetros pelo método dos mínimos quadrados e resolvendo os sistemas do modelo clássico e do modelo após introdução de memória, obtivemos as respectivas funções de pessoas infectadas. Com isso, foi possível calcular o erro entre ambas e os dados reais, observando que o modelo com memória se apresentou melhor para descrever a propagação de memes.

Concluimos que a utilização de sistemas com equações diferenciais fracionárias, com a ordem da derivada variando entre 0 e 1, é eficaz para modelar o comportamento de memes nos casos em que o meme apresenta apenas um pico de popularidade, ou seja, quando o gráfico de pessoas infectadas por esse meme não mostra mais de um pico.

Podemos concluir, também, que a introdução de memória através do cálculo fracionário melhora o modelo epidemiológico clássico, que tem sido muito usado na memética. Isto ocorre porque aumenta o número de possíveis funções de pessoas infectadas ($I(t)$) para cada modelo, uma vez que, ao resolvermos o sistema do modelo epidemiológico, podemos obter apenas uma

função $I(t)$, e, ao resolvermos o sistema do modelo com memória, podemos encontrar infinitas funções $I(t)$, uma para cada valor da derivada fracionária. E mais, se tomarmos a ordem da derivada igual a 1, recuperamos o modelo epidemiológico clássico. Isto quer dizer que, dentro das possibilidades de funções $I(t)$ que podemos obter do sistema fracionário, uma delas é a que obteríamos do sistema clássico. Portanto, se não for possível que o modelo com memória apresente um resultado melhor do que o do modelo clássico, ele deve apresentar um resultado igual. Logo, esperamos que este trabalho contribua para novas perspectivas de estudo, dentro da memética.

REFERÊNCIAS

- AL-TUWAIHQI, S. et al. Qualitative analysis of a rumor transmission model with incubation mechanism. **Open Access Library Journal**, v. 2, n. 11, p. 1-12, 2015.
- ALLPORT, G. W.; POSTMAN, L. J. **The psychology of rumor**. New York: Henry Holt, 1947. p. 135-158.
- ALMEIDA FILHO, N. Bases históricas da epidemiologia. **Cadernos de Saúde Pública**, Rio de Janeiro, v. 2, n. 3, 1986.
- ALMEIDA, L. M. **Heterogeneidades e intensidade de transmissão da infecção pelo vírus da hepatite A no município de Duque de Caxias**. 2002. 90f. Tese (Doutorado em Ciências) - Faculdade de Medicina, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- AMAKU, M. **Estudo de parâmetros epidemiológicos através de modelamento matemático: aspectos estacionários, espaciais e temporais**. 2001. 95f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- AOUNALLAH, T. et al. Algorithm on fuzzy adaptive backstepping control of fractional order for doubly-fed induction generators. **IET Renewable Power Generation**, v. 12, n. 8, p. 962-967, 2018.
- ARIS, R. **Mathematical modelling techniques**. New York: University of Minnesota, 1980.
- CAMACHO, N. A.; MERMOUD, M. A. D.; GALLEGOS, J. A. Lyapunov functions for fractional order systems. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.**, v. 19, p. 2951-2957, 2014.
- CAMARGO, R. F. **Cálculo fracionário e aplicações**. 2009. 135f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- CARDOSO, L. C. **Um modelo matemático para a doença da Babesiose Bovina e população de carrapatos usando derivadas fracionárias**. 2015. 87f. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2015.
- CARVALHO NETO, P. M. **Fractional Differential Equations: a novel study of local and global solutions in Banach Spaces**. 124f. Tese (Doutorado em Matemática), Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.
- CULLEN, B. Parasite ecology and the evolution of religion. In: HEYLIGHEN, F. (Ed.). **The**

evolution of complexity. Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

DALEY, D. J.; KENDALL, D. G. Epidemics and Rumours. **Nature**, v. 204, n. 4963, 1964.

DAWKINS, R. Viruses of the mind. In: BO, D. (Ed.). **Dennett and his critics: demystifying mind.** Cambridge: Blackwell, 1993.

DE PAULA, H. L. **Uma demonstração simples da fórmula integral de Cauchy.** 2014. 21f. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

DICKINSON, R. E.; PEARCE, C. E. M. Rumours, epidemics, and process of mass action: synthesis and analysis. **Mathematical and Computer Modelling**, n. 38, p. 1157-1167, 2003.

DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.; METZ, J. A. J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. **Journal of Mathematical Biology**, v. 28, p. 365-382, 1990.

DIETHELM, K. **The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.** [s.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.

DINÂMICA populacional de doenças infecciosas. Direção: Marcos Amaku. Produção: Marcos Amaku, 2012. Disponível em:
<<https://www.youtube.com/user/marcosamaku/videos>>. Acesso em: 30 maio 2017.

DOS SANTOS, L. M.; DE SOUZA, F. S. Uma análise do modelo SIR aplicado ao estudo da influenza A (H1N1). In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 34, 2012, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. p. 20- 23.

DU, M. et al. Measuring memory with the order of fractional derivative. **Scientific Reports**, v. 3, p. 3431, 2013.

FANG, C. Q. et al. Application of fractional calculus methods to viscoelastic response of amorphous shape memory polymers. **Journal of Mechanics**, v. 31, n. 4, p. 427-432, 2015.

FEDEWA, N. Spread of a rumor. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 25, p. 977-1002, 2013.

GOFFMAN, W.; NEWILL, V. A. Generalization of epidemic theory: an application to the transmission os ideas. **Nature**, v. 204, n. 4955, p. 225-228, 1964.

HEYMANS, N. Dynamic measurements in long-memory materials: fractional calculus evaluation of approach to steady state. **Journal of Vibration and Control**, v. 14, n. 10, p. 1587-1596, 2008.

HUO, L. A. et al . Analyzing the dynamics of a rumor transmission model with incubation.

Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012.

ISEA, R.; GARCÍA, R. M. Mathematical analysis of the spreading of a rumor among different subgroups of spreaders. **arXiv preprint arXiv:1607.05771**, , 2016.

JIANG, P. et al. A viral product diffusion model to forecast the market performance of products. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, 2017.

JIN, F. et al. Epidemiological modeling of news and rumors on twitter. WORKSHOP IN SOCIAL NETWORK MINING AND ANALYSIS, 7., 2013, Blacksburg. **Proceedings...** Blacksburg: ACM, 2013, p.8.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. v. 2.

KOSFELD, M. Rumours and markets. **Journal of Mathematical Economics**, n. 41, p. 646-664, 2005.

KUBO, M. et al. **The possibility of an epidemic meme analogy for web community population analysis**. In: Intelligent data engineering and automated learning. Berlin: Springer, 2007, p. 1073-1080.

LEÓN, C. V. Volterra-type Lyapunov functions for fractional-order epidemic systems. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 24, n. 1-3, p. 75-85, 2015.

LI, C.; MA, Y. Fractional dynamical system and its linearization theorem. **Nonlinear Dynamics**, v. 71, n. 4, p. 621-633, 2013.

LIN, W. Global existence theory and chaos control of fractional differential equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 332, n. 1, p. 709-726, 2007.

LOPEZ, L. F. et al. Threshold conditions for infection persistence in complex host-vectors interactions. **Comptes Rendus Biologies Journal**, n. 325, p. 1073-1084, 2002.

MAINARDI, F. **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity**. Bologna: World Scientific, 2010.

MARTCHEVA, M. **An introduction to mathematical epidemiology**. New York: Springer, 2015.

MASSAD, E. et al. Modelling the spread of memes: how inovations are transmitted from brain to brain. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 46, p. 2295-2306, 2013.

MASSAD, E. Modelagem. In: FORATTINI, O. (Ed.). **Epidemiologia geral**. 2. ed. São Paulo: Artes Médicas, 1996. p. 143-166.

MERMOUD, M. A. D. et al. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. **Communications in Nonlinear Science and**

Numerical Simulation, v. 22, n. 1-3, p. 650-659, 2015.

NOYMER, A. The transmission and persistence of “urban legends”: sociological application of age-structured epidemic models. **Working Paper**, v. 25, n. 3, p. 299-323, 2001.

NUNES, L. L. **Modelo de propagação de informações em redes sociais**. 2013. 64f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) - Centro Federal de Educação, Belo Horizonte, 2013.

ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. A. T. What is a fractional derivative? **Journal of Computational Physics**, p. 4-13, 2015.

PACHI, C. G. F. **Modelo matemático para o estudo da propagação de informações por campanhas educativas e rumores**. 2006. 96f. Tese (Doutorado em Ciências) - Faculdade de Medicina, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

PIQUEIRA, J. R. C. rumor propagation model: an equilibrium study. **Mathematical Problems in Engineering**, São Paulo, 2010.

RICHARD, H. **Fractional calculus: an introduction for physicists**. GigaHedron: World Scientific, 2014.

SAEEDIAN, M. et al. Memory effects on epidemic evolution: The susceptible-infected-recovered epidemic model. **Physical Review E**, v. 95, n. 2, p. 022409, 2017.

SARDAR, T. ET AL. A mathematical model of dengue transmission with memory. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 22, n. 3, p. 511-525, 2015.

SOTOMAYOR, J. **Equações diferenciais ordinárias**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

SPERRY, R. Mind, brain and humanist values. In: PLATT, J. R. (Ed.). **New views of the nature of man**. Chicago: University of Chicago Press, 1965.

TORQUATO, G. **Comunicação em tempos de crise: a psicologia do rumor**. [s.l.:s.n.], 2006.

VIEIRA, G. B. **Teoria qualitativa e estabilidade de Lyapunov para sistemas de equações de ordem fracionária e uma aplicação em um modelo SIR-SI para a dengue**. 2017. 118f. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) - Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2017.

WANG, L.; WOOD, B. C. An epidemiological approach to model the viral propagation of memes. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 11, p. 5442-5447, 2011.

WANG, Z.; YANG, D.; ZHANG, H. Stability analysis on a class of nonlinear fractional-order systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 86, n. 2, p. 1023-1033, 2016.

WU, C. **Stability and control of Caputo fractional order systems**. 2017. 114f. Tese (Doutorado em Filosofia em Matemática Aplicada) - University of Waterloo, Canada, 2017.

ZHOU, H. W.; YANG, S. Fractional derivative approach to non-Darcian flow in porous media. **Journal of Hydrology**, p. 910-918, 2018.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

APÊNDICE A - Demonstrações

Demonstração da Propriedade 3.2:

a)

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} dx \quad (\text{A.1})$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} x^{\alpha} dx \quad (\text{A.2})$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[[-x^{\alpha} e^{-x}] \Big|_0^b - \int_0^b -\alpha x^{\alpha-1} e^{-x} dx \right] \quad (\text{A.3})$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^b + \alpha \int_0^b e^{-x} x^{\alpha-1} dx \right] \quad (\text{A.4})$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-b^{\alpha} e^{-b} + 0 + \alpha \int_0^b e^{-x} x^{\alpha-1} dx \right]. \quad (\text{A.5})$$

Por um lema do cálculo, que pode ser encontrado no Lema 2.17, da página 50, de Sotomayor (2011), sabemos que $\lim_{b \rightarrow \infty} -b^{\alpha} e^{-b} = 0$, então

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (\text{A.6})$$

$$= \alpha \Gamma(\alpha). \quad (\text{A.7})$$

b)

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^0 dx \quad (\text{A.8})$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad (\text{A.9})$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx \quad (\text{A.10})$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-b} + e^0] \quad (\text{A.11})$$

$$= 0 + 1 \quad (\text{A.12})$$

$$= 1. \quad (\text{A.13})$$

c) Por indução, se $n = 0$, temos

$$\Gamma(n + 1) = \Gamma(1) \quad (\text{A.14})$$

$$= 1! \quad (\text{A.15})$$

$$= 0! \quad (\text{A.16})$$

$$= n!. \quad (\text{A.17})$$

Supondo-a válida para $n = k$,

$$\Gamma((k + 1) + 1) = \Gamma(k + 2) \quad (\text{A.18})$$

$$= (k + 1)\Gamma(k + 1) \quad (\text{A.19})$$

$$= (k + 1)k! \quad (\text{A.20})$$

$$= (k + 1)!. \quad (\text{A.21})$$

■

Demonstração do Teorema 3.4: Seja

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt \int_0^\infty e^{-u}u^{\beta-1}du. \quad (\text{A.22})$$

Tomando $t = x^2$ e $u = y^2$, temos $dt = 2x dx$ e $du = 2y dy$. Com efeito,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2(\alpha-1)}2x dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2(\beta-1)}2y dy \right) \quad (\text{A.23})$$

$$= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}dxdy \quad (\text{A.24})$$

$$= 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \int_0^r e^{-x^2-y^2}x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}dxdy. \quad (\text{A.25})$$

Sejam $R = \{(x,y) : r \geq 0, 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq r\}$ e B_1 e B_2 os primeiros quadrantes dos círculos inscritos e circunscritos, respectivamente, ao quadrado $0 \leq x \leq r$ e $0 \leq y \leq r$.

Seja $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}$, então

$$\int \int_{B_1} f(x,y)dxdy \leq \int \int_R f(x,y)dxdy \leq \int \int_{B_2} f(x,y)dxdy. \quad (\text{A.26})$$

Transformando-a em coordenadas polares, $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$. Desta forma, $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \rho$ e $dxdy = \rho d\rho d\theta$. Então,

$$\int \int_{B_1} f(x,y) dx dy = 4 \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)} (\rho \cos \theta)^{2\alpha-1} (\rho \sin \theta)^{2\beta-1} \rho d\rho d\theta \quad (A.27)$$

$$= 4 \int_0^r e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta)-1} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2\alpha-1} (\sin \theta)^{2\beta-1} d\theta. \quad (A.28)$$

Analogamente,

$$\int \int_{B_2} f(x,y) dx dy = 4 \int_0^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta)-1} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2\alpha-1} (\sin \theta)^{2\beta-1} d\theta. \quad (A.29)$$

Sendo

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2\alpha-1} (\sin \theta)^{2\beta-1} d\theta,$$

e tomando $w = \cos^2 \theta$, temos $dw = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta$. E mais, $\sin^2 \theta = 1 - w$. Então:

$$A = - \int_1^0 \frac{w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1}}{2} dw = \frac{1}{2} \int_0^1 w^{\alpha-1} (1-w)^{\beta-1} dw = \frac{1}{2} B(\alpha, \beta).$$

Agora seja:

$$C_1 = \int_0^r e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta)-1} d\rho = \int_0^r e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta-1)} \frac{2\rho}{2} d\rho$$

e, analogamente,

$$C_2 = \int_0^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2(\alpha+\beta-1)} \frac{2\rho}{2} d\rho.$$

Podemos observar que

$$\int \int_{B_1} f(x,y) dx dy = 4C_1 \cdot A,$$

e

$$\int \int_{B_2} f(x,y) dx dy = 4C_2 \cdot A.$$

Tomando $v = \rho^2$, temos $dv = 2\rho d\rho$. Assim,

$$C_1 = \frac{1}{2} \int_0^{r^2} e^{-v} v^{(\alpha+\beta)-1} dv$$

e

$$C_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2r^2} e^{-v} v^{(\alpha+\beta)-1} dv.$$

Quando $r \rightarrow \infty$,

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{(\alpha+\beta)-1} dv = \frac{1}{2} \Gamma(\alpha + \beta).$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \int_{B_1} f(x,y) dx dy = 4 \lim_{r \rightarrow \infty} C_1 \cdot A \quad (\text{A.30})$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} B(\alpha, \beta) \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\alpha + \beta) \quad (\text{A.31})$$

$$= B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta). \quad (\text{A.32})$$

E, analogamente,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int \int_{B_2} f(x,y) dx dy = B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta).$$

Como

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) = 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \int_0^r e^{-(x^2+y^2)} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} dx dy \quad (\text{A.33})$$

$$= 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \int \int_R e^{-(x^2+y^2)} x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} dx dy, \quad (\text{A.34})$$

por (A.26) temos

$$B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta) \leq \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \leq B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta).$$

Assim,

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) = B(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha + \beta). \quad (\text{A.35})$$

Portanto,

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad (\text{A.36})$$

onde $\alpha, \beta > 0$. ■

Demonstração da Proposição 3.6:

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt \right\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} f(t)\| dt \quad (\text{A.37})$$

$$\leq \int_0^t \|e^{-\lambda t} f(t)\| dt + \int_t^\infty \|e^{-\lambda t} f(t)\| dt \quad (\text{A.38})$$

Com efeito,

$$\int_0^t \|e^{-\lambda t} f(t)\| dt \leq \int_0^t \|e^{-\lambda t}\| \|f(t)\| dt. \quad (\text{A.39})$$

Como $\|e^{-\lambda t}\| \leq 1$ e f é do tipo exponencial, então

$$\int_0^t \|e^{-\lambda t} f(t)\| dt \leq \int_0^t \|f(t)\| dt \quad (\text{A.40})$$

$$< \infty. \quad (\text{A.41})$$

Por outro lado,

$$\int_t^\infty \|e^{-\lambda t} f(t)\| dt \leq \int_t^\infty e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} \|f(t)\| dt \quad (\text{A.42})$$

$$\leq \int_t^\infty e^{-\operatorname{Re}(\lambda)t} M e^{\gamma t} dt \quad (\text{A.43})$$

$$\leq \int_t^\infty e^{-(\operatorname{Re}(\lambda)-\gamma)t} M dt \quad (\text{A.44})$$

$$\leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_t^b e^{-(\operatorname{Re}(\lambda)-\gamma)t} M dt \quad (\text{A.45})$$

$$\leq \frac{M}{-(\operatorname{Re}(\lambda) - \gamma)} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-(\operatorname{Re}(\lambda)-\gamma)b} - e^{-(\operatorname{Re}(\lambda)-\gamma)t}] dt \quad (\text{A.46})$$

$$\leq \frac{M e^{-(\operatorname{Re}(\lambda)-\gamma)t}}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \gamma)} \quad (\text{A.47})$$

$$< \infty. \quad (\text{A.48})$$

Portanto,

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt \right\| < \infty,$$

o que garante a convergência da integral. ■

Demonstração do Teorema 3.11: Primeiramente iremos mostrar que a integral acima é finita.

$$\left\| \int_{H_a} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| \leq \left\| \int_{H_{a_1}} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| + \left\| \int_{H_{a_2}} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| - \left\| \int_{H_{a_3}} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\|.$$

Mostraremos que cada parte dessa soma é finita.

$$\left\| \int_{Ha_1} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| \leq \int_{Ha_1} \|\mu^{-z} e^\mu\| \|d\mu\|. \quad (\text{A.49})$$

Afirmção 1: $\|e^\mu\| = e^{Re(\mu)}$.

De fato, isso segue das propriedades de funções complexas.

Afirmção 2: $\|\mu^{-z}\| = \|\mu\|^{-Re(z)} e^{Im(z) \arg(\mu)}$.

De fato,

$$\mu^{-z} = e^{-z \log(\mu)} \quad (\text{A.50})$$

$$= e^{-[Re(z) + iIm(z)] \log(\mu)} \quad (\text{A.51})$$

$$= e^{-[Re(z) + iIm(z)] [\log \|\mu\| + i \arg(\mu)]} \quad (\text{A.52})$$

$$= e^{-Re(z) \log \|\mu\| + Im(z) \arg(\mu) + i[-Re(z) \arg(\mu) - Im(z) \log \|\mu\|]}. \quad (\text{A.53})$$

Assim,

$$\|\mu^{-z}\| = \|e^{-Re(z) \log \|\mu\| + Im(z) \arg(\mu) + i[-Re(z) \arg(\mu) - Im(z) \log \|\mu\|]}\| \quad (\text{A.54})$$

$$= e^{-Re(z) \log \|\mu\| + Im(z) \arg(\mu)} \quad (\text{A.55})$$

$$= \|\mu\|^{-Re(z)} e^{Im(z) \arg(\mu)}. \quad (\text{A.56})$$

Afirmção 3: $\|d\mu\| = dt$.

De fato, como $\mu = te^{i\theta}$, então

$$\|d\mu\| = \|e^{i\theta} dt\| \quad (\text{A.57})$$

$$= \|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) dt\| \quad (\text{A.58})$$

$$= (\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}) dt \quad (\text{A.59})$$

$$= dt. \quad (\text{A.60})$$

Afirmção 4: $Re(\mu) = t \cos(\theta)$.

Segue do fato de $\mu = t \cos(\theta) + it \sin(\theta)$.

De (A.49) e das afirmações anteriores, temos

$$\left\| \int_{Ha_1} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| \leq \int_{Ha_1} \|\mu\|^{-\operatorname{Re}(z)} e^{\operatorname{Im}(z) \arg(\mu) + \operatorname{Re}(\mu)} \|d\mu\| \quad (\text{A.61})$$

$$= \int_{\epsilon}^{\infty} t^{-\operatorname{Re}(z)} e^{\operatorname{Im}(z)\theta + t \cos(\theta)} dt \quad (\text{A.62})$$

$$= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{Im}(z)\theta}}{t^{\operatorname{Re}(z)}} e^{t \cos(\theta)} dt. \quad (\text{A.63})$$

Como $t > \epsilon$, temos $\frac{1}{t^{\operatorname{Re}(z)}} < \frac{1}{\epsilon^{\operatorname{Re}(z)}}$. Assim,

$$\left\| \int_{Ha_1} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| \leq \frac{e^{\operatorname{Im}(z)\theta}}{\epsilon^{\operatorname{Re}(z)}} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{t \cos(\theta)} dt \quad (\text{A.64})$$

$$= \frac{e^{\operatorname{Im}(z)\theta}}{\epsilon^{\operatorname{Re}(z)}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^b e^{t \cos(\theta)} dt \quad (\text{A.65})$$

$$= \frac{e^{\operatorname{Im}(z)\theta}}{\epsilon^{\operatorname{Re}(z)}} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{t \cos(\theta)}}{\cos(\theta)} \Big|_{\epsilon}^b \right) \right] \quad (\text{A.66})$$

$$= \frac{e^{\operatorname{Im}(z)\theta}}{\epsilon^{\operatorname{Re}(z) \cos(\theta)}} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} (e^{b \cos(\theta)} - e^{\epsilon \cos(\theta)}) \right] \quad (\text{A.67})$$

$$= \frac{-e^{\operatorname{Im}(z)\theta + \epsilon \cos(\theta)}}{\epsilon^{\operatorname{Re}(z) \cos(\theta)}} \quad (\text{A.68})$$

$$< \infty. \quad (\text{A.69})$$

De forma análoga, temos

$$\left\| \int_{Ha_2} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| < \infty. \quad (\text{A.70})$$

Por fim,

$$\left\| \int_{Ha_2} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| \leq \int_{Ha_2} \|\mu^{-z} e^\mu\| d\mu \quad (\text{A.71})$$

$$\leq \int_{Ha_2} \|\mu\|^{-\operatorname{Re}(z)} e^{\operatorname{Im}(z) \arg(\mu) + \operatorname{Re}(\mu)} \|d\mu\| \quad (\text{A.72})$$

$$\leq \int_{-\theta}^{\theta} \epsilon^{-\operatorname{Re}(z)} e^{\operatorname{Im}(z)t} e^{\epsilon \cos(\theta)} \epsilon dt \quad (\text{A.73})$$

$$\leq \epsilon^{1-\operatorname{Re}(z)} e^\epsilon \int_{-\theta}^{\theta} e^{\operatorname{Im}(z)t} dt \quad (\text{A.74})$$

$$\leq \epsilon^{1-\operatorname{Re}(z)} e^\epsilon \left[\frac{1}{\operatorname{Im}(z)} e^{\operatorname{Im}(z)t} \Big|_{-\theta}^{\theta} \right] \quad (\text{A.75})$$

$$\leq \frac{\epsilon^{1-\operatorname{Re}(z)} e^\epsilon}{\operatorname{Im}(z)} (e^{\operatorname{Im}(z)\theta} - e^{-\operatorname{Im}(z)\theta}) \quad (\text{A.76})$$

$$\leq \frac{\epsilon^{1-\operatorname{Re}(z)} e^{\epsilon + \operatorname{Im}(z)\theta}}{\operatorname{Im}(z)} \quad (\text{A.77})$$

$$< \infty. \quad (\text{A.78})$$

Logo, $\left\| \int_{Ha} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| < \infty$.

Agora iremos mostrar que integrar sobre o caminho de Hankel equivale a integrar sobre uma linha paralela ao eixo imaginário. Para isso, definamos $\eta_R = \beta_{1,R} - \beta_{2,R} - \beta_{3,R} + \beta_{4,R}$, onde

$$\begin{cases} \beta_{1,R} &= \{\gamma + it : t \in [-R, R]\}, \\ \beta_{2,R} &= \left\{ t + iR : t \in \left[\frac{R}{\operatorname{tg}(\theta)}, \gamma \right] \right\}, \\ \beta_{3,R} &= \left\{ z \in Ha : \|z\| \leq \frac{R}{\sin(\theta)} \right\}, \\ \beta_{4,R} &= \left\{ t - iR : t \in \left[\frac{R}{\operatorname{tg}(\theta)}, \gamma \right] \right\}. \end{cases}$$

Como η_R é um caminho fechado, pelo Teorema de Cauchy, que pode ser encontrado na página 19, de De Paula (2014), temos

$$\int_{\eta_R} \mu^{-z} e^\mu d\mu = 0.$$

Logo,

$$\int_{\beta_{1,R} - \beta_{2,R} - \beta_{3,R} + \beta_{4,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu = 0,$$

e

$$\int_{\beta_{1,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu - \int_{\beta_{2,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu - \int_{\beta_{3,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu + \int_{\beta_{4,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu = 0. \quad (\text{A.79})$$

Afirmação 5: $\int_{\beta_{2,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu \rightarrow 0$ e $\int_{\beta_{4,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu \rightarrow 0$, quando $R \rightarrow \infty$.

De fato,

$$\left\| \int_{\beta_{2,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| = \left\| \int_{\frac{R}{tg(\theta)}^\gamma} e^{-z \log(t+iR)} e^{(t+iR)} dt \right\| \quad (\text{A.80})$$

$$\leq \int_{\frac{R}{tg(\theta)}^\gamma} \left\| e^{-z \log(t+iR)} e^{(t+iR)} \right\| dt \quad (\text{A.81})$$

$$\leq \int_{\frac{R}{tg(\theta)}^\gamma} \left\| e^{-z \log \|t+iR\|} e^{-zi \arg(t+iR)} e^{(t+iR)} \right\| dt \quad (\text{A.82})$$

$$\leq \int_{\frac{R}{tg(\theta)}^\gamma} \left\| e^{-z \log(t^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-zi \arg(t+iR)} e^{(t+iR)} \right\| dt \quad (\text{A.83})$$

$$\leq \int_{\frac{R}{tg(\theta)}^\gamma} e^{-Re(z) \log(t^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} e^{Im(z) \arg(t+iR)} e^t dt \quad (\text{A.84})$$

$$\leq \int_{\frac{R}{tg(\theta)}^\gamma} e^t (t^2 + R^2)^{-\frac{Re(z)}{2}} e^{Im(z) \arg(t+iR)} dt \quad (\text{A.85})$$

$$\leq MR^{-Re(z)} \int_{\frac{R}{tg(\theta)}^\gamma} e^t dt \quad (\text{A.86})$$

$$\leq MR^{-Re(z)} \left[e^\gamma - e^{\frac{R}{tg(\theta)}} \right]. \quad (\text{A.87})$$

Logo, quando $R \rightarrow \infty$,

$$\left\| \int_{\beta_{2,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu \right\| \rightarrow 0.$$

Como os caminhos $\beta_{2,R}$ e $\beta_{4,R}$ são semelhantes, o mesmo ocorre em relação a $\int_{\beta_{4,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu$.

Então, pela equação (A.79), temos

$$\int_{\beta_{1,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu = \int_{\beta_{3,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu.$$

Pela definição dos caminhos, quando $R \rightarrow \infty$,

$$\int_{\beta_{1,R}} \mu^{-z} e^\mu d\mu = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mu^{-z} e^\mu d\mu,$$

e

$$\int_{\beta_{3,R}} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu = \int_{Ha} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu.$$

Então,

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu = \int_{Ha} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu.$$

Finalmente, se $t > 0$ é fixo e tomando $\mu = t\omega$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \mu^{-z} e^{\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \omega^{-z} t^{-z} e^{\omega t} t d\omega \quad (\text{A.88})$$

$$= \frac{t^{1-z}}{2\pi i} \int_{Ha} \omega^{-z} e^{\omega t} d\omega \quad (\text{A.89})$$

$$= \frac{t^{1-z}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \omega^{-z} e^{\omega t} d\omega \quad (\text{A.90})$$

$$= t^{1-z} \mathcal{L}^{-1} \{ \omega^{-z} \} (t) \quad (\text{A.91})$$

$$= \frac{1}{t^{z-1}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L} \left(\frac{t^{z-1}}{\Gamma(z)} \right) \right\} \quad (\text{A.92})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(z)}, \quad (\text{A.93})$$

que é verdade pelo exemplo 3.9, uma vez que

$$\mathcal{L} \{ t^{z-1} \} (w) = \Gamma(z) w^{-z} \quad \text{implica que} \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{t^{z-1}}{\Gamma(z)} \right\} (w) = w^{-z}.$$

■

Demonstração da Observação 3.13:

i)

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds. \quad (\text{A.94})$$

Tomando $u = t - s$, temos $du = -ds$, e

$$(f * g)(t) = - \int_t^0 f(u)g(t-u)du \quad (\text{A.95})$$

$$= \int_0^t g(t-u)f(u)du \quad (\text{A.96})$$

$$= (g * f)(t). \quad (\text{A.97})$$

ii)

$$((f * g) * h)(t) = \int_0^t (f * g)(t - s)h(s)ds \quad (\text{A.98})$$

$$= \int_0^t \int_0^{t-s} f(t - s - x)g(x)dx h(s)ds \quad (\text{A.99})$$

$$(\text{A.100})$$

Tomando $x = u - s$,

$$((f * g) * h)(t) = \int_0^t \int_s^t f(t - u)g(u - s)h(s)du ds \quad (\text{A.101})$$

$$= \int_0^t \int_0^u f(t - u)g(u - s)h(s)ds du \quad (\text{A.102})$$

$$= \int_0^t f(t - u) \int_0^u g(u - s)h(s)ds du \quad (\text{A.103})$$

$$= \int_0^t f(t - u)(g * h)(u)du \quad (\text{A.104})$$

$$= (f * (g * h))(t). \quad (\text{A.105})$$

■

Demonstração do Lema 3.14: Por hipótese, existem $t_1, t_2, M_1, M_2 > 0$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\|f(t)\| \leq M_1 e^{\gamma_1 t}, \quad t \geq t_1, \quad (\text{A.106})$$

$$\|g(t)\| \leq M_2 e^{\gamma_2 t}, \quad t \geq t_2. \quad (\text{A.107})$$

Tomando $t \geq t_1 + t_2$, temos

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - s)g(s)ds \quad (\text{A.108})$$

$$= \int_0^{t_2} f(t - s)g(s)ds + \int_{t_2}^{t-t_1} f(t - s)g(s)ds + \int_{t-t_1}^t f(t - s)g(s)ds \quad (\text{A.109})$$

Iremos analisar cada parcela da soma acima, sendo elas denominadas respectivamente (i), (ii) e (iii).

(i) Nesse caso, temos $0 \leq s \leq t_2$. Logo, $t_1 \leq t - s \leq t$. Portanto, podemos usar apenas a

equação (A.106).

$$\left\| \int_0^{t_2} f(t-s)g(s)ds \right\| \leq \int_0^{t_2} \|f(t-s)\| \|g(s)\| ds \quad (\text{A.110})$$

$$\leq \int_0^{t_2} M_1 e^{\gamma_1(t-s)} \|g(s)\| ds \quad (\text{A.111})$$

$$\leq M_1 \int_0^{t_2} e^{-\gamma_1 s} \|g(s)\| ds e^{\gamma_1 t} \quad (\text{A.112})$$

$$\leq M_1 \left[\max_{s \in [0, t_2]} (e^{-\gamma_1 s}) \right] \int_0^{t_2} \|g(s)\| ds e^{\gamma_1 t} \quad (\text{A.113})$$

$$\leq K_1 e^{\gamma_1 t}. \quad (\text{A.114})$$

(ii) Agora, $t_2 \leq s \leq t - t_1$ e, então, $t_1 \leq t - s \leq t - t_2$. Logo, podemos usar (A.106) e (A.107).

Consideremos $\gamma_2 - \gamma_1 > 0$. O caso $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$ é análogo, e o caso $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ é direto.

$$\left\| \int_{t_2}^{t-t_1} f(t-s)g(s)ds \right\| \leq \int_{t_2}^{t-t_1} \|f(t-s)\| \|g(s)\| ds \quad (\text{A.115})$$

$$\leq \int_{t_2}^{t-t_1} M_1 e^{\gamma_1(t-s)} M_2 e^{\gamma_2(s)} ds \quad (\text{A.116})$$

$$\leq M_1 M_2 e^{\gamma_1 t} \int_{t_2}^{t-t_1} e^{(\gamma_2 - \gamma_1)s} ds \quad (\text{A.117})$$

$$\leq M_1 M_2 e^{\gamma_1 t} \left[\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{(\gamma_2 - \gamma_1)s} \right] \Big|_{t_2}^{t-t_1} \quad (\text{A.118})$$

$$\leq \frac{M_1 M_2 e^{\gamma_1 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} [e^{(\gamma_2 - \gamma_1)(t-t_1)} - e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t_2}] \quad (\text{A.119})$$

$$\leq \frac{M_1 M_2 e^{\gamma_1 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} [e^{(\gamma_2 - \gamma_1)(t-t_1)}] \quad (\text{A.120})$$

$$\leq \frac{M_1 M_2 e^{\gamma_1 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} [e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t} e^{-(\gamma_2 - \gamma_1)t_1}] \quad (\text{A.121})$$

$$\leq \frac{M_1 M_2 e^{\gamma_2 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-(\gamma_2 - \gamma_1)t_1} \quad (\text{A.122})$$

$$\leq \frac{M_1 M_2 e^{-(\gamma_2 - \gamma_1)t_1}}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{\gamma_2 t} \quad (\text{A.123})$$

$$\leq K_2 e^{\gamma_2 t}. \quad (\text{A.124})$$

(iii) Por fim, temos $t - t_1 \leq s \leq t$ e $0 \leq t - s \leq t_1$. Apenas podemos usar a equação (A.107).

$$\left\| \int_{t-t_1}^t f(t-s)g(s)ds \right\| \leq \int_{t-t_1}^t \|f(t-s)\| \|g(s)\| ds \quad (\text{A.125})$$

$$\leq \int_{t-t_1}^t \|f(t-s)\| M_2 e^{\gamma_2 s} ds \quad (\text{A.126})$$

$$\leq M_2 \int_{t-t_1}^t \|f(t-s)\| e^{\gamma_2 s} ds \quad (\text{A.127})$$

$$\leq M_2 \max \{e^{\gamma_2 t}, e^{\gamma_2 t} e^{-\gamma_2 t_1}\} \int_{t-t_1}^t \|f(t-s)\| ds \quad (\text{A.128})$$

$$\leq M_2 \max \{1, e^{-\gamma_2 t_1}\} e^{\gamma_2 t} \int_0^{t_1} \|f(u)\| du \quad (\text{A.129})$$

$$\leq \left[M_2 \max \{1, e^{-\gamma_2 t_1}\} \int_0^{t_1} \|f(u)\| du \right] e^{\gamma_2 t} \quad (\text{A.130})$$

$$\leq K_3 e^{\gamma_2 t} \quad (\text{A.131})$$

Basta tomar $K = \max \{K_1, K_2, K_3\}$ e $\gamma = \max \{\gamma_1, \gamma_2\}$ e, assim,

$$\|(f * g)(t)\| \leq K e^{\gamma t}, \quad t \geq t_1 + t_2. \quad \blacksquare$$

Demonstração do Teorema 3.15: Primeiramente denominaremos:

$\mathcal{L}[f] = F(s)$ e $\mathcal{L}[g] = G(s)$. Então,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta) d\eta \quad (\text{A.132})$$

$$= \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_0^\infty e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi) d\xi. \quad (\text{A.133})$$

Fixando-se o valor de η e tomando $\xi = t - \eta$, temos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\eta) d\eta \int_\eta^\infty e^{-st} f(t-\eta) dt \quad (\text{A.134})$$

$$= \int_0^\infty \int_\eta^\infty e^{-st} f(t-\eta) g(\eta) dt d\eta \quad (\text{A.135})$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-\eta) g(\eta) d\eta dt \quad (\text{A.136})$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-\eta) g(\eta) d\eta \right] dt \quad (\text{A.137})$$

$$= \mathcal{L}[(f * g)(t)]. \quad \blacksquare \quad (\text{A.138})$$

APÊNDICE B - Função de Mainardi

A função de Mainardi é obtida da função Wright, definida abaixo de forma semelhante à função de Mittag-Leffler.

Definição B.1 (Função Wright). Seja $\lambda > -1$ e $\mu \in \mathbb{C}$. A função Wright ($W_{\lambda,\mu}(z)$) é dada pela seguinte série, convergente em todo o plano complexo

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}.$$

A função de Mainardi é um caso particular da função do tipo Wright.

Definição B.2 (Função de Mainardi). Seja $\alpha \in (0,1)$, a função de Mainardi é dada por:

$$M_{\alpha}(z) = W_{-\alpha,1-\alpha}(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(1 - \alpha(n+1))}.$$

Proposição B.3. Sejam $\alpha \in (0,1)$, $-1 < r < \infty$, $\lambda > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. A função de Mainardi apresenta as propriedades abaixo.

- i) $\int_0^{\infty} t^r M_{\alpha}(t) dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r + 1)}$;
- ii) $\mathcal{L} \{ \alpha t M_{\alpha}(t) \} (z) = E_{\alpha,\alpha}(-z)$;
- iii) $\mathcal{L} \{ M_{\alpha}(t) \} (z) = E_{\alpha}(-z)$;
- iv) $\mathcal{L} \{ \alpha t^{-(1+\alpha)} M_{\alpha}(t^{-\alpha}) \} (\lambda) = e^{-\lambda^{\alpha}}$.

Demonstração:

Primeiramente observemos que a função de Mainardi possui uma representação integral,

$$M_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\alpha}} \frac{e^{\mu-t\mu^{\alpha}}}{\mu^{1-\alpha}} d\mu.$$

i)

$$\int_0^{\infty} t^r M_{\alpha}(t) dt = \int_0^{\infty} t^r \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\alpha}} \frac{e^{\mu-t\mu^{\alpha}}}{\mu^{1-\alpha}} d\mu \right] dt \quad (\text{B.139})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{\alpha}} e^{\mu} \left[\int_0^{\infty} t^r e^{-t\mu^{\alpha}} dt \right] \frac{d\mu}{\mu^{1-\alpha}}. \quad (\text{B.140})$$

Tomando $w = t\mu^\alpha$, temos $dw = \mu^\alpha dt$, e

$$\int_0^\infty t^r M_\alpha(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\mu \left[\int_0^\infty \left(\frac{w}{\mu^\alpha} \right)^r e^{-w} \frac{dw}{\mu^\alpha} \right] \frac{d\mu}{\mu^{1-\alpha}} \quad (\text{B.141})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\mu \left[\int_0^\infty w^r e^{-w} dw \right] \frac{1}{\mu^{\alpha r + \alpha}} \frac{d\mu}{\mu^{1-\alpha}} \quad (\text{B.142})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^\mu \Gamma(r+1) \frac{d\mu}{\mu^{\alpha r + 1}} \quad (\text{B.143})$$

$$= \Gamma(r+1) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\mu}{\mu^{\alpha r + 1}} d\mu \right] \quad (\text{B.144})$$

$$= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r + 1)}. \quad (\text{B.145})$$

ii)

$$\mathcal{L} \{ \alpha t M_\alpha(t) \} (z) = \int_0^\infty e^{-zt} \alpha t M_\alpha(t) dt \quad (\text{B.146})$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-zt)^n}{n!} \alpha t M_\alpha(t) dt \quad (\text{B.147})$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n}{n!} t^{n+1} \alpha M_\alpha(t) dt \quad (\text{B.148})$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n}{n!} \alpha \int_0^\infty t^{n+1} M_\alpha(t) dt \quad (\text{B.149})$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n}{n!} \alpha \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)}, \text{ pelo item (i)} \quad (\text{B.150})$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n \alpha(n+1)}{\Gamma(\alpha(n+1)+1)} \quad (\text{B.151})$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n \alpha(n+1)}{\alpha(n+1) \Gamma(\alpha(n+1))} \quad (\text{B.152})$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-z)^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} \quad (\text{B.153})$$

$$= E_{\alpha, \alpha}(-z). \quad (\text{B.154})$$

iii)

$$\mathcal{L}\{M_\alpha(t)\}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\mu-t\mu^\alpha}}{\mu^{1-\alpha}} d\mu \right] dt \quad (\text{B.155})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\mu}{\mu^{1-\alpha}} \left[\int_0^\infty e^{-t(z+\mu^\alpha)} dt \right] d\mu \quad (\text{B.156})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\mu}{\mu^{1-\alpha}} \left[\frac{-1}{z+\mu^\alpha} [0-1] \right] d\mu \quad (\text{B.157})$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\mu \mu^{\alpha-1}}{z+\mu^\alpha} d\mu \quad (\text{B.158})$$

$$= E_\alpha(-z). \quad (\text{B.159})$$

iv)

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\lambda^\alpha}\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{\alpha n}\}}{n!} \quad (\text{B.160})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{-\alpha n-1}}{n! \Gamma(-\alpha n)} \quad (\text{B.161})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{-\alpha(n+1)-1}}{(n+1)! \Gamma(-\alpha(n+1))} \quad (\text{B.162})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(-1)^n t^{-\alpha(n+1)-1}}{-\alpha(n+1)n! \Gamma(-\alpha(n+1))} \quad (\text{B.163})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(-1)^n t^{-\alpha(n+1)-1}}{n! \Gamma(1-\alpha(n+1))} \quad (\text{B.164})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(-1)^n t^{-\alpha n} t^{-(\alpha+1)}}{n! \Gamma(1-\alpha(n+1))} \quad (\text{B.165})$$

$$= \alpha t^{-(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^{-\alpha})^n}{n! \Gamma(1-\alpha(n+1))} \quad (\text{B.166})$$

$$= \alpha t^{-(\alpha+1)} M_\alpha(t^{-\alpha}). \quad (\text{B.167})$$

■