

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS**

**RENATA RIBEIRO**

**UM ESTUDO DAS DOENÇAS BRUCELOSE E BABESIOSE BOVINA COM  
POPULAÇÃO NÃO CONSTANTE**

Alfenas/MG

2017

**RENATA RIBEIRO**

**UM ESTUDO DAS DOENÇAS BRUCELOSE E BABESIOSE BOVINA COM  
POPULAÇÃO NÃO CONSTANTE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, área de concentração em Estatística Aplicada e Biometria da Universidade Federal de Alfenas, MG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre. Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada e Modelagem Matemática.  
Orientador: Prof. Dr. Evandro Monteiro.

Alfenas/MG

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Alfenas

Ribeiro, Renata.

Um estudo das doenças Brucelose e Babesiose bovina com população não constante / Renata Ribeiro. -- Alfenas/MG, 2017.  
122 f.

Orientador: Evandro Monteiro.

Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) -  
Universidade Federal de Alfenas, 2017.

Bibliografia.

1. Equações diferenciais ordinarias. 2. Modelos Matemáticos.  
3. Epidemiologia. 4. Babesiose. I. Monteiro, Evandro. II. Título.

CDD-519



**RENATA RIBEIRO**

**“UM ESTUDO DAS DOENÇAS BRUCELOSE E BABESIOSE BOVINA COM  
POPULAÇÃO NÃO CONSTANTE”**

A Banca Examinadora, abaixo assinada, aprova a  
Dissertação apresentada como parte dos requisitos para  
a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada  
e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas.  
Área de Concentração: Estatística Aplicada e  
Biometria

Aprovado em: 23 de fevereiro de 2017.

Prof. Dr. Evandro Monteiro  
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos  
Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira  
Instituição: UNICAMP

Assinatura: \_\_\_\_\_

*Dedico aos meus pais, Tadeu e  
Luiza, e em memória do meu amigo  
Felipe Vieira.*

## RESUMO

A pecuária exerce uma grande relevância na economia brasileira. É uma atividade econômica desenvolvida em áreas rurais que consiste na criação de gado com o objetivo de comercializá-los, suprindo assim as necessidades do criador. Várias doenças podem afetar a pecuária, dentre estas se destacam as doenças infecciosas Babesiose e Brucelose, ambas bovinas. Sendo assim, há preocupação com o controle dessas doenças devido a importância da pecuária para a economia. Assim pesquisadores começaram a utilizar a modelagem matemática para descrever a dinâmica dessas doenças, afim de buscar o controle das mesmas. O objetivo desse trabalho é generalizar o modelo para Babesiose que envolve equações diferenciais ordinárias, utilizando a população de carrapatos não constante. Para isso é utilizada a Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias. Propomos dois modelos com população de carrapatos não constante e foram exibidos os pontos de equilíbrio, razão de reprodução básica e a análise de estabilidade. Também foi realizado a simulação numérica dos modelos estudados exibindo gráficos para analisar o comportamento das populações ao longo do tempo.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Modelos Matemáticos. Epidemiologia.  
Babesiose.

## ABSTRACT

Livestock farming has a great relevance in the Brazilian economy. It is an economic activity developed in rural areas that consists of the cattle raising with the purpose of commercializing them, thus supplying the needs of the breeder. Several diseases can affect livestock, among them the infectious diseases Babesiosis and Brucellosis, both bovines. Therefore, there is concern about the control of these diseases due to the importance of cattle raising for the economy. Thus researchers began to use mathematical modeling to describe the dynamics of these diseases, in order to seek their control. The objective of this work is to generalize the model for Babesiosis that involves ordinary differences equations, using the non constant population of ticks. For this, the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations is used. We developed two models with non constant population of ticks and showed the equilibrium points, basic reproduction ratio and stability analysis. Also the numerical simulation of the studied models was carried out displaying graphs to analyze the behavior of the populations over time.

Key-words: Ordinary Differential Equations. Mathematical Models. Epidemiology.  
Babesiosis.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Parâmetros para simulação numérica da doença Brucelose com população de bovinos não constante . . . . .	47
Tabela 2 –	Parâmetros para simulação numérica da doença Babesiose bovina do modelo com população constante . . . . .	58
Tabela 3 –	Parâmetros para simulação numérica da doença Babesiose bovina do modelo exponencial . . . . .	76
Tabela 4 –	Parâmetros para simulação numérica da doença Babesiose bovina do modelo Lokta Volterra . . . . .	88
Tabela 5 –	Parâmetros para simulação numérica do Modelo Exponencial da doença Babesiose Bovina . . . . .	98
Tabela 6 –	Parâmetros para simulação numérica da doença Babesiose bovina do modelo Lokta Volterra . . . . .	111

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Ciclo Parasitário do Carrapato transmissor da doença Babesiose . . . .	24
Figura 2	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,12$ , $\beta_B = 0,05$ . . .	47
Figura 3	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,95$ , $\beta_B = 0,5$ . . . .	47
Figura 4	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,12$ , $\beta_B = 0,05$ . . .	47
Figura 5	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,95$ , $\beta_B = 0,5$ . . . .	47
Figura 6	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 3,3$ , $\beta_B = 1,8$ . . . .	48
Figura 7	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 10,7$ , $\beta_B = 5,8$ . . . .	48
Figura 8	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 3,3$ , $\beta_B = 1,8$ . . . .	48
Figura 9	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 10,7$ , $\beta_B = 5,8$ . . . .	48
Figura 10	– Estabilidade Ecológica $\beta_B = 0.00061$ , $\beta_C = 0.00048$ , $\alpha_B = 0.001$ . . .	59
Figura 11	– Dinâmica quando $\lambda_B = 0.0265$ e $p = 0.5$ . . . . .	59
Figura 12	– Dinâmica quando $S_B(0) = 0,3756$ , $I_B(0) = 0.5184$ , $I_C(0) = 0.60$ . . .	60
Figura 13	– Dinâmica quando $S_B(0) = 0,70$ , $I_B(0) = 0.10$ , $I_C(0) = 0.20$ . . . . .	60
Figura 14	– Dinâmica da população de bovinos $R_0 = 0,01$ , $\beta_B = 0,000159$ , $\beta_C =$ 0,00009. . . . .	77
Figura 15	– Dinâmica da população de bovinos $R_0 = 48$ , $\beta_B = 0,007$ , $\beta_C = 0,0064$ . . . . .	77
Figura 16	– Dinâmica da população de bovinos $R_0 = 0,9$ , $\beta_B = 0,000999$ , $\beta_C =$ 0,000908. . . . .	77
Figura 17	– Dinâmica da população de bovinos $R_0 = 0,9$ , $\beta_B = 0,00108$ , $\beta_C =$ 0,000999. . . . .	77
Figura 18	– Dinâmica da população de carrapatos $R_0 = 0,01$ , $\beta_B = 0,000159$ , $\beta_C =$ 0,00009. . . . .	78
Figura 19	– Dinâmica da população de carrapatos $R_0 = 48$ , $\beta_B = 0,007$ , $\beta_C =$ 0,0064. . . . .	78
Figura 20	– Dinâmica da população de carrapatos $R_0 = 0,9$ , $\beta_B = 0,000999$ , $\beta_C =$ 0,000908. . . . .	78
Figura 21	– Dinâmica da população de carrapatos $R_0 = 1,1$ , $\beta_B = 0,00108$ , $\beta_C =$ 0,000999. . . . .	78
Figura 22	– Dinâmica das populações $R_0 = 0,01$ , $\beta_B = 0,000159$ , $\beta_C = 0,00009$ . . .	79
Figura 23	– Dinâmica das populações $R_0 = 48$ , $\beta_B = 0,007$ , $\beta_C = 0,0064$ . . . . .	79

Figura 24 – Dinâmica das populações quando $R_0 = 0,9, \beta_B = 0,000999, \beta_C = 0,000908$ . . . . .	79
Figura 25 – Dinâmica das populações $R_0 = 1,1, \beta_B = 0,00108, \beta_C = 0,000999$ . . . . .	79
Figura 26 – Dinâmica da população de bovinos $R_0 = 0,01, \beta_B = 0,0001, \beta_C = 0,00006$ . . . . .	89
Figura 27 – Dinâmica da população de bovinos $R_0 = 48, \beta_B = 0,005, \beta_C = 0,0041$ . . . . .	89
Figura 28 – Dinâmica da população de bovinos $R_0 = 0,9, \beta_B = 0,0007, \beta_C = 0,00051$ . . . . .	90
Figura 29 – Dinâmica da população de bovinos $R_0 = 1,1, \beta_B = 0,0008, \beta_C = 0,0006$ . . . . .	90
Figura 30 – Dinâmica da população de carrapatos $R_0 = 0,01, \beta_B = 0,0001, \beta_C = 0,00006$ . . . . .	90
Figura 31 – Dinâmica da população de carrapatos $R_0 = 48, \beta_B = 0,005, \beta_C = 0,0041$ . . . . .	90
Figura 32 – Dinâmica da população de carrapatos $R_0 = 0,9, \beta_B = 0,0007, \beta_C = 0,00057$ . . . . .	91
Figura 33 – Dinâmica da população de carrapatos $R_0 = 1,1, \beta_B = 0,0008, \beta_C = 0,0006$ . . . . .	91
Figura 34 – Dinâmica das duas populações de bovinos quando $R_0 = 0,01, \beta_B = 0,0001, \beta_C = 0,00006$ . . . . .	91
Figura 35 – Dinâmica das duas populações de bovinos quando $R_0 = 48, \beta_B = 0,005, \beta_C = 0,0041$ . . . . .	91
Figura 36 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9, \beta_B = 0,0007, \beta_C = 0,00057$ . . . . .	92
Figura 37 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1, \beta_B = 0,0008, \beta_C = 0,0006$ . . . . .	92
Figura 38 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,01, t = 200$ . . . . .	98
Figura 39 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,01, t = 1000$ . . . . .	98
Figura 40 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,01, t = 8000$ . . . . .	99
Figura 41 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,01, t = 30000$ . . . . .	99
Figura 42 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9, t = 200$ . . . . .	99
Figura 43 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9, t = 1000$ . . . . .	99

Figura 44	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 8000$ . . . . .	100
Figura 45	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 30000$ . . . . .	100
Figura 46	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 200000$ . . . . .	100
Figura 47	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 200$ . . . . .	101
Figura 48	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 1000$ . . . . .	101
Figura 49	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 8000$ . . . . .	101
Figura 50	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 30000$ . . . . .	101
Figura 51	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 200000$ . . . . .	101
Figura 52	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 48$ , $t = 200$ . . . . .	102
Figura 53	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 48$ , $t = 1000$ . . . . .	102
Figura 54	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 48$ , $t = 8000$ . . . . .	102
Figura 55	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 48$ , $t = 30000$ . . . . .	102
Figura 56	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,01$ , $t = 200$ . . . . .	103
Figura 57	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,01$ , $t = 1000$ . . . . .	103
Figura 58	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,01$ , $t = 8000$ . . . . .	103
Figura 59	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,01$ , $t = 30000$ . . . . .	103
Figura 60	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 200$ . . . . .	104
Figura 61	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 1000$ . . . . .	104
Figura 62	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 8000$ . . . . .	104
Figura 63	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 30000$ . . . . .	104
Figura 64	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 200000$ . . . . .	105
Figura 65	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 200$ . . . . .	105
Figura 66	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 1000$ . . . . .	105
Figura 67	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 8000$ . . . . .	106
Figura 68	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 30000$ . . . . .	106
Figura 69	– Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 200000$ . . . . .	106
Figura 70	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 48$ , $t = 200$ . . . . .	107
Figura 71	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 48$ , $t = 1000$ . . . . .	107
Figura 72	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 48$ , $t = 8000$ . . . . .	107
Figura 73	– Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 48$ , $t = 30000$ . . . . .	107
Figura 74	– Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,01$ , $t = 200$ . . . . .	107
Figura 75	– Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,01$ , $t = 1000$ . . . . .	107

Figura 76 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,01, t = 8000$ . . . . .	108
Figura 77 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,01, t = 30000$ . . . . .	108
Figura 78 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9, t = 200$ . . . . .	108
Figura 79 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9, t = 1000$ . . . . .	108
Figura 80 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9, t = 8000$ . . . . .	109
Figura 81 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9, t = 30000$ . . . . .	109
Figura 82 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1, t = 200$ . . . . .	109
Figura 83 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1, t = 1000$ . . . . .	109
Figura 84 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1, t = 8000$ . . . . .	110
Figura 85 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1, t = 30000$ . . . . .	110
Figura 86 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 48, t = 200$ . . . . .	110
Figura 87 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 48, t = 1000$ . . . . .	110
Figura 88 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 48, t = 8000$ . . . . .	110
Figura 89 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 48, t = 30000$ . . . . .	110
Figura 90 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,01, t = 200$ . . . . .	111
Figura 91 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,01, t = 1000$ . . . . .	111
Figura 92 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,01, t = 8000$ . . . . .	112
Figura 93 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,01, t = 30000$ . . . . .	112
Figura 94 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9, t = 200$ . . . . .	112
Figura 95 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9, t = 1000$ . . . . .	112
Figura 96 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9, t = 8000$ . . . . .	113
Figura 97 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9, t = 30000$ . . . . .	113
Figura 98 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 0,9, t = 200000$ . . . . .	113
Figura 99 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1, t = 200$ . . . . .	114
Figura 100 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1, t = 1000$ . . . . .	114
Figura 101 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1, t = 8000$ . . . . .	114
Figura 102 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1, t = 30000$ . . . . .	114
Figura 103 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 1,1, t = 200000$ . . . . .	114
Figura 104 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 48, t = 200$ . . . . .	115
Figura 105 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 48, t = 1000$ . . . . .	115
Figura 106 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 48, t = 8000$ . . . . .	115
Figura 107 – Dinâmica da população de bovinos quando $R_0 = 48, t = 30000$ . . . . .	115

Figura 108 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,01$ , $t = 200$ . . .	116
Figura 109 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,01$ , $t = 1000$ . . .	116
Figura 110 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,01$ , $t = 8000$ . . .	116
Figura 111 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,01$ , $t = 30000$ . . .	116
Figura 112 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 200$ . . . .	117
Figura 113 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 1000$ . . .	117
Figura 114 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 8000$ . . .	117
Figura 115 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 30000$ . . .	117
Figura 116 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 0,9$ , $t = 200000$ . . .	117
Figura 117 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 200$ . . . .	118
Figura 118 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 1000$ . . .	118
Figura 119 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 8000$ . . .	118
Figura 120 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 30000$ . . .	118
Figura 121 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 1,1$ , $t = 200000$ . . .	119
Figura 122 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 48$ , $t = 200$ . . . .	119
Figura 123 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 48$ , $t = 1000$ . . .	119
Figura 124 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 48$ , $t = 8000$ . . .	120
Figura 125 – Dinâmica da população de carrapatos quando $R_0 = 48$ , $t = 30000$ . . .	120
Figura 126 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,01$ , $t = 200$ . . . . .	120
Figura 127 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,01$ , $t = 1000$ . . . . .	120
Figura 128 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,01$ , $t = 8000$ . . . . .	120
Figura 129 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,01$ , $t = 30000$ . . . . .	120
Figura 130 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9$ , $t = 200$ . . . . .	121
Figura 131 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9$ , $t = 1000$ . . . . .	121
Figura 132 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9$ , $t = 8000$ . . . . .	121
Figura 133 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 0,9$ , $t = 30000$ . . . . .	121
Figura 134 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1$ , $t = 200$ . . . . .	121
Figura 135 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1$ , $t = 1000$ . . . . .	121
Figura 136 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1$ , $t = 8000$ . . . . .	122
Figura 137 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 1,1$ , $t = 30000$ . . . . .	122
Figura 138 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 48$ , $t = 200$ . . . . .	122
Figura 139 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 48$ , $t = 1000$ . . . . .	122

Figura 140 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 48, t = 8000$ . . . . .	122
Figura 141 – Dinâmica das duas populações quando $R_0 = 48, t = 30000$ . . . . .	122

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	16
2	<b>DOENÇAS BOVINAS</b>	19
2.1	BRUCELOSE	19
2.1.1	Transmissão	19
2.1.2	Epidemiologia	20
2.1.3	Patogenia	21
2.1.4	Sinais Clínicos	21
2.1.5	Diagnóstico	22
2.1.6	Controle	22
2.1.7	Tratamento	23
2.2	BABESIOSE	23
2.2.1	Transmissão	23
2.2.2	Epidemiologia	24
2.2.3	Patogenia	25
2.2.4	Sinais Clínicos	25
2.2.5	Diagnóstico	25
2.2.6	Controle	26
2.2.7	Tratamento	27
3	<b>TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS</b>	28
3.1	EXISTÊNCIA	28
3.2	ESTABILIDADE	31
4	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	37
4.1	MODELO BRUCELOSE	37
4.1.1	Pontos de Equilíbrio	40
4.1.2	Razão de Reprodução Básica	41
4.1.3	Análise de Estabilidade	42
4.1.4	Simulação Numérica	46
4.2	MODELO BABESIOSE	48
4.2.1	Pontos de Equilíbrio	55
4.2.2	Razão de Reprodução Básica	55
4.2.3	Análise de Estabilidade	56
4.3	Simulação Numérica	58
5	<b>MODELO BABESIOSE POPULAÇÃO NÃO CONSTANTE</b>	61
5.1	MODELO EXPONENCIAL	61
5.1.1	Pontos de Equilíbrio	68
5.1.2	Razão de Reprodução Básica	70
5.1.3	Análise de Estabilidade	72
5.1.4	Simulação Numérica	76
5.2	MODELO LOKTA-VOLTERRA	80
5.2.1	Pontos de Equilíbrio	83
5.2.2	Razão de Reprodução Básica	86
5.2.3	Análise de Estabilidade	87
5.2.4	Simulação Numérica	88
6	<b>RESULTADOS</b>	93

<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	94
<b>APÊNDICES</b> . . . . .	98

## 1 INTRODUÇÃO

A criação de gado bovino no Brasil é, de longe, a atividade econômica que ocupa a maior extensão de terras no país. Segundo o censo agropecuário de IBGE (2009), as áreas de pastagens ocupavam no país aproximadamente 158,7 milhões de hectares, enquanto as destinadas à lavoura totalizavam menos de 59,8 milhões de hectares.

O Brasil possui o segundo maior rebanho bovino do mundo, suplantado apenas pela Índia. Dado que a Índia não se utiliza de seu gado bovino para fins comerciais por questões religiosas, o rebanho bovino brasileiro é considerado o maior rebanho comercial do mundo. Entre 1990 e 2008, a produção de carne bovina mais que dobrou, passando de 4,1 para mais de 9,3 milhões de toneladas, com ritmo de crescimento bem superior ao de sua população e de seu consumo. Esta combinação de fatores permitiu que o Brasil se tornasse o maior exportador mundial, ultrapassando a Austrália, a partir de 2004 (SCHLESINGER, 2009).

A pecuária exerce uma grande relevância na economia brasileira. É uma atividade econômica desenvolvida em áreas rurais que consiste na criação de gado com o objetivo de comercializá-los, suprimindo assim as necessidades do criador. Além da carne, são extraídas outras matérias-primas, como o couro (produção de calçados), pele (vestuário), ossos (fabricar botões) e muitos outros. Entretanto, várias doenças podem afetar a pecuária, dentre estas se destacam as doenças infecciosas Babesiose e Brucelose, ambas bovinas.

As doenças infecciosas são doenças causadas por microorganismos estranhos ao organismo humano ou animal, como bactérias, vírus, fungos ou parasitas. Sua transmissão pode ser direta, de um indivíduo para o outro, ou indireta, através da mediação de um vetor, um hospedeiro intermediário, entre o indivíduo infectado e o suscetível.

Na história da humanidade, as doenças infecciosas são a causa maior do número de mortes na população humana e animal. E representam ainda importantes problemas médicos em todo o mundo por sua alta frequência e gravidade dos quadros que podem apresentar. Quando essas doenças ocorrem numa comunidade ou região e se espalham rapidamente, originam-se surtos epidêmicos.

Em consequência da alta frequência de doenças infecciosas inicializaram estudos com objetivo de especificar cada tipo de epidemia, definindo a causa, a transmissão e buscando formas de controle dessas doenças. Uma ferramenta que auxilia esse estudo é a modelagem matemática.

A Babesiose é uma importante doença parasitária que acomete animais domésticos, silvestres e inclusive o homem. O Gênero *Babesia* foi descoberto por Victor Babes, patologista romeno em 1888.

A ocorrência da Babesiose bovina está intimamente relacionada à distribuição do carrapato, *Ripicephalus*, que tem como hospedeiro o bovino e é considerado o único vetor biológico e responsável pela difusão desses protozoários nos rebanhos (ARANDA et al., 2012).

Brucelose é uma doença bacteriana infecciosa causada por membros do gênero *Brucella*. *Brucella* são parasitas que necessitam de um animal hospedeiro para sua manutenção. O trato digestivo é a mais importante porta de entrada da *Brucella abortus* ao ingerir água e alimentos contaminados. Porém o contato direto com as mucosas dos olhos e do nariz, pela inalação da bactéria a partir de fetos abortados ou resíduos placentários, também é uma importante forma de infecção.

Desde então há preocupação com o controle dessas doenças infecciosas devido a importância da pecuária para a economia. Assim pesquisadores começaram a utilizar a modelagem matemática para descrever a dinâmica dessas doenças, afim de buscar o controle das mesmas.

Neste trabalho, estudamos a dinâmica da transmissão da Babesiose Bovina utilizando um modelo compartimentado proposto por Aranda et al. (2012). Esse modelo inclui as classes de suscetível, infectado e recuperado para os bovinos e suscetível, infectado para os carrapatos. Além disso, a proposta principal do trabalho foi realizar modelos para Babesiose Bovina utilizando a população de carrapatos não constante, para isto tivemos como referência o trabalho Abatih et al. (2014) da doença Brucelose.

Este trabalho contém 5 seções dispostos da seguinte maneira. Na Seção 2 é apresentada as doenças bovinas Babesiose e Brucelose, ambas bem detalhadas comentando a transmissão, epidemiologia, patogenia, sinais clínicos, diagnóstico, controle e tratamento.

Na Seção 3, introduzimos alguns conceitos de teoria de equações diferenciais ordinárias que serão utilizado em todos os modelos estudados das doenças Babesiose e Brucelose.

Na Seção 4 foram estudadas as doenças Brucelose vista em Abatih et al. (2014) e Babesiose Bovinas vista em Aranda et al. (2012), foram exibidos os pontos de equilíbrio, razão de reprodução básica, e realizada a análise de estabilidade de ambas as doenças.

No Seção 5 propomos dois modelos generalizando o modelo proposto por Aranda et al. (2012) utilizando a população de carrapatos não constante, um modelo exponencial e um modelo utilizando Lokta-Volterra (HOFBAUER; SIGMUND, 1998). Para ambos os modelos

foram exibidos os pontos de equilíbrio, a razão de reprodução básica, realizado a análise de estabilidade e também feito simulação numérica afim de mostrar a dinâmica das populações ao longo do tempo.

## 2 DOENÇAS BOVINAS

Nesta seção vamos detalhar as doenças a serem estudadas Babesiose e Brucelose.

### 2.1 BRUCELOSE

Vamos apresentar sobre a transmissão, epidemiologia, diagnóstico, sinais clínicos, patogenicidade, controle e tratamento da doença Brucelose.

#### 2.1.1 Transmissão

A principal via de infecção de *Brucella abortus* no organismo é a oral, além do trato respiratório, conjuntivas, pele e trato genital (ACHA; SZYFRES, 2001).

Uma enorme quantidade de *B. abortus* é eliminada durante o aborto e parto de animais infectados. Estes animais continuam eliminando a bactéria nas secreções uterinas por aproximadamente 30 dias. Esta enorme quantidade de bactérias eliminadas durante o aborto ou parto dos animais infectados, associada à grande resistência de *B. abortus* no ambiente, é a principal fonte de infecção para os animais susceptíveis (CRAWFORD et al., 1990). Hábitos dos bovinos como lambar e cheirar animais recém nascidos, ou mesmo fetos abortados, principalmente por outras vacas, favorecem a transmissão da brucelose (CRAWFORD et al., 1990; NICOLETTI, 1980).

A participação dos machos na transmissão da brucelose pela monta natural é pequena, pois a vagina apresenta barreiras inespecíficas que dificultam a infecção (CAMPERO, 1993). Entretanto, na inseminação artificial, sêmen contaminado por *B. abortus* é altamente infeccioso por ser depositado diretamente no útero, onde não existem estas barreiras inespecíficas tornando-se um ambiente propício para multiplicação do agente (CAMPERO, 1993; CRAWFORD et al, 1990). Por outro lado, a transferência de embriões, desde que realizada conforme recomendações internacionais para lavagens, é uma técnica segura para o controle de brucelose e já foi empregada para aproveitamento de vacas de alta linhagem com sucesso (STRINGFELLOW; SEIDEL, 1999).

As bactérias do gênero *Brucella* também podem ser disseminadas entre os animais por fômites, destacando-se a água e alimentos contaminados (ACHA; SZYFRES, 2001). Este gênero sobrevive no ambiente, mas não se multiplicam nele. Possui ampla capacidade de sobrevivência, porém necessita de condições como presença de sombra, umidade, baixas temperaturas e pH neutro (PAULIN; FERREIRA, 2003).

Humanos normalmente se infectam pelo contato direto do agente com mucosas ou soluções de continuidade da pele, pela manipulação de tecidos, sangue, urina, secreções vaginais, fetos abortados e envoltórios fetais provenientes de animais infectados ou pela ingestão da bactéria em alimentos, geralmente de leite cru ou derivados lácteos não pasteurizados (queijos, manteigas, iogurtes, sorvetes) além de carnes cruas, mal assadas ou cozidas, obtidas de animais infectados (PAULIN; FERREIRA, 2003).

### **2.1.2 Epidemiologia**

A brucelose encontra-se mundialmente distribuída, sendo considerada uma das principais zoonoses. Embora tenha sido erradicada em diversos países da região norte e central da Europa, Austrália, Japão e Nova Zelândia, continua re-emergente e se apresentando como um grave problema sanitário e econômico, principalmente em países da América do Sul, África, Oriente Médio e Ásia (PAULIN; FERREIRA, 2003). No Brasil, a brucelose é endêmica, porém apresenta dados bastante diferenciados face à dimensão territorial e às características próprias de cada região (RIBEIRO et al., 2013)

*B. abortus* pode permanecer por longos períodos, seis meses ou mais, em material de aborto ou parto nas pastagens. A permanência destas bactérias no ambiente aumenta em determinadas condições como a presença de sombra, umidade e baixas temperaturas. Portanto, é recomendado que se procure deixar os locais com altas taxas de contaminação expostos ao sol, que é um potente germicida (WRAY, 1975).

### 2.1.3 Patogenia

A infecção por *B. abortus* se dá pelo contato do agente com qualquer mucosa do animal susceptível, principalmente a mucosa oral (THOEN et al., 1993). Após a penetração no organismo, há um curto período de bacteremia, e as bactérias vão se alojar em diversos órgãos, principalmente do sistema linfático (THOEN et al., 1993). A capacidade de sobreviver dentro de macrófagos facilita a disseminação e a permanência da *B. abortus* no organismo (GORVEL; MORENO, 2012). O curso da doença vai depender do estágio fisiológico do animal. Animais jovens, antes da puberdade, parecem ser mais resistentes à infecção. Caso o animal não esteja gestante, *B. abortus* geralmente infecta linfonodos e glândula mamária (CRAWFORD et al., 1990; NICOTELLI, 1980). Quando o animal se torna gestante, as bactérias atingem o útero, local pelo qual possuem grande tropismo, provocando, dessa forma, o aborto (SAMARTINO; ENRIGHT, 1993). Na primeira gestação após a infecção, o animal aborta; entretanto, o aborto é muito menos frequente na segunda gestação após infecção e muito raro a partir da terceira gestação após a infecção (CORBEL et al., 2006; THOEN et al., 1993). Isso se deve ao desenvolvimento de uma resposta imune, principalmente celular, pelos animais, que diminui a área e a intensidade das lesões. Com isso, a manifestação clínica passa a ser a presença de natimortos ou o nascimento de bezerros fracos (NICOTELLI, 1980; THOEN et al., 1993).

### 2.1.4 Sinais Clínicos

Os principais sinais clínicos observados nos animais infectados estão ligados a problemas reprodutivos (SILVA et al., 2005). O mais frequente é o aborto no terço final da gestação, natimortos e nascimento de bezerros fracos. Frequentemente, há retenção placentária e infertilidade temporária ou permanente (EAGLESOME; GARCIA, 1992; THOEN et al., 1993). Nos machos, a infecção por *B. abortus* pode causar orquite com conseqüente infertilidade por diminuição da qualidade espermática (CAMPERO, 1993). Lesões articulares, assim como lesões na glândula mamária também podem ser observadas em casos crônicos da doença. As lesões articulares caracterizam-se por bursite e artrite. Placentite necrótica é a principal lesão encontrada nos animais que abortam (THOEN et al., 1993; XAVIER et al., 2009). Não há nenhuma lesão patognomônica da doença no feto abortado, porém pleurite fibrinosa, que pode estar associada

à broncopneumonia supurativa e pericardite fibrinosa, ocorre com frequência (NICOLETTI, 1980; XAVIER et al., 2009).

### 2.1.5 Diagnóstico

A brucelose animal pode ser diagnosticada por diferentes métodos isoladamente ou em conjunto. Entre eles destacam-se o diagnóstico clínico, baseado nos sinais clínicos de aborto, nascimento de bezerras fracas e esterilidade de fêmeas e machos; dados epidemiológicos baseados na história dos rebanhos; isolamento e identificação do agente etiológico e ainda pela demonstração de anticorpos nos fluídos orgânicos (OLASCOAGA, 1976; POESTER et al., 2005). As observações clínicas e epidemiológicas proporcionam apenas uma indicação da provável presença da enfermidade num rebanho, o que deve ser confirmado pela identificação da bactéria que é o método mais seguro de diagnóstico. No entanto, a identificação da *B. abortus* é um processo lento, caro e de alto risco para o laboratorista, pois envolve a manipulação de placentas contaminadas, exsudatos vaginais, sêmen, tecidos de fetos abortados ou leite contaminado, que exige a observação de normas estritas de biossegurança (CHOSEWOOD; WILSON, 2007; CORBEL et al., 2006). Apesar disto, a identificação e a caracterização das espécies e biovariedades de *Brucella spp* presentes num rebanho ou região, são importantes do ponto de vista da epidemiologia da doença (EAGLESOME; GARCIA, 1992). A detecção de anticorpos no soro ou leite é o meio mais rápido, barato e menos laborioso de diagnóstico e é um indicativo confiável de resposta à exposição a *B. abortus* (OLASCOAGA, 1976; POESTER et al., 2005).

### 2.1.6 Controle

Em um programa de controle de uma doença infecciosa em uma propriedade, é necessário interromper a cadeia de transmissão pela eliminação dos indivíduos infectados ou aumentar o número de indivíduos resistentes da população. No caso da brucelose bovina, ambas as estratégias são utilizadas (CRAWFORD et al., 1990; NICOLETTI, 1980).

As estratégias de controle da brucelose têm como base a redução constante do número de focos da doença, além do controle do trânsito de animais de reprodução e a certificação de

propriedades livres da enfermidade por meio do diagnóstico, sacrifício dos animais positivos e a adoção de medidas ambientais (PAULIN; FERREIRA, 2003). A vacinação é empregada com o propósito de reduzir a prevalência da doença a baixos custos. Dentre as vacinas vivas mais utilizadas, a vacina B19 vem sendo amplamente empregada nos programas de controle da brucelose em diversos países, inclusive no Brasil (RIBEIRO, et. al, 2003).

### **2.1.7 Tratamento**

Como regra geral o tratamento do rebanho infectado não é feito em virtude da elevada taxa de falha no tratamento, do curso e dos potenciais problemas relacionados à manutenção de animais infectados frente aos programas de erradicação (HIRSH; ZEE, 2003). Os regulamentos exigem a quarentena e a eliminação de todos os reagentes do rebanho com caso diagnosticado de brucelose, por esse motivo, não se encontra aprovado o tratamento para essa doença (REBHUN, 2000; SMITH, 1993).

## **2.2 BABESIOSE**

Vamos apresentar sobre a transmissão, epidemiologia, diagnóstico, sinais clínicos, patogenia, controle e tratamento da doença Brucelose.

### **2.2.1 Transmissão**

A babesia são transmitidas aos bovinos única e exclusivamente pelo carrapato *Boophilus microplus* as fêmeas do carrapato fixadas na epiderme, camada mais superficial da pele, dos bovinos se abarrotando de sangue, ingerindo com ele, certo número de parasitos intraglobulares. O ixodídeo após completar o ciclo de vida parasitária, abandona o hospedeiro e inicia o ciclo livre, a ovoposição no solo das pastagens, transmitindo a sua descendência os parasitos babesídeos com os quais se infectou, e a transmissão efetiva do *Babesia bovis* (*B. bovis*) se dará portanto, pelas larvas de *Rhipicephalus Boophilus microplus* (*R. microplus*) originário de

teleógenas infectadas que, após transmissão se tornam negativas, e a (*Babesia bigemina*) *B. bigemina* tem um ciclo mais longo, sendo transmitida a partir do estágio de ninfa, até parte do estágio adulto (CALLOW; HOYTE, 1961; KIKUGAWA, 2009; MAHONEY; MIRRE, 1979). A figura abaixo (??) mostra o ciclo parasitário do carrapato *R. Microplus* e foi retirada de Pereira, Souza, e Baffi (2010).

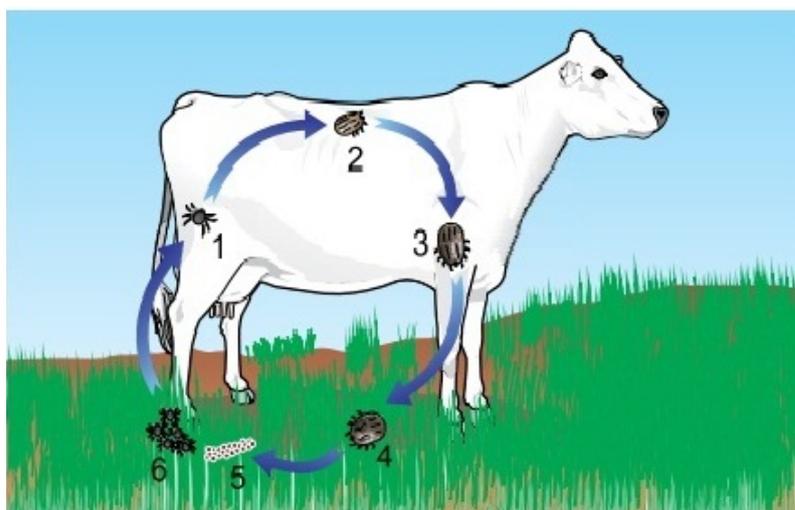


Figura 1 – Ciclo Parasitário do Carrapato transmissor da doença Babesiose

Fonte: PEREIRA; SOUZA; BAFFI. (2010, p. 276)

O ciclo parasitário dura em média 21 dias, podendo aumentar ou diminuir dependendo da inoculação e da sensibilidade do hospedeiro (KIKUGAWA, 2009). O macho permanece no bovino, sobrevivendo por um período até duas vezes maior do que o das fêmeas.

## 2.2.2 Epidemiologia

O clima tropical e subtropical, com chuvas e temperaturas mais altas favorece a babesia, pois é o melhor clima para o carrapato, o *B. microplus*. O quadro clínico é grave e muitos animais morrem ou têm um longo período de recuperação (FURLONG; MARTINS; PRATA, 2004; MARQUES, 2003).

A maior taxa de infecção ocorre nos animais entre seis a doze meses de idade, sendo pouco comum a ocorrência de infecção nos animais com mais de cinco anos de idade. O gado nativo das regiões raramente é afetado, em virtude da resistência natural dos animais jovens e da imunidade passiva adquirida via colostro proveniente de vacas imunes.

Todas as raças bovinas são suscetíveis a *Babesia*, mas o gado zebuino é mais resistente

do que as raças européias. O gado que tem sangue zebú apresenta certa resistência a infecção por não sofrer infestações maciças por carrapatos (FURLONG; EVANS, 1991).

### **2.2.3 Patogenia**

A patogenia nos bovinos está ligada à espécie, cepa, taxa de inoculação, idade, estresse e raça, *B. bovis* é mais patogênica que a *B. bigemina* (LEMOS, 1998). A babesiose tem um período de incubação de 7 a 20 dias. Quando um animal se torna infectado, ocorre uma multiplicação dos protozoários nos vasos periféricos (*B. bigemina*), ou nos vasos viscerais (*B. bovis*), causando a destruição das hemácias. Quando a multiplicação do protozoário alcança seu pico, ocorre o desenvolvimento de uma hemólise clinicamente detectável. A hemólise gera anemia grave, icterícia e hemoglobinúria, ocasionando a morte por uma anoxia anêmica.

### **2.2.4 Sinais Clínicos**

Os sinais clínicos se manifestam por elevação da temperatura até 41°C, anemia, hemoglobinúria, icterícia, anorexia, fraqueza e depressão. As mucosas e conjuntivas ficam extremamente pálidas, há um aumento na frequência respiratória e cardíaca, devido à destruição acentuada das hemácias, que resulta numa grave anemia (BLOOD; RADOSTITS, 1991; LEMOS, 1998). Animais que são infectados com *B. bigemina* apresentam a babesiose cerebral, que se manifesta por incoordenação seguida por paralisia posterior, convulsões e coma (BLOOD; RADOSTITS, 1991).

### **2.2.5 Diagnóstico**

O diagnóstico clínico torna-se suposição, uma vez que os sinais clínicos podem ser confundidos com os de outras doenças (KESSLER; SCHENK, 1998). O diagnóstico pode ser concluído pelos achados clínicos, como icterícia, hemoglobinúria e febre, mas o necessário para a confirmação do diagnóstico é por meio de esfregaços sanguíneos corados pelo método Giemsa,

que ajuda na visualização de hemácias infectadas por *Babesia*. Na fase aguda ou crônica quando há uma parasitemia baixa, o diagnóstico pode ser feito com pesquisa de anticorpos, utilizando-se provas sorológicas, imunofluorescência indireta (MARQUES, 2003). Na necropsia, observa-se palidez ou icterícia generalizada do animal, fígado aumentado de volume, vesícula biliar distendida com bile espessa e escura, baço aumentado de volume, mole e escuro, rim hipertrofiado e a bexiga com urina avermelhada (BLOOD, RADOSTITS, 1991; MARQUES, 2003).

### **2.2.6 Controle**

Ainda que pouco utilizado, o controle do carrapato fora do hospedeiro pode ser realizado por meio de rotação, queima e introdução de pastagens com poder de repelência e fatal ao carrapato, alteração de microclima, implantação de lavoura, uso de agentes biológicos e outros. A rotação de pastagens consiste na retirada dos animais das mesmas até que todas, ou pelo menos a maioria das larvas, sejam eliminadas por causas naturais. Algumas variedades de forrageiras têm influência na sobrevivência das larvas nas pastagens pela formação de um microambiente, em função da forma de crescimento, desenvolvimento e, também, pelas características específicas de cada uma, repelindo as larvas e matando-as. Dentre estas últimas, pode-se citar o capim-gordura e o capim-elefante. A queima e a aplicação de acaricida nas pastagens hoje são alternativas pouco recomendáveis por causarem grandes danos à fauna e flora e, na maioria das vezes, não são práticas e até mesmo antieconômicas (EMBRAPA, 2000).

O controle do carrapato sobre o hospedeiro pode ser realizado por meio de ferormônios, substâncias tóxicas, machos e fêmeas estéreis, mecanismos imunológicos e agentes químicos (GOMES, 1998). A escolha e o uso correto da carrapaticidas, assim como a mudança de produto quando necessário, são fatores importantes para a obtenção dos resultados (FARIAS, 1995). A aplicação dos carrapaticidas se faz por meio de pulverização, imersão, dorsal e outras formas. Em qualquer método é importante o período residual do produto para que as aplicações sejam com intervalos de 14 ou 21 dias. O número de banhos com estes intervalos irá depender da redução almejada e da densidade populacional dos carrapatos (GOMES, 1998). A correta aplicação dos carrapaticidas quanto à concentração, dose, época, intervalo entre outras recomendações técnicas é uma forma eficiente de retardar o surgimento de populações resistentes aos princípios ativos. A resistência pode ser detectada através de testes de sensibilidade dos carrapatos

aos carrapaticidas, denominado de biocarrapaticidograma (GOMES, 1998).

### **2.2.7 Tratamento**

A primeira providência é o diagnóstico específico e preciso do que está ocorrendo nestes animais. Também é necessário conhecer a região onde ocorre o surto se é de instabilidade ou estabilidade, se há alguma alteração drástica no manejo dos animais ou pastagens, idade, raça e manejo do rebanho afetado, se são animais da propriedade ou vindos de outras regiões. Em seguida, tratamento dos animais doentes através de medicação específica que são derivados da diamidina. Normalmente animais tratados antes do aparecimento de sintomas graves como alto grau de anemia e distúrbios do sistema nervoso se recuperam somente com o tratamento específico. No caso de se tratar animais já com sintomas graves, é importante o tratamento de suporte que inclui a soroterapia, protetor hepático e transfusão de sangue. Em todos os casos é importante o cuidado de manter os animais o mais calmos possível, com água e comida à sua disposição, pois esta doença leva a um quadro de anemia muito grave, o que compromete a oxigenação dos tecidos fazendo com que os animais, se submetidos a estresse ou movimentos bruscos e de esforço, entrem em choque cardíaco-respiratório com morte súbita. Também o controle químico de carrapatos através de banho carrapaticida, produtos injetáveis em todos os animais onde houver o problema, exceto nos mais doentes e muito fracos e observação diária. Se possível utilizar banhos de imersão pois têm ação mais imediata sobre os parasitos.

### 3 TEORIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Nesta seção, apresentaremos os resultados matemáticos indispensáveis ao desenvolvimento desse capítulo. Informações adicionais podem ser vistas em Barreira, Valls (2012), Boyce, DiPrima (2006), Brauer, Nohel (1989), Figueiredo, Neves (2008), Khalil (1996) e Lima (2014).

#### 3.1 EXISTÊNCIA

Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  um conjunto aberto e seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua em  $D$ . Uma equação da forma

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

é chamada de equação diferencial ordinária. Uma função vetorial  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida em algum intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  tal que

$$(t, x(t)) \in D,$$

para todo  $t \in I$  e que satisfaz

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

em  $I$  é chamada de solução de  $x'(t) = f(t, x(t))$  em  $I$ .

Quando  $n = 1$ , a equação diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  é escalar. Para um  $n > 1$  qualquer, a equação diferencial  $x'(t) = f(t, x(t))$  é, na verdade, um sistema de equações diferenciais escalares, pois se,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , vemos que

$$f(t, x(t)) = (f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t))).$$

Deste fato temos,

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ x'_n(t) &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dado  $(t_0, x_0) \in D$ , uma função  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida em algum intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  que

contém  $t_0$  tal que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é chamada de solução do Problema de Valor Inicial (P.V.I) e  $(t_0, x_0)$  é denominado dado inicial. Este problema também é conhecido como Problema de Cauchy.

**Definição 3.1** *Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida num aberto  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é localmente Lipschitz em relação a segunda variável se para cada vizinhança  $U \subset D$  existe  $L > 0$  tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (3.2)$$

para quaisquer  $(t, x), (t, y) \in U$ .

A definição acima é uma das hipóteses para o teorema de existência e unicidade a seguir.

**Teorema 3.1** *Suponha que a função  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja contínua e localmente Lipschitz. Então, dado  $(t_0, x_0) \in D$ , existe uma única solução  $y = x(t)$ ,  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in I$  satisfazendo*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Com as hipóteses do teorema de existência e unicidade citado anteriormente conseguimos definir solução máxima e intervalo maximal.

**Definição 3.2** *Uma solução  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (3.3) chama-se máxima, se para toda solução  $y : I_y \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $I \subset I_y$  e  $x(t) = y(t)$  para  $t \in I$ , temos  $I = I_y$ . Consequentemente,  $x = y$ . Neste caso  $I$  chama-se intervalo maximal.*

Temos também que satisfazendo as hipóteses do teorema de existência e unicidade a solução maximal é única.

**Proposição 3.1** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e localmente Lipschitziana em relação a segunda variável. Então, dado  $(t_0, x_0) \in D$ , existe uma única solução maximal  $x = \phi(t, t_0, x_0)$  satisfazendo (3.3).*

**Proposição 3.2** *Suponha que  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja contínua e Lipschitziana. Dado  $(t_0, x_0) \in D$ , então existe uma única solução do sistema  $x' = f(t, x)$  passando por  $(t_0, x_0)$  que pode ser prolongada até o gráfico encontrar a fronteira de  $D$ .*

Se  $x(t)$ ,  $A(t)$  e  $F(t)$  denotam, respectivamente, as matrizes

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

então o sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t), \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{aligned}$$

pode ser escrito na forma matricial

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x + F(t). \quad (3.4)$$

Esse sistema é chamado de linear. Quando  $F(t) = 0$  para todo  $t \in I$ , o sistema

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x \quad (3.5)$$

é homogêneo. As equações (3.4) e (3.5) também se escrevem como  $x'(t) = A(t)x + F(t)$  e  $x'(t) = A(t)x$ , respectivamente.

**Proposição 3.3** *Sejam  $A(t)$ ,  $b(t)$  matrizes  $n \times n$ ,  $n \times 1$ , respectivamente, de funções contínuas num intervalo  $I$ . Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução de*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definidos em  $I$ .

## 3.2 ESTABILIDADE

Em seguida vamos enunciar resultados que explicam o comportamento geométrico das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares autônomo, isto é, quando a função  $f$  do lado direito da equação abaixo depende apenas de  $x$ . A dinâmica local das soluções do sistema

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (3.6)$$

é determinada pelos seus pontos de equilíbrio e pela Linearização da função  $f$  em torno dos pontos de equilíbrio. Com efeito, veremos que o problema não linear se comporta de forma semelhante a um sistema linear da forma

$$x'(t) = Ax(t), \quad (3.7)$$

em uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

Assim vamos definir trajetória passando por um ponto.

**Definição 3.3** *Uma solução maximal do sistema (3.6) de forma que  $x(0) = x_0$  é dita uma trajetória de  $f$  passando por  $x_0$ .*

Vamos também definir ponto de equilíbrio a fim de determinar a dinâmica do sistema próximo deles.

**Definição 3.4** *Um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é chamado ponto de equilíbrio ou ponto crítico de (3.6) se  $f(x_0) = 0$ . Um ponto de equilíbrio  $x_0$  é Hiperbólico de (3.6) se nenhum dos autovalores da matriz  $Df(x_0)$  tem parte real igual a zero.*

Utilizando como hipótese intervalo maximal e trajetória conseguimos definir fluxo:

**Definição 3.5** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para cada  $(t,x)$  tal que  $t \in I(x)$  (intervalo maximal da solução de (3.6) passando por  $x \in \mathbb{R}^n$ ), definimos  $\varphi(t,x) = \varphi_t(x) = x(t)$ , em que  $x : I(x) \rightarrow D$  é a trajetória de (3.6) passando por  $x$ . Desta forma, podemos definir uma aplicação  $\varphi : I(x) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , denominada fluxo. A derivada parcial temporal do fluxo satisfaz a equação  $\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = x'(t) = f(x(t)) = f(\varphi(t,x))$ , para cada  $(t,x) \in I(x) \times D$ . Desse modo,*

a função fluxo  $\varphi(t,x)$  de um campo nos dá uma informação global do comportamento de todas as trajetórias do campo.

Introduziremos a seguir a noção de estabilidade de uma solução. Essencialmente, uma solução do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

onde  $x(t) = x_0$  é uma solução de equilíbrio. A solução de equilíbrio é estável se todas as soluções que partem suficientemente próximas de  $x_0$  se mantêm próximas dessa solução.

**Definição 3.6** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Seja  $P$  um ponto de equilíbrio de  $x' = f(x)$ . Dizemos que a solução será*

- (i) *estável: se para toda vizinhança  $U \subset D$  de  $P$ , existe uma vizinhança  $V \subset U$  tal que, para todo  $x \in V$ , a solução de (3.6) está definida para todo  $t \geq 0$  e  $\varphi(t,x) \in U$ ,  $t \geq 0$ ;*
- (ii) *localmente assintoticamente estável se ele for estável e existir  $\delta > 0$  tal que para todo  $x_0 \in D$  tal que  $\|x_0 - P\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t,x) = P$ ;*
- (iii) *globalmente assintoticamente estável se ele for estável e para todo  $x_0 \in D$  temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t,x) = P$ .*

O próximo teorema dá a condição para a estabilidade de uma equação  $x' = Ax$  com coeficientes constantes.

**Teorema 3.2** *Seja  $A$  uma matriz quadrada. Então a solução no ponto de equilíbrio da equação  $x'(t) = Ax(t)$  é*

- (a) *assintoticamente estável, se e só se,  $A$  tem apenas valores próprios com parte real negativa;*
- (b) *instável, se e só se,  $A$  tem pelo menos um valor próprio com parte real positiva.*

**Definição 3.7** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  uma função que possui derivadas parciais contínuas em todos os pontos do seu domínio  $D$ , diz-se então que  $f$  é uma função de classe  $C^1$  e representaremos esse conjunto por  $C^1(D)$ .*

O próximo teorema mostra que perto de um ponto de equilíbrio hiperbólico  $x_0$ , o sistema não linear (3.6) tem a mesma estrutura qualitativa que o sistema linear associado (3.7), onde  $A = Df(x_0)$ . A demonstração pode ser encontrada em Barreira e Valls (2012). O resultado será enunciado com o ponto de equilíbrio sendo a origem no  $\mathbb{R}^n$ , entretanto por mudança de coordenadas é possível mostrar que o resultado continua válido para qualquer ponto de equilíbrio fora da origem.

**Teorema 3.3** (Hartman-Grobman) *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem, seja  $f \in C^1(E)$  e  $\varphi_t$  o fluxo do sistema não linear (3.6). Suponha  $f(0) = 0$  e que a matriz  $A = Df(0)$  não possua nenhum autovalor com a parte real nula. Então, existe um homeomorfismo  $H$  de um conjunto aberto  $U$  contendo a origem em um conjunto aberto  $V$ , contendo a origem, tal que para cada  $x_0 \in U$ , existe um intervalo aberto  $I_0 \in \mathbb{R}$  contendo 0 tal que todo  $t \in I_0$*

$$H \circ \varphi_t(x_0) = e^{At}H(x_0),$$

*ou seja, as trajetórias de (3.6) próximas a origem são levadas em  $x' = Ax$  próximas a origem e o tempo é preservado.*

A próxima definição fornece o segundo método de Lyapunov que estuda a estabilidade de sistemas (3.6), em que  $f$  é de classe  $C^1$  e  $x_0$  é o ponto de equilíbrio de  $f$ . Para mais detalhes veja Barreira e Valls (2012).

**Definição 3.8** *Dado  $x_0 \in D$  com  $f(x_0) = 0$ , dizemos que uma função diferenciável  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Lyapunov para  $x_0$  se existe um aberto  $U \subset D$  contendo  $x_0$  tal que:*

1.  $V(x_0) = 0$  e  $V(x) > 0$ , para  $x \in U \setminus \{x_0\}$
2.  $V'(x) \leq 0$ , para  $x \in U$ .

*Uma função de Lyapunov diz-se uma função de Lyapunov estrita se podemos substituir a segunda condição por  $V'(x) < 0$  para  $x \in U \setminus \{x_0\}$ .*

A existência de uma função de Lyapunov (respectivamente, função Lyapunov estrita) para um ponto da equação (3.6) permite estabelecer a estabilidade (respectivamente, estabilidade assintótica) desse ponto crítico.

**Teorema 3.4** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função localmente Lipschitz num conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$  e seja  $x_0 \in D$  tal que  $f(x_0) = 0$ .*

*a) Se existe uma função de Lyapunov para  $x_0$ , então  $x_0$  é estável.*

*b) Se existe uma função de Lyapunov estrita para  $x_0$ , então  $x_0$  é assintoticamente estável.*

Agora vamos definir um conjunto positivamente invariante, uma das hipóteses do teorema a seguir.

**Definição 3.9** *Um conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  diz-se positivamente invariante em relação a (3.6), se para qualquer  $x \in E$ ,  $\varphi(t, x) \in E$ , para  $t \geq 0$ .*

Assim utilizando a definição de conjunto positivamente invariante anunciamos o Princípio de Invariância de La Salle.

**Teorema 3.5** *(Princípio de Invariância de La Salle) Seja  $W \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto que é positivamente invariante com respeito a  $x' = f(x)$ . Seja  $V : W \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que  $V'(x) \leq 0$  em  $W$  e  $E = \{x \in W : V'(x) = 0\}$ . Se  $M$  é o maior conjunto invariante em  $E$ , então toda solução que começa em  $W$  tende a  $M$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

Note que a função de Lyapunov satisfaz a função  $V$  do Princípio de Invariância de La Salle.

No próximo teorema enunciamos um resultado de comparação para sistemas de equações diferenciais, para isto, introduzimos a seguinte função.

**Definição 3.10** *Um vetor  $v$  é dito não negativo (respectivamente positivo) se toda componente  $v_i, i = 1, \dots, n$ , é não negativa (respectivamente positiva). Denotamos um vetor não negativo (respectivamente positivo) por  $0 \leq v$  (respectivamente  $0 << v$ .)*

**Observação 3.1** *Sejam  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $v \leq u$ , isto é  $v$  precede  $u$  é equivalente a dizer que  $u_i \geq v_i, 1, 2, \dots, n$ .*

**Teorema 3.6** *Considere o problema de valor inicial*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (3.8)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (3.9)$$

em que  $f : [t_0, T) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua em  $t$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  é um subconjunto aberto,  $0 \in \mathcal{M}$  e existe uma constante  $L > 0$  tal que para todo  $u', u'' \in \Omega \subset \mathcal{M}$ ,

$$\|f(t, u') - f(t, u'')\| \leq L\|u' - u''\|, t \in [t_0, T), \quad (3.10)$$

Seja  $u(t), t \in [t_0, T)$  uma solução do sistema (3.8)-(3.9), se existe um vetor  $v = (v_1, \dots, v_m) : [t_0, T) \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $v_i \in C$  e

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), t \in [t_0, \infty),$$

então  $v(t_0) \leq u_0, u_0 \in \mathcal{M}$ , implica que  $v(t) \leq u(t), t \in [t_0, T)$ .

**Demonstração:** Considere o seguinte sistema

$$z'(t) = f(t, z(t)) + \lambda E, z(0) = u_0, \quad (3.11)$$

onde  $\lambda$  é uma constante e  $E = (1, \dots, 1)^T$ . Para um intervalo compacto  $[t_0, t_1]$  temos que, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\lambda < \delta$ , então existe uma única solução  $z(t, \lambda)$  definida em  $t \in [t_0, t_1]$  e

$$\|z(t, \lambda) - u(t)\|_M < \epsilon, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (3.12)$$

em que a norma  $\|\cdot\|_M := \max\{|\cdot|, \dots, |\cdot|\}$  definido como o valor máximo dos componentes. Inicialmente vamos mostrar que

$$v(t) \leq z(t, \lambda), t \in [t_0, t_1]. \quad (3.13)$$

Suponha que a afirmação dada em (3.13) seja falsa, então pode haver  $a, b \in [t_0, t_1]$  de tal forma que para pelo menos um  $i \in \{1, \dots, m\}$ , ocorra  $v_i(a) = z_i(a, \lambda)$ ,  $v_i(t) > z_i(t, \lambda)$  e  $v_j(t) \leq z_j(t, \lambda)$  para todo  $t \in (a, b]$ ,  $j \neq i$  e  $j = 1, \dots, m$ . Seja o conjunto  $m_i(t) = v_i(t) - z_i(t, \lambda)$ . Pela discussão do Lema 2.5 em Khalil (1996) para um equação diferencial escalar obtemos

$$v'_i(a) \geq z'_i(a, \lambda) = f_i(a, z(a, \lambda)) + \lambda > f_i(a, z(a, \lambda)), \quad (3.14)$$

o que contradiz a desigualdade  $v'(t) \leq f(t, v(t))$ , desde que  $z_i(a, \lambda) = v_i(a)$ .

Provaremos agora que  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Novamente, suponha que essa afirmação é falsa, então pode haver  $a \in (t_0, t_1]$  e pelo menos um  $i$  tal que  $v_i(a) > u_i(a)$ . Tomando  $\epsilon = \frac{(v_i(a) - u_i(a))}{2}$  e usando a equação (3.12), temos

$$v_i(a) - z_i(a, \lambda) = v_i(a) - u_i(a) + u_i(a) - z_i(a, \lambda) \geq \epsilon,$$

o que contradiz o fato de que  $v_i(t) \leq z_i(t, \lambda)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Assim mostramos que  $v(t) \leq u(t)$  e concluímos que isso é verdade para  $t \in [t_0, t_1]$ . Se não fosse, tomemos  $T < \infty$  e  $\Delta > 0$ . Daí resulta pela continuidade que  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, T)$ ,  $v_i(T) = u_i(T)$  e  $v_i(t) > u_i(t)$ ,  $t \in (T, T + \Delta]$ . Então a mesma discussão para  $[t_0, t_1]$  vale para  $[t_0, T]$ . ■

## 4 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção vamos estudar a dinâmica da transmissão das doenças infecciosas Brucelose vista em Abatih et al. (2014) e Babesiose vista em Aranda et al. (2012), assim primeiramente, vamos definir termos que serão utilizados em ambos capítulos para a construção dos modelos a serem estudados. Definindo:

- a)  $N_B$  população total de bovinos que é dividida em três subpopulações:
  - $S_B$  subpopulação de bovinos suscetíveis;
  - $I_B$  subpopulação de bovinos infectados;
  - $R_B$  subpopulação de bovinos recuperados.
- b)  $\lambda_B$  fração dos bovinos infectados que são recuperados.
- c) Assumindo também mistura homogênea, ou seja, todos os bovinos suscetíveis têm a mesma probabilidade de serem infectados e todos os carrapatos suscetíveis têm a mesma probabilidade de serem infectados.
- d) O tempo de incubação para infecção é 0. O tempo de incubação é o período do momento da infecção até o aparecimento dos sintomas.
- e) O tempo de gestação é 0 e todos recém-nascidos são considerados fértil.

Todos os parâmetros são não negativos.

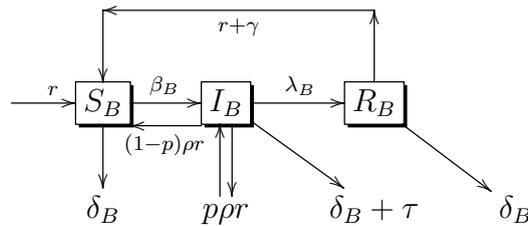
### 4.1 MODELO BRUCELOSE

Nesta seção vamos mostrar a dinâmica da doença bovina Brucelose ao longo do tempo. Vamos considerar a população de bovinos não constante. Assumindo a transmissão horizontal direta e transmissão vertical. E também definir:

- a)  $\mu_B$  taxa de natalidade dos bovinos.
- b)  $\delta_B$  taxa de mortalidade dos bovinos.

- c)  $\beta_B$  taxa de transmissão horizontal, por contato.
- d)  $\tau$  taxa de mortalidade relacionada a doença.
- e)  $\phi$  densidade dependente de redução de nascimentos.
- f)  $\rho$  redução de fecundidade em bovinos infectados.
- g)  $\gamma$  taxa relacionada a perda de resistência.
- h)  $p$  probabilidade de um suscetível nascer a partir de um infectado, transmissão vertical. Logo  $(1-p)$  é probabilidade de um infectado nascer a partir de um infectado. Os nascidos de suscetíveis e recuperados, são todos suscetíveis.

O diagrama abaixo descreve a dinâmica da doença, considere  $r = \mu_B - \phi N_B$  :



Utilizando as definições e pressuposições citadas anteriormente e de acordo com o diagrama obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para a doença Brucelose:

$$\begin{cases} S'_B &= (\mu_B - \phi N_B)[S_B + R_B + I_B(1-p)\rho] - \delta_B S_B + \gamma R_B - \frac{\beta_B S_B I_B}{N_B} \\ I'_B &= \frac{\beta_B S_B I_B}{N_B} + p\rho(\mu_B - \phi N_B)I_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B)I_B \\ R'_B &= \lambda_B I_B - (\delta_B + \gamma)R_B \end{cases} \quad (4.1)$$

Temos também que:

$$N'_B = (\mu_B - \phi N_B)N_B - (\mu_B - \phi N_B)(1-p)I_B - \tau I_B - \delta_B N_B$$

em que  $S_B, I_B, R_B$  e  $N_B$  são funções de  $t$ .

O sistema é definido na região:

$$\Gamma = \{(S_B(t), I_B(t), R_B(t)) : S_B(t) > 0, I_B(t), R_B(t) \geq 0, S_B(t) + I_B(t) + R_B(t) \leq \frac{\mu_B - \delta_B}{\phi}\}.$$

**Proposição 4.1** *A região  $\Gamma$  definida acima é um conjunto positivamente invariante para o sistema (4.1).*

**Demonstração:** Vamos mostrar que se  $(S_B(0), I_B(0), R_B(0)) \in \Gamma$  então  $(S_B(t), I_B(t), R_B(t)) \in \Gamma$ , para todo  $t \geq 0$ .

De fato, do sistema (4.1) temos:

$$N'_B(t) = S'_B + I'_B + R'_B = (\mu_B - \phi N_B)[S_B + R_B + I_B \rho] - \delta_B[S_B + R_B + I_B] - \tau I_B$$

sabemos que  $\rho I_B < I_B$  pois  $\rho < 1$  e  $S_B + I_B + R_B = N_B$ . Assim temos,

$$N'_B \leq (\mu_B - \phi N_B)N_B - \delta_B N_B,$$

$$N'_B \leq (\mu_B - \delta_B)N_B - \phi N_B^2,$$

$$\frac{1}{N_B^2} N'_B - (\mu_B - \delta_B) \frac{1}{N_B} \leq -\phi. \quad (4.2)$$

Multiplicando ambos os lados da inequação (4.2) pelo fator integrante  $e^{(\mu_B - \delta_B)t}$  temos

$$\frac{1}{N_B^2} N'_B e^{(\mu_B - \delta_B)t} + (\mu_B - \delta_B) \frac{-1}{N_B} e^{(\mu_B - \delta_B)t} \leq -\phi e^{(\mu_B - \delta_B)t},$$

assim

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{-e^{(\mu_B - \delta_B)t}}{N_B} \right] \leq -\phi e^{(\mu_B - \delta_B)t}.$$

Integrando ambos os lados, da inequação anterior

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left[ \frac{-e^{(\mu_B - \delta_B)s}}{N_B(s)} \right] ds \leq \int_0^t -\phi e^{(\mu_B - \delta_B)s} ds,$$

desta forma

$$\frac{-e^{(\mu_B - \delta_B)t}}{N_B(t)} + \frac{1}{N_B(0)} \leq \frac{-\phi e^{(\mu_B - \delta_B)t} + \phi}{\mu_B - \delta_B},$$

$$\frac{-e^{(\mu_B - \delta_B)t}}{N_B(t)} \leq \frac{-\phi e^{(\mu_B - \delta_B)t} + \phi}{\mu_B - \delta_B} - \frac{1}{N_B(0)},$$

$$\frac{-e^{(\mu_B - \delta_B)t}}{N_B(t)} \leq \frac{-N_B(0)\phi(e^{(\mu_B - \delta_B)t} - 1) - (\mu_B - \delta_B)}{(\mu_B - \delta_B)N_B(0)},$$

$$\frac{1}{N_B(t)} \geq \frac{N_B(0)\phi(e^{(\mu_B - \delta_B)t} - 1) - (\mu_B - \delta_B)}{(\mu_B - \delta_B)N_B(0)e^{(\mu_B - \delta_B)t}},$$

$$N_B(t) \leq \frac{(\mu_B - \delta_B)N_B(0)e^{(\mu_B - \delta_B)t}}{N_B(0)\phi(e^{(\mu_B - \delta_B)t} - 1) - (\mu_B - \delta_B)}.$$

Logo temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_B(t) \leq \frac{N(0)(\mu_B - \delta_B)}{\phi N(0)} = \frac{\mu_B - \delta_B}{\phi}$ .

Temos que  $N_B(t) \leq \frac{\mu_B - \delta_B}{\phi}$ , para todo  $t \geq 0$ .

Portanto a região  $\Gamma$  é um conjunto positivamente invariante. ■

A prova da existência de solução do sistema (4.1.1) é análoga a que será apresentada no próximo capítulo da doença Babesiose Bovina no modelo exponencial, Teorema 5.1.

#### 4.1.1 Pontos de Equilíbrio

O sistema (4.1) possui pontos de equilíbrio,  $F_0$  é o ponto livre da doença e  $F_1$  o ponto endêmico. Para obter os pontos de equilíbrio igualamos o sistema a zero:

$$\begin{cases} (\mu_B - \phi N_B)[S_B + R_B + I_B(1 - p)\rho] - \delta_B S_B + \gamma R_B - \frac{\beta_B S_B I_B}{N_B} = 0 \\ \frac{\beta_B S_B I_B}{N_B} + p\rho(\mu_B - \phi N_B)I_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B)I_B = 0 \\ \lambda_B I_B - (\delta_B + \gamma)R_B = 0. \end{cases}$$

Considerando  $\mu_B > \delta_B$  e  $\phi > 0$  obtemos o ponto de equilíbrio livre da doença  $F_0 = (\frac{\mu_B - \delta_B}{\phi}, 0, 0)$ . Considerando também  $N_{B_1} = S_{B_1} + I_{B_1} + R_{B_1}$  e  $N_{B_1} > \frac{\mu_B}{\phi}$  obtemos o ponto de equilíbrio endêmico  $F_1 = (S_{B_1}, I_{B_1}, R_{B_1})$ , dado por:

$$\begin{aligned} S_{B_1} &= \frac{N_{B_1}}{\beta_B} [(\tau + \delta_B + \lambda_B) + p\rho(\phi N_{B_1} - \mu_B)], \\ I_{B_1} &= \frac{N_{B_1}(\delta_B + \gamma)}{\beta_B(\delta_B + \gamma + \lambda_B)} [\beta_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B) - p\rho\phi N_{B_1} + p\rho\mu_B], \\ R_{B_1} &= \frac{\lambda_B I_{B_1}}{\delta_B + \gamma}. \end{aligned}$$

#### 4.1.2 Razão de Reprodução Básica

A razão de reprodução básica,  $R_0$ , é definida como o número infecções secundárias produzida por um infectado ao se introduzir em uma população completamente suscetível.  $R_0$  é um parâmetro limiar o qual  $R_0 > 1$  ocorre uma epidemia,  $R_0 < 1$  extinção da doença e  $R_0 = 1$  ocorre uma endemia.

O  $R_0$  desse modelo para doença Brucelose pode ser calculado por:

$$I'_B = \frac{\beta_B S_B I_B}{N_B} + p\rho(\mu_B - \phi N_B) I_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B) I_B < 0,$$

$$I_B \left[ \frac{\beta_B S_B}{N_B} + p\rho(\mu_B - \phi N_B) - (\tau + \delta_B + \lambda_B) \right] < 0,$$

substituindo o ponto livre da doença  $F_0 = (\frac{\mu_B - \delta_B}{\phi}, 0, 0)$  na expressão acima temos:

$$\beta_B + p\rho(\mu_B - \phi(\frac{\mu_B - \delta_B}{\phi})) - (\tau + \delta_B + \lambda_B) < 0,$$

$$\beta_B + p\rho\delta_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B) < 0,$$

$$\beta_B + p\rho\delta_B < \tau + \delta_B + \lambda_B,$$

$$\frac{\beta_B + p\rho\delta_B}{\tau + \delta_B + \lambda_B} < 1.$$

Portanto a razão de reprodução básica é dada por  $R_0 = \frac{\beta_B + p\rho\delta_B}{\tau + \delta_B + \lambda_B}$ .

### 4.1.3 Análise de Estabilidade

**Teorema 4.1** *Se  $R_0 < 1$  então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $F_0$ ) é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** De acordo com o Teorema 3.3 temos que o comportamento do sistema não linear é o mesmo do linear próximo aos pontos de equilíbrio, assim utilizando a linearização temos a matriz Jacobiana para o sistema (4.1) abaixo:

$$J(S_B(t), I_B(t), R_B(t)) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\text{sendo } a_{11} = -\phi(S_B + R_B + I_B(1-p)\rho) + (\mu_B - \phi N_B) - \delta_B + \frac{\beta_B I_B S_B - N_B \beta_B I_B}{N_B^2},$$

$$a_{12} = -\phi(S_B + R_B + I_B(1-p)\rho) + (1-p)\rho(\mu_B - \phi N_B) + \frac{\beta_B I_B S_B - N_B \beta_B S_B}{N_B^2},$$

$$a_{13} = -\phi(S_B + R_B + I_B(1-p)\rho) + (\mu_B - \phi N_B) + \gamma + \frac{\beta_B I_B S_B}{N_B^2},$$

$$a_{21} = \frac{N_B \beta_B I_B - \beta_B I_B S_B}{N_B^2} - \phi p \rho I_B,$$

$$a_{22} = \frac{N_B \beta_B S_B - \beta_B I_B S_B}{N_B^2} + p\rho(\mu_B - \phi(S_B + I_B + R_B)) - \phi p \rho I_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B),$$

$$a_{23} = \frac{-\beta_B I_B S_B}{N_B^2} - \phi p \rho I_B, \quad a_{32} = \lambda_B, \quad a_{33} = -(\delta_B + \gamma).$$

Logo,

$$J(F_0) = \begin{vmatrix} -\mu_B + \delta_B & -\mu_B + \delta_B + (1-p)\rho\delta_B - \beta_B & -\mu_B + 2\delta_B + \gamma \\ 0 & \beta_B + p\rho\delta_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B) & 0 \\ 0 & \lambda_B & -(\delta_B + \gamma) \end{vmatrix}.$$

Temos que

$$\det(J(F_0) - \lambda) = (-\mu_B + \delta_B - \lambda)(\beta_B + p\rho\delta_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B) - \lambda)(-(\delta_B + \gamma) - \lambda) = 0.$$

Assim  $\lambda_1 = -\mu_B + \delta_B < 0$ , pois  $\mu_B > \delta_B$ ,  $\lambda_2 = \beta_B + p\rho\delta_B - (\tau + \delta_B + \lambda_B) < 0$  pois  $R_0 < 1$  e  $\lambda_3 = -(\delta_B + \gamma) < 0$ . Como todos os autovalores possuem parte real negativa  $F_0$  é localmente assintoticamente estável. ■

**Teorema 4.2** *Se  $R_0 \leq 1$  então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $F_0$ ) é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Considere a função de Lyapunov:

$$W : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, W = \frac{[(S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B]^2}{2} + \frac{(1 - \rho)I_B^2}{2p\rho} + \frac{\tau R_B^2}{2\lambda_B}$$

Temos que  $W$  é contínua em  $\Gamma$ ,  $W(F_0) = 0$  e  $W > 0$  se  $(S_B, I_B, R_B) \neq (\frac{\mu_B - \delta_B}{\phi}, 0, 0)$ .

Derivando  $W$ , obtemos:

$$W' = [(S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B][S'_B + I'_B + R'_B] + \frac{(1 - \rho)}{p\rho} I_B I'_B + \frac{\tau R_B}{\lambda_B} R'_B$$

$$\begin{aligned} W' &= [(S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B][(\mu_B - \phi N_B)N_B - (\mu_B - \phi N_B)(1 - \rho)I_B - \tau I_B - \delta_B N_B] \\ &+ \frac{(1 - \rho)}{p\rho} \left[ \frac{\beta_B S_B I_B^2}{N_B} + p\rho(\mu_B - \phi N_B)I_B^2 - (\tau + \delta_B + \lambda_B)I_B^2 \right] \\ &+ \tau R_B I_B - (\delta_B + \gamma)R_B^2 \frac{\tau}{\lambda_B} \end{aligned}$$

Substituindo  $\mu_B = \phi S_{B_0} + \delta_B$ :

$$\begin{aligned} W' &= [(S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B][-\phi N_B((S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B) \\ &+ \phi(1 - \rho)I_B((S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B) - \delta_B(1 - \rho)I_B - \tau I_B] + \frac{(1 - \rho)\beta_B I_B^2 S_B}{p\rho N_B} \\ &- \phi((S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B)(1 - \rho)I_B^2 + \delta_B(1 - \rho)I_B^2 - (\tau + \delta_B + \lambda_B) \frac{(1 - \rho)I_B^2}{p\rho} \\ &+ \tau R_B I_B - (\delta_B + \gamma)R_B^2 \frac{\tau}{\lambda_B}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W' &= -[(S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B]^2[\phi(S_B + R_B) + \phi\rho I_B] - (S_B - S_{B_0})I_B(\tau + \delta_B(1 - \rho)) \\
&\quad - \delta_B I_B R_B(1 - \rho) - I_B^2[\tau + \phi(S_B - S_{B_0})(1 - \rho) + \phi(1 - \rho)(I_B + R_B)] \\
&\quad - \tau(\delta_B + \gamma)R_B^2 \frac{\tau}{\lambda_B} - \frac{(1 - \rho)I_B^2}{p\rho N_B}[(\tau + \delta_B + \lambda_B)N_B - \beta_B S_B].
\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo  $\frac{p\rho S_B(1 - \rho)I_B^2}{p\rho N_B}$

$$\begin{aligned}
W' &= -[(S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B]^2[\phi(S_B + R_B) + \phi\rho I_B] - (S_B - S_{B_0})I_B(\tau + \delta_B(1 - \rho)) \\
&\quad - \delta_B I_B R_B(1 - \rho) - I_B^2[\tau + \phi(S_B - S_{B_0})(1 - \rho) + \phi(1 - \rho)(I_B + R_B)] \\
&\quad - \tau(\delta_B + \gamma)R_B^2 \frac{\tau}{\lambda_B} - \frac{(1 - \rho)I_B^2 S_B}{p\rho N_B}[(\tau + \delta_B + \lambda_B) \frac{I_B + R_B}{S_B} \\
&\quad + (\tau + \delta_B + \lambda_B) - \beta_B - p\rho\delta_B],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W' &= -[(S_B - S_{B_0}) + I_B + R_B]^2[\phi(S_B + R_B) + \phi\rho I_B] - (S_B - S_{B_0})I_B(\tau + \delta_B(1 - \rho)) \\
&\quad - \delta_B I_B R_B(1 - \rho) - I_B^2[\tau + \phi(S_B - S_{B_0})(1 - \rho) + \phi(1 - \rho)(I_B + R_B)] \\
&\quad - \tau(\delta_B + \gamma)R_B^2 \frac{\tau}{\lambda_B} - \frac{(1 - \rho)I_B^2 S_B}{p\rho N_B}[(\tau + \delta_B + \lambda_B) \frac{I_B + R_B}{S_B} + (\tau + \delta_B + \lambda_B)(1 - R_0)].
\end{aligned}$$

Como  $R_0 \leq 1$  temos que  $W' \leq 0$ . Logo  $W' = 0$  se  $S_B = S_{B_0}$ ,  $I_B = I_{B_0}$  e  $R_B = R_{B_0}$ , ponto de equilíbrio livre da doença. Portanto pelo Teorema de La Salle  $F_0$  é globalmente assintoticamente estável. ■

**Teorema 4.3** *Se  $R_0 > 1$  então o ponto de equilíbrio endêmico ( $F_1$ ) é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Considere a função de Lyapunov  $V : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\begin{aligned}
V &= \frac{[(S_B - S_{B_1}) + (I_B - I_{B_1}) + (R_B - R_{B_1})]^2}{2} + \frac{(1 - \rho)}{p\rho} [I_B - I_{B_1} - I_{B_1} \ln(\frac{I_B}{I_{B_1}})] \\
&\quad + \frac{\tau(R_B - R_{B_1})^2}{2\lambda_B}.
\end{aligned}$$

Temos que  $V$  é contínua em  $\Gamma$ ,  $V(F_1) = 0$  e  $V > 0$  se  $(S_B, I_B, R_B) \neq (S_{B_1}, I_{B_1}, R_{B_1})$ .

Derivando  $V$ , obtenemos:

$$V' = [(S_B - S_{B_1}) + (I_B - I_{B_1}) + (R_B - R_{B_1})][S'_B + I'_B + R'_B] + \frac{(1 - \rho)}{p\rho} \left[ \frac{(I_B - I_{B_1})I'_B}{I_B} \right. \\ \left. + \frac{\tau(R_B - R_{B_1})R'_B}{\lambda_B} \right]$$

$$V' = [(S_B - S_{B_1}) + (I_B - I_{B_1}) + (R_B - R_{B_1})][(\mu_B - \delta_B)N_B - \phi N_B^2 \\ - (\mu_B - \phi N_B)(1 - \rho)I_B - \tau I_B] + \frac{(1 - \rho)(I_B - I_{B_1})}{p\rho} \left[ \frac{\beta_B S_B}{N_B} + p\rho(\mu_B - \phi N_B) \right. \\ \left. - (\tau + \delta_B + \lambda_B) \right] + \frac{\tau(R_B - R_{B_1})}{\lambda_B} [\lambda_B I_B - (\delta_B + \gamma)R_B]$$

$$V' = [(S_B - S_{B_1}) + (I_B - I_{B_1}) + (R_B - R_{B_1})][(\mu_B - \delta_B)N_B - \phi N_B^2 \\ - (\mu_B - \phi N_B)(1 - \rho)I_B - \tau I_B] + \frac{(1 - \rho)(I_B - I_{B_1})}{p\rho} \left[ \frac{\beta_B S_B}{N_B} + p\rho(\mu_B - \phi N_B) \right. \\ \left. - (\tau + \delta_B + \lambda_B) \right] + \tau(R_B - R_{B_1})I_B - \frac{\tau(\delta_B + \gamma)}{\lambda_B} (R_B - R_{B_1})R_B.$$

Utilizando as igualdades:

$$(\tau + \delta_B + \lambda_B) = \frac{\beta_B S_{B_1}}{N_{B_1}} + p\rho(\mu_B - \phi N_{B_1}), \\ (\delta_B + \gamma) = \frac{\lambda_B I_{B_1}}{R_{B_1}}, \\ (\mu_B - \delta_B) = \phi N_{B_1} + (\mu_B - \phi N_{B_1})(1 - \rho) \frac{I_{B_1}}{N_{B_1}} + \tau \frac{I_{B_1}}{N_{B_1}}.$$

Obtemos que:

$$V' = [(S_B - S_{B_1}) + (I_B - I_{B_1}) + (R_B - R_{B_1})][\phi N_{B_1} N_B + (\mu_B - \phi N_{B_1})N_B(1 - \rho) \frac{I_{B_1}}{N_{B_1}} \\ + \tau N_B \frac{I_{B_1}}{N_{B_1}} - \phi N_B^2 - (\mu_B - \phi N_B)(1 - \rho)I_B - \tau I_B] \\ + \frac{(1 - \rho)(I_B - I_{B_1})}{p\rho} \left[ \frac{\beta_B S_B}{N_B} + p\rho(\mu_B - \phi N_B) - \frac{\beta_B S_{B_1}}{N_{B_1}} - p\rho(\mu_B - \phi N_{B_1}) \right] \\ + \tau(R_B - R_{B_1})I_B - \frac{\tau I_{B_1}}{R_{B_1}} (R_B - R_{B_1})R_B.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
V' &= (N_B - N_{B_1})[-\phi N_B(N_B - N_{B_1})N_B + \frac{\tau}{N_{B_1}}(I_{B_1}(N_B - N_{B_1}) - N_{B_1}(N_B - N_{B_1}))] \\
&+ \frac{(1 - \rho)}{N_{B_1}}(\mu_B I_{B_1}(N_B - N_{B_1}) - \mu_B N_B(I_B - I_{B_1}) + \phi N_B N_{B_1}(I_B - I_{B_1})) \\
&+ \frac{\beta_B(1 - \rho)(I_B - I_{B_1})}{p\rho N_B N_{B_1}}[N_{B_1}(S_B - S_{B_1}) - S_{B_1}(N_B - N_{B_1})] \\
&- (1 - \rho)\phi(I_B - I_{B_1})(N_B - N_{B_1}) + \tau(R_B - R_{B_1})(I_B - I_{B_1}) - \frac{\tau I_{B_1}}{R_{B_1}}(R_B - R_{B_1})^2.
\end{aligned}$$

Utilizando a igualdade  $N_B - N_{B_1} = (S_B - S_{B_1}) + (I_B - I_{B_1}) + (R_B - R_{B_1})$ , obtemos que:

$$\begin{aligned}
V' &= -(N_B - N_{B_1})^2[-\phi N_B + \frac{I_{B_1}}{N_{B_1}}(\tau + \mu_B(1 - \rho))] - (I_B - I_{B_1})(N_B - N_{B_1})[\tau \\
&+ (1 - \rho)(\mu_B - \phi N_B) + (1 - \rho) + \frac{\beta_B(1 - \rho)S_{B_1}}{p\rho N_B N_{B_1}} - \frac{\beta_B(1 - \rho)}{p\rho N_B}] \\
&- \frac{\tau I_{B_1}}{R_{B_1}}(R_B - R_{B_1})^2 - (I_B - I_{B_1})^2 \frac{\beta_B(1 - \rho)}{p\rho N_B} \\
&- (I_B - I_{B_1})(R_B - R_{B_1})[\frac{\beta_B(1 - \rho)}{p\rho N_B} - \tau].
\end{aligned}$$

Logo  $V' = 0$  se  $\frac{\phi N_B N_{B_1}}{I_{B_1}} > (\tau + \mu_B(1 - p))$ ,  $\tau + (1 - \rho)\mu_B > (1 - \rho)\phi N_B + \frac{\beta_B(1 - \rho)}{p\rho N_B}$  e  $\frac{\beta_B(1 - \rho)}{p\rho N_B} > \tau$ . Combinando as desigualdades e subtraindo a expressão por  $I_{B_1}$  assim concluimos que  $R_0 \geq 1$ . Note que  $V' = 0$  se  $S_B = S_{B_1}$ ,  $I_B = I_{B_1}$ ,  $R_B = R_{B_1}$  assim pelo Teorema de La Salle o ponto de equilíbrio endêmico  $F_1$  é globalmente assintoticamente estável. ■

#### 4.1.4 Simulação Numérica

Para realizar as simulações numéricas do modelo Brucelose utilizamos duas condições iniciais e taxas de razão de reprodução básica  $R_0 > 1$  e  $R_0 < 1$  e também parâmetros fixos dados pela Tabela 1.

Nas Figuras 2 e 3 demonstram a convergência para o ponto livre da doença. A taxa de reprodução básica estimada para esses casos foi menor que um, ou seja,  $R_0 = 0,12$  e  $R_0 = 0,95$ , respectivamente. As figuras indicaram que um aumento no  $R_0$  de 0,12 a 0,95 teve o efeito de

Tabela 1 – Parâmetros para simulação numérica da doença Brucelose com população de bovinos não constante

<i>Parâmetros</i>	$\mu_B$	$\phi$	$\delta_B$	$\lambda_B$	$\rho$	$p$	$\gamma$	$\tau$
<i>Valores</i>	0,42	0,00004	0,04	0,5	0,5	0,1	0,2	0,05

Fonte: Adaptado dos valores disponíveis em Abatih et al. (2014).

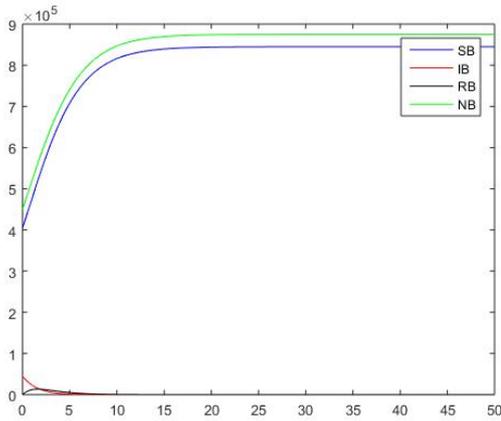


Figura 2 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,12, \beta_B = 0,05$ .

Fonte: Da autora.

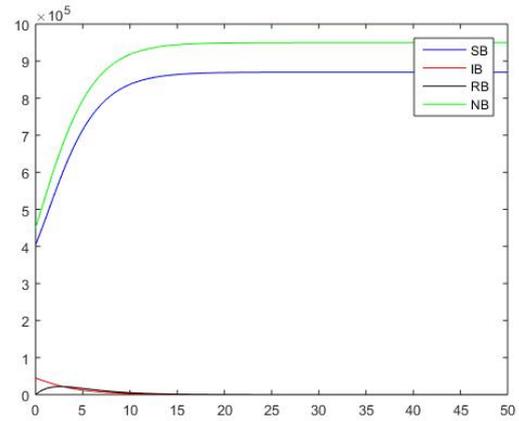


Figura 3 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,95, \beta_B = 0,5$ .

Fonte: Da autora.

aumentar ligeiramente o tempo em que a população infecciosa se aproxima de zero. Além disso, após variar os valores iniciais mais longe do equilíbrio livre da doença, as soluções ainda convergiram para o ponto livre da doença confirmando a proposição de estabilidade global Figuras 4 e 5.

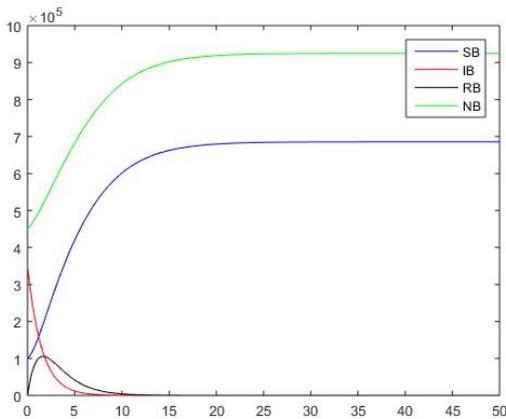


Figura 4 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,12, \beta_B = 0,05$ .

Fonte: Da autora.

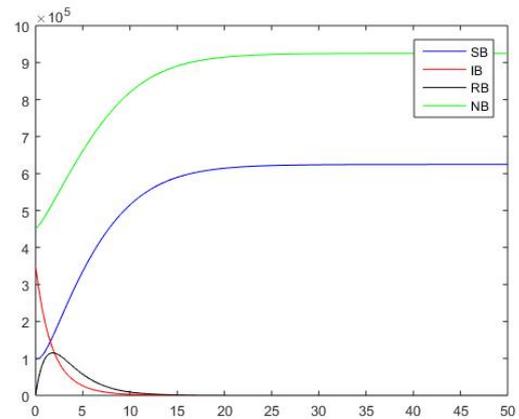


Figura 5 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,95, \beta_B = 0,5$ .

Fonte: Da autora.

A ponto endêmico é representado nas Figuras 6 e 7 com valores de  $R_0$  de 3,3 e 10,7, res-

pectivamente. Neste caso, um aumento no número de reprodução básica teve o efeito de reduzir o número de bovinos susceptíveis e aumentar o número de bovinos infectados. Observou-se que, independentemente das condições, as trajetórias convergiram para o equilíbrio endêmico Figuras 8 e 9.

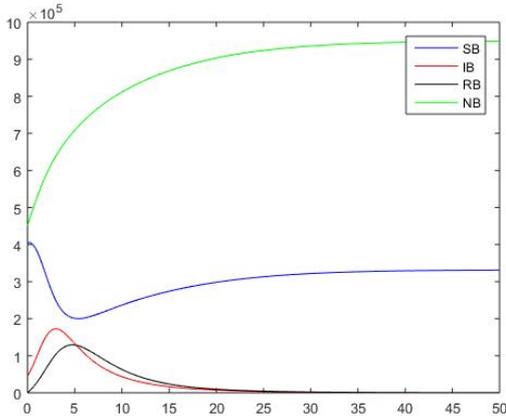


Figura 6 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 3,3$ ,  $\beta_B = 1,8$ .

Fonte: Da autora.

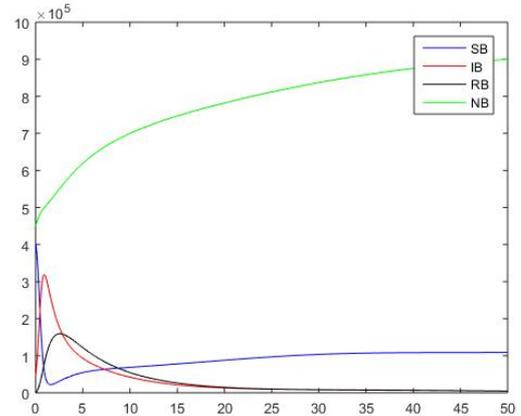


Figura 7 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 10,7$ ,  $\beta_B = 5,8$ .

Fonte: Da autora.

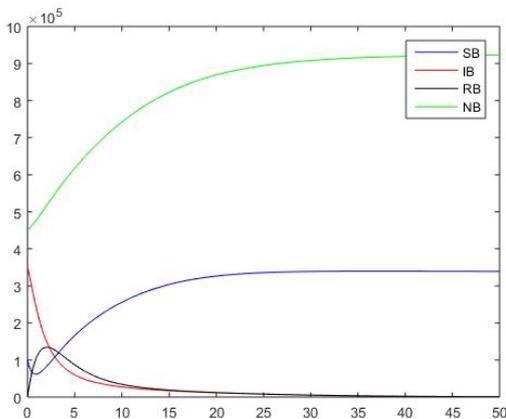


Figura 8 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 3,3$ ,  $\beta_B = 1,8$ .

Fonte: Da autora.

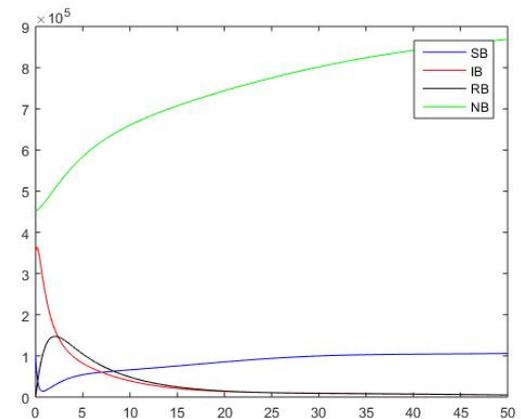


Figura 9 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 10,7$ ,  $\beta_B = 5,8$ .

Fonte: Da autora.

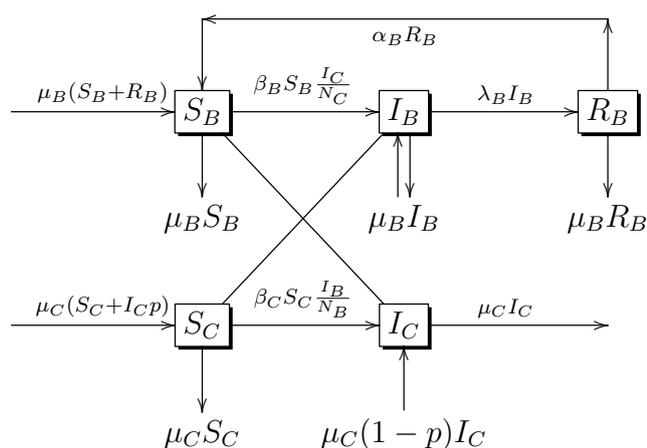
## 4.2 MODELO BABESIOSE

Neste Capítulo vamos analisar o modelo da doença bovina Babesiose, vamos considerar população constante ao longo do tempo. Usando as definições anteriores e teoria de modelagem

através de modelos compartimentados, assumindo a transmissão horizontal indireta e 100% da transmissão vertical nos bovinos, definindo:

- a)  $N_C$  população total de carrapatos.
- b)  $S_C$  subpopulação de carrapatos suscetíveis.
- c)  $I_C$  subpopulação de carrapatos infectados.
- d)  $\alpha_B$  fração de bovinos recuperados que voltam a ser suscetíveis.
- e)  $\mu_B$  taxa de natalidade e mortalidade dos bovinos.
- f)  $\mu_C$  taxa de natalidade e mortalidade dos carrapatos.
- g)  $\beta_B$  taxa de transmissão horizontal da doença, bovino picado pelo carrapato infectado.
- h)  $\beta_C$  taxa de transmissão horizontal da doença, carrapato infectado pelo bovino.
- i)  $p$  probabilidade de um carrapato suscetível nascer a partir de um infectado, transmissão vertical. Logo  $(1 - p)$  é probabilidade de um carrapato infectado nascer a partir de um infectado.

Assim obtemos o diagrama que descreve a doença Babesiose.



De acordo com o diagrama obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias que representa a dinâmica da doença Babesiose:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}'_B = \mu_B(\bar{S}_B + \bar{R}_B) + \alpha_B \bar{R}_B - \mu_B \bar{S}_B - \beta_B \bar{S}_B \frac{\bar{I}_C}{\bar{N}_C} \\ \bar{I}'_B = \mu_B \bar{I}_B + \beta_B \bar{S}_B \frac{\bar{I}_C}{\bar{N}_C} - \mu_B \bar{I}_B - \lambda_B \bar{I}_B \\ \bar{R}'_B = \lambda_B \bar{I}_B - [\mu_B + \alpha_B] \bar{R}_B \\ \bar{S}'_C = \mu_C(\bar{S}_C + p\bar{I}_C) + \beta_C \bar{S}_C \frac{\bar{I}_B}{\bar{N}_B} - \mu_C \bar{S}_C \\ \bar{I}'_C = \beta_C \bar{S}_C \frac{\bar{I}_B}{\bar{N}_B} + (1-p)\mu_C \bar{I}_C - \mu_C \bar{I}_C. \end{array} \right.$$

Simplificando o sistema temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}'_B = (\mu_B + \alpha_B) \bar{R}_B - \beta_B \bar{S}_B \frac{\bar{I}_C}{\bar{N}_C} \\ \bar{I}'_B = \beta_B \bar{S}_B \frac{\bar{I}_C}{\bar{N}_C} - \lambda_B \bar{I}_B \\ \bar{R}'_B = \lambda_B \bar{I}_B - [\mu_B + \alpha_B] \bar{R}_B \\ \bar{S}'_C = \mu_C p \bar{I}_C - \beta_C \bar{S}_C \frac{\bar{I}_B}{\bar{N}_B} \\ \bar{I}'_C(t) = \beta_C \bar{S}_C \frac{\bar{I}_B}{\bar{N}_B} - p\mu_C \bar{I}_C. \end{array} \right.$$

A população de bovino é considerada constante:

$$\bar{N}'_B = \bar{S}'_B + \bar{I}'_B + \bar{R}'_B = 0.$$

O mesmo vale para população de carrapato:

$$\bar{N}'_C = \bar{S}'_C + \bar{I}'_C = 0.$$

Inserindo a mudança de variável no sistema anterior

$$S_B = \frac{\bar{S}_B}{\bar{N}_B}, I_B = \frac{\bar{I}_B}{\bar{N}_B}, R_B = \frac{\bar{R}_B}{\bar{N}_B}, S_C = \frac{\bar{S}_C}{\bar{N}_C}, I_C = \frac{\bar{I}_C}{\bar{N}_C}$$

e dividindo as populações constantes de bovinos e carrapatos por  $\bar{N}_B$  e  $\bar{N}_C$  respectivamente, obtemos:

$$S_B + I_B + R_B = 1 \quad \text{e} \quad S_C + I_C = 1.$$

Logo obtemos um sistema equivalente ao anterior:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_B = (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B - I_B) - \beta_B S_B I_C \\ I'_B = \beta_B S_B I_C - \lambda_B I_B \\ -(S'_B + I'_B) = \lambda_B I_B - (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B - I_B) \\ -I'_C = \mu_C p I_C - \beta_C S_C I_B \\ I'_C = \beta_C(1 - I_C)I_B - \mu_C p I_C. \end{array} \right.$$

Note que a terceira equação é combinação linear das duas primeiras equações e a quarta equação é múltipla da quinta. Logo temos um sistema equivalente que descreve a dinâmica da população de bovinos e carrapatos, dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_B = (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B - I_B) - \beta_B S_B I_C \\ I'_B = \beta_B S_B I_C - \lambda_B I_B \\ I'_C = \beta_C(1 - I_C)I_B - \mu_C p I_C, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

definido na região  $\Lambda = \{(S_B, I_B, I_C) : 0 \leq S_B + I_B \leq 1, 0 \leq I_C \leq 1\}$ .

**Proposição 4.2** *A região  $\Lambda = \{(S_B, I_B, I_C) : 0 \leq S_B + I_B \leq 1, 0 \leq I_C \leq 1\}$  é um conjunto positivamente invariante para o sistema (4.3).*

**Demonstração:** Vamos mostrar que se  $(S_B(0), I_B(0), I_C(0)) \in \Lambda$ , então  $(S_B(t), I_B(t), I_C(t)) \in \Lambda$ , para todo  $t \geq 0$ .

De fato, do sistema (4.3) temos

$$\begin{aligned} S'_B + I'_B &= (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B - I_B) - \lambda_B I_B, \\ &\leq (\mu_B + \alpha_B) - (\mu_B + \alpha_B)(S_B + I_B). \end{aligned}$$

Daí

$$S'_B + I'_B \leq (\mu_B + \alpha_B) - (\mu_B + \alpha_B)(S_B + I_B). \quad (4.4)$$

Multiplicando ambos os lados da inequação (4.4) pelo fator integrante  $e^{(\mu_B + \alpha_B)t}$ , vem

$$e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(S'_B + I'_B) + e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(\mu_B + \alpha_B)(S_B + I_B) \leq e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(\mu_B + \alpha_B),$$

disto segue que

$$\frac{d}{dt} [e^{(\mu_B + \alpha_B)t} (S_B + I_B)] \leq e^{(\mu_B + \alpha_B)t} (\mu_B + \alpha_B).$$

Integrando ambos os lados, da desigualdade anterior

$$\int_0^t \frac{d}{ds} e^{(\mu_B + \alpha_B)s} (S_B(s) + I_B(s)) ds \leq \int_0^t e^{(\mu_B + \alpha_B)s} (\mu_B + \alpha_B) ds.$$

Logo,

$$e^{(\mu_B + \alpha_B)s} (S_B(s) + I_B(s)) \Big|_0^t \leq e^{(\mu_B + \alpha_B)s} \Big|_0^t.$$

Desta forma,

$$e^{(\mu_B + \alpha_B)t} (S_B(t) + I_B(t)) - (S_B(0) + I_B(0)) \leq e^{(\mu_B + \alpha_B)t} - 1.$$

Assim pelo fato de  $0 \geq e^{-(\mu_B + \alpha_B)t} \leq 1, t \geq 0$ , segue que

$$S_B(t) + I_B(t) \leq e^{-(\mu_B + \alpha_B)t} (S_B(0) + I_B(0) - 1) + 1.$$

Logo temos que

$$S_B(t) + I_B(t) \leq 1.$$

Agora mostraremos que  $S_B + I_B \geq 0$ . De fato, do sistema (4.3) temos que

$$\begin{aligned} S'_B + I'_B &= (\mu_B + \alpha_B)(1 - S_B - I_B) - \lambda_B I_B, \\ &\geq (\mu_B + \alpha_B) - (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)(S_B + I_B). \end{aligned}$$

Daí,

$$S'_B + I'_B \geq (\mu_B + \alpha_B) - (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)(S_B + I_B). \quad (4.5)$$

Multiplicando ambos os lados da inequação (4.5) pelo fator integrante  $e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}$ , vem

$$e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} (S'_B + I'_B) + e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B) (S_B + I_B) \geq e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} (\mu_B + \alpha_B).$$

Assim, temos

$$\frac{d}{dt} [e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} (S_B + I_B)] \geq e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} (\mu_B + \alpha_B).$$

Integrando ambos os lados, da desigualdade anterior

$$\int_0^t \frac{d}{ds} e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)s} (S_B(s) + I_B(s)) ds \geq \int_0^t e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)s} (\mu_B + \alpha_B) ds.$$

Logo,

$$e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} (S_B(t) + I_B(t)) \Big|_0^t \geq \frac{e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} (\mu_B + \alpha_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} \Big|_0^t.$$

Desta forma,

$$e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} (S_B(t) + I_B(t)) - (S_B(0) + I_B(0)) \geq \frac{(\mu_B + \alpha_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} (e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} - 1),$$

Assim pelo fato de  $e^{-(\mu_B + \alpha_B)t} \leq 1, t \geq 0$ , segue que

$$S_B(t) + I_B(t) \geq \frac{(\mu_B + \alpha_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} (1 - e^{-(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}) + (S_B(0) + I_B(0)) e^{-(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}.$$

Logo temos que

$$S_B(t) + I_B(t) \geq 0.$$

Mostraremos agora que  $I_C(t) \leq 1$ . Do sistema (4.3), vem

$$\begin{aligned} I_C' &= \beta_C(1 - I_C)I_B - \mu_C p I_C \\ &\leq \beta_C(1 - I_C) - \mu_C p I_C \\ &\leq (\beta_C + \mu_C p) - (\beta_C + \mu_C p)I_C. \end{aligned}$$

Daí,

$$I_C' + (\beta_C + \mu_C p)I_C \leq (\beta_C + \mu_C p).$$

Fazendo  $(\beta_C + \mu_C p) = m$  e multiplicando ambos os membros da última desigualdade pelo fator integrante  $e^{mt}$ , de forma semelhante ao passo anterior, segue que

$$I_C(t) \leq 1.$$

Mostraremos agora que  $I_C(t) \geq 0$ . Do sistema (4.3), vem

$$\begin{aligned} I'_C &= \beta_C(1 - I_C)I_B - \mu_C p I_C \\ &\geq -\mu_C p I_C. \end{aligned}$$

Assim temos

$$I'_C + \mu_C p I_C \geq 0.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima pelo fator integrante  $e^{\mu_C p t}$ , obtemos

$$\begin{aligned} I'_C e^{\mu_C p t} + \mu_C p I_C e^{\mu_C p t} &\geq 0 \\ \frac{d}{dt} [e^{\mu_C p t} I_C] &\geq 0. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados, da desigualdade anterior

$$\int_0^t \frac{d}{ds} [e^{\mu_C p s} I_C(s)] ds \geq 0.$$

Logo,

$$e^{\mu_C p s} I_C(s) \Big|_0^t \geq 0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} I_C(t) e^{\mu_C p t} - I_C(0) &\geq 0 \\ I_C(t) e^{\mu_C p t} &\geq I_C(0) \\ I_C(t) &\geq I_C(0) e^{-\mu_C p t}. \end{aligned}$$

Logo  $I_C \geq 0$ .

Portanto, temos que  $\Lambda$  é um conjunto positivamente invariante. ■

A prova da existência de solução do sistema (4.3) é análoga a que será apresentada no modelo exponencial da doença Babesiose Bovina, Teorema 5.1.

### 4.2.1 Pontos de Equilíbrio

Para obter os pontos de equilíbrio igualamos o sistema (4.3) a 0, ou seja,  $S'_B = 0, I'_B = 0, I'_C = 0$ , assim obtemos os pontos de equilíbrio,  $G_0 = (1,0,0)$  que é o ponto livre da doença e  $G_1 = (S_{B_1}, I_{B_1}, I_{C_1})$  que é o ponto de equilíbrio endêmico, dado por:

$$\begin{aligned} S_{B_1} &= \frac{\lambda_B(\alpha_B + \mu_B)\beta_C + (\alpha_B + \mu_B + \lambda_B)\lambda_B\mu_C\mathcal{P}}{\beta_C[\alpha_B(\beta_B + \lambda_B) + \lambda_B\mu_B + \beta_B(\lambda_B + \mu_B)]} \\ I_{B_1} &= \frac{(\mu_B + \alpha_B)(\beta_B\beta_C - \lambda_B\mu_C\mathcal{P})}{\beta_C[\alpha_B(\beta_B + \lambda_B) + \mu_B(\beta_B + \lambda_B) + \lambda_B\beta_B]} \\ I_{C_1} &= \frac{(\mu_B + \alpha_B)(\beta_B\beta_C - \lambda_B\mu_C\mathcal{P})}{\beta_C\beta_C(\alpha_B + \mu_B) + (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)\beta_B\mu_C\mathcal{P}} \end{aligned}$$

### 4.2.2 Razão de Reprodução Básica

Podemos calcular a razão de reprodução básica, o  $R_0$ , através da matriz Jacobiana pelo método visto em Martcheva (2015). De acordo com o Teorema 3.3 temos que o comportamento do sistema não linear é o mesmo do linear próximo aos pontos de equilíbrio, assim utilizando a linearização temos a matriz Jacobiana para o sistema (4.3) abaixo:

$$J(S_B(t), I_B(t), I_C(t)) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B + \beta_B I_C) & -(\mu_B + \alpha_B) & -\beta_B S_B(t) \\ \beta_B I_C(t) & -\lambda_B & \beta_B S_B(t) \\ 0 & \beta_C(1 - I_C(t)) & -I_B(t)\beta_C - \mu_C\mathcal{P} \end{vmatrix},$$

Logo, aplicando o ponto livre da doença na matriz jacobiana:

$$J(G_0) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) & -(\mu_B + \alpha_B) & -\beta_B \\ 0 & -\lambda_B & \beta_B \\ 0 & \beta_C & -\mu_C\mathcal{P} \end{vmatrix}.$$

Temos que o  $\det(J(G_0) - \lambda I_d) = 0$ :

$$\begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda & -(\mu_B + \alpha_B) & -\beta_B \\ 0 & -\lambda_B - \lambda & \beta_B \\ 0 & \beta_C & -\mu_C\mathcal{P} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda_B - \lambda & \beta_B \\ \beta_C & -\mu_{CP} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= [-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda][(-\lambda_B - \lambda)(-\mu_{CP} - \lambda) - \beta_B\beta_C] \\
&= [-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda][\lambda^2 + \lambda(\lambda_B + \mu_{CP}) + \mu_{CP}\lambda_B - \beta_B\beta_C] \\
&= [-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda][\lambda^2 + \lambda(\lambda_B + \mu_{CP}) + \mu_{CP}\lambda_B - \beta_B\beta_C] \\
&= [-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda][\lambda^2 + \lambda(\lambda_B + \mu_{CP}) + \mu_{CP}\lambda_B(1 - R_0)] = 0
\end{aligned}$$

Portanto de acordo com o método para calcular a razão de reprodução básica visto em Martcheva (2015) temos que  $R_0 = \frac{\beta_B\beta_C}{\lambda_B\mu_{CP}}$ .

### 4.2.3 Análise de Estabilidade

**Teorema 4.4** *Se  $R_0 < 1$  então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $G_0$ ) é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Como foi visto no cálculo do  $R_0$  temos que

$$\det(J(G_0) - \lambda I_d) = [-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda][\lambda^2 + \lambda(\lambda_B + \mu_{CP}) + \mu_{CP}\lambda_B(1 - R_0)] = 0$$

Logo os autovalores obtidos de  $\det(J(G_0) - \lambda I_d) = 0$ , são

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -(\mu_B + \alpha_B), \\
\lambda_2 &= \frac{-(\lambda_B + \mu_{CP}) + \sqrt{(\lambda_B - \mu_{CP})^2 + 4\beta_B\beta_C}}{2}, \\
\lambda_3 &= \frac{-(\lambda_B + \mu_{CP}) - \sqrt{(\lambda_B - \mu_{CP})^2 + 4\beta_B\beta_C}}{2}.
\end{aligned}$$

É fácil ver que  $Re(\lambda_1) < 0$  e  $Re(\lambda_3) < 0$ . Por outro lado, para  $\lambda_2$  temos

$$\begin{aligned}
(\lambda_B - \mu_{CP})^2 + 4\beta_B\beta_C &= (\lambda_B + \mu_{CP})^2 - 4(\mu_{CP}\lambda_B - \beta_B\beta_C) \\
&< (\lambda_B + \mu_{CP})^2.
\end{aligned}$$

Portanto,  $Re(\lambda_2) < 0$ . Como a parte real dos autovalores é negativa então o ponto de equilíbrio livre da doença  $G_0$  é localmente assintoticamente estável. ■

**Teorema 4.5** *Se  $R_0 \leq 1$  então o ponto de equilíbrio  $(G_0)$  é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Inicialmente vamos fazer a mudança de variável no sistema (4.3) para mover até a origem do sistema de coordenadas o ponto de equilíbrio livre da doença.

$$\begin{aligned} X_B(t) &= 1 - S_B(t), \\ S_B(t) &= 1 - X_B(t), \\ X'_B(t) &= -S'_B(t). \end{aligned}$$

Substituindo no sistema (4.3), temos

$$\begin{cases} X'_B(t) = -(\mu_B + \alpha_B)X_B(t) + (\mu_B + \alpha_B)I_B(t) + \beta_B(1 - X_B(t))I_C(t), \\ I'_B(t) = \beta_B(t)(1 - X_B(t))I_C(t) - \lambda_B I_B(t), \\ I'_C(t) = \beta_C(1 - I_C(t))I_B(t) - \mu_C p I_C(t). \end{cases} \quad (4.6)$$

Por outro lado, considere  $V : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definida por

$$V(t) = V(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) = \beta_C I_B(t) + \lambda_B I_C(t).$$

Mostraremos que  $V$  é uma função Lyapunov. De fato, é fácil ver que  $V \in C^1(\Lambda)$ , então

$$\begin{aligned} V'(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) &= \beta_C \beta_B I_C(t) - \beta_C \beta_B X_B(t) I_C(t) - \beta_C \lambda_B I_B(t) \\ &\quad + \lambda_B \beta_C I_B(t) - \lambda_B \beta_C I_C(t) I_B(t) - \lambda_B \mu_C p I_C(t) \\ &= (\beta_C \beta_B - \lambda_B \mu_C p) I_C(t) - \beta_C \beta_B X_B(t) I_C(t) - \lambda_B \beta_C I_C(t) I_B(t) \\ &= I_C(t) (\beta_C \beta_B - \lambda_B \mu_C p - \beta_C \beta_B X_B(t) - \lambda_B \beta_C I_B(t)). \end{aligned}$$

Usando a hipótese  $R_0 \leq 1$ , temos que  $\beta_B \beta_C - \lambda_B \mu_C p \leq 0$ , logo  $V'(t) \leq 0$  o que implica que  $V(t)$  é uma função Lyapunov.

Por outro lado, com o objetivo de aplicar o Teorema de La-Salle, temos que encontrar o maior subconjunto invariante contido em  $V'(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) = 0$ .

Pela cálculo acima, vemos que há duas possibilidades,  $I_C(t) = 0$  ou  $\beta_C \beta_B - \mu_C p - \beta_C \beta_B X_B(t) - \lambda_B \beta_C I_B(t) = 0$ . Como a segunda possibilidade não pode ser zero, então a única opção é  $I_C(t) = 0$ . Portanto, obtemos que o conjunto em que  $V'(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) =$

0 e dado por  $\{(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) : I_C(t) = 0\}$ . Com isso concluímos que o ponto de equilíbrio livre da doença ( $G_0$ ) é o maior subconjunto invariante em  $\{(X_B(t), I_B(t), I_C(t)) : I_C(t) = 0\}$ . Portanto o ponto de equilíbrio ( $G_0$ ) é globalmente assintoticamente estável. ■

### 4.3 Simulação Numérica

Para realizar as simulações numéricas, levamos em conta que 60% dos carrapatos são infectados pelo Babesia, aproximadamente 51,84% da população bovina são infectados por Babesia, apenas 10% é controlado e a transmissão vertical é de 90%. Assumimos como condição inicial  $S_B(0) = 0,3756$ ,  $I_B(0) = 0.5184$ ,  $I_C(0) = 0.60$ .

Na primeira simulação, consideramos que a propagação da Babesiose na população bovina e a população de carrapatos está em equilíbrio, ou seja, as proporções de bovinos suscetíveis, bovinos infectados e carrapatos infectados são positivas e constantes durante todo o tempo.

Para realizar as simulações numéricas foram utilizados os parâmetros dados pela Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros para simulação numérica da doença Babesiose bovina do modelo com população constante

P.	$\mu_B$	$\mu_C$	$\lambda_B$	$\alpha_B$	$p$	$\beta_B$	$\beta_C$
V.	0,0002999	0,001609	0,000265	0,001	0,1	0,00061	0,00048

Fonte: Aranda et al. (2012).

A estabilidade ecológica pode ser vista na Figura Os autovalores da Matriz Jacobiana são todos negativos,  $(-0,7489, -0,7480, -0,7058)$ . Portanto, pelo Teorema 3.2, o ponto de equilíbrio é localmente assintoticamente estável. (10). A taxa de reprodução básica usada foi  $R_0 = 6.8$ .

Aqui nós simulamos um quadro em que a transmissão da Babesia é desacelerada com  $\beta_B = 0,0003$ . Os outros parâmetros permanecem constantes durante todo o tempo de modo que  $R_0 < 1$ . Tomamos  $R_0 = 0.33$ . A Figura (11) mostra que a solução do sistema se aproxima do ponto de equilíbrio livre da doença.

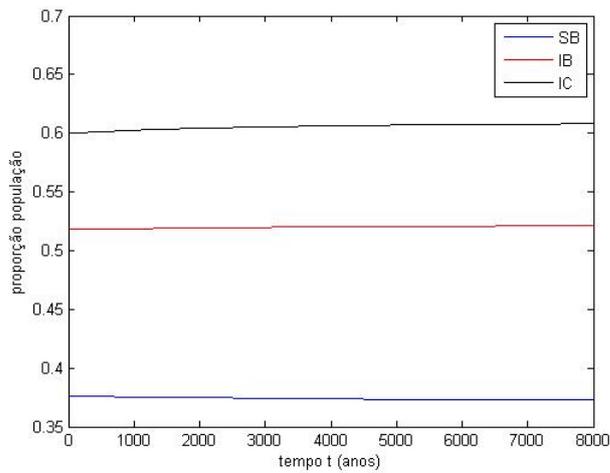


Figura 10 – Estabilidade Ecológica  $\beta_B = 0.00061$ ,  $\beta_C = 0.00048$ ,  $\alpha_B = 0.001$ .

Fonte: Da autora.

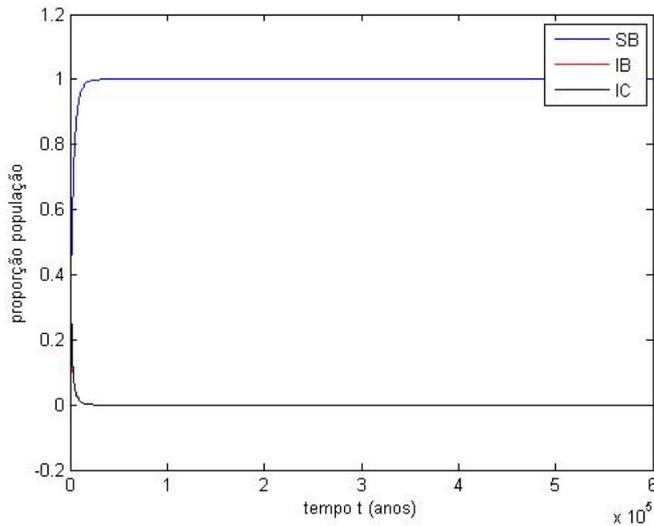


Figura 11 – Dinâmica quando  $\lambda_B = 0.0265$  e  $p = 0.5$

Fonte: Da autora.

Os autovalores da matriz Jacobiana são negativos,  $(-0,0265, -0,0013, -0,0008)$ . Portanto, pelo Teorema 3.2 o ponto de equilíbrio livre da doença é localmente assintoticamente estável.

Nós simulamos o efeito de condições iniciais diferentes em uma situação com alta transmissão da Babesia na população bovina, com  $\beta_B > 0.005$ , alta transmissão vertical na população de carrapatos, com  $p = 0.1$  e  $R_0 = 67.54$ . O restante dos parâmetros são constantes para  $R_0 > 1$ . Isso pode ser visto nas figuras (12) e (13).

Os autovalores da matriz Jacobiana são negativos,  $J(0,0498; 0,7893; 0.70) = (-0,0014; -0,0014; -0,0037)$ . Portanto o ponto de equilíbrio endêmico é localmente assintoticamente estável.

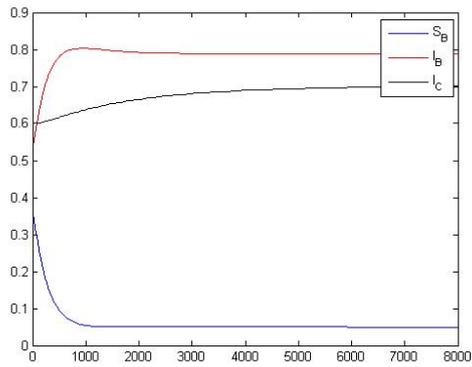


Figura 12 – Dinâmica quando

$$S_B(0) = 0,3756, I_B(0) = 0,5184, I_C(0) = 0,60.$$

Fonte: Da autora.

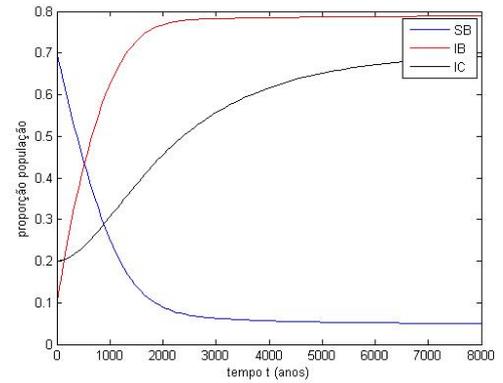


Figura 13 – Dinâmica quando

$$S_B(0) = 0,70, I_B(0) = 0,10, I_C(0) = 0,20.$$

Fonte: Da autora.

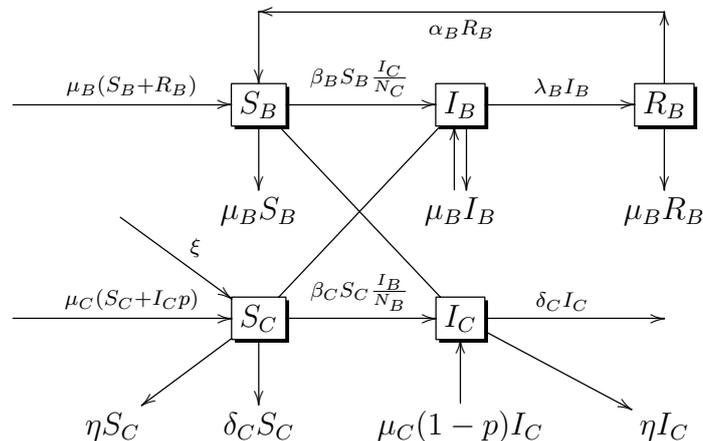
Observe nas figuras (12) e (13), que embora as condições iniciais sejam diferentes, a solução do sistema converge para o ponto de equilíbrio endêmico  $(S_B, I_B, I_C) = (0,0498; 0,7893; 0,70)$ , o que verifica os resultados teóricos obtidos.

## 5 MODELO BABESIOSE POPULAÇÃO NÃO CONSTANTE

Nesta seção vamos apresentar dois modelos para Babesiose, um modelo do tipo exponencial e um modelo do tipo Lokta Volterra, ambos com a população de carrapatos não constante. Vamos exibir os pontos de equilíbrio, a razão de reprodução básica, estabilidade e também realizar simulação numérica de ambos.

### 5.1 MODELO EXPONENCIAL

Modelo para doença Babesiose bovina considerando a população de carrapato não constante ao longo do tempo, assim as taxas de natalidade e mortalidade são consideradas diferentes  $\mu_C$  e  $\delta_C$ , respectivamente. Também são adicionadas ao modelo uma taxa de agente químico  $\eta$  e uma taxa de recrutamento de suscetíveis na população de carrapato  $\xi$ . Utilizando as definições e pressuposições vistas no modelo anterior da Babesiose, obtemos o diagrama que descreve a dinâmica da doença da Babesiose Bovina:



De acordo com o diagrama temos um sistema de equações diferenciais ordinárias que

modela a dinâmica da doença Babesiose:

$$\begin{cases} S'_B &= \mu_B(S_B + R_B) + \alpha_B R_B - \mu_B S_B - \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} \\ I'_B &= \mu_B I_B + \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \mu_B I_B - \lambda_B I_B \\ R'_B &= \lambda_B I_B - (\mu_B + \alpha_B) R_B \\ S'_C &= \xi + \mu_C(S_C + pI_C) - \delta_C S_C - \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta S_C \\ I'_C &= (1-p)\mu_C I_C - \delta_C I_C + \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta I_C. \end{cases}$$

Simplificando o temos um sistema equivalente:

$$\begin{cases} S'_B &= (\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B - I_B) - \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} \\ I'_B &= \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \lambda_B I_B \\ S'_C &= \xi + \mu_C(S_C + pI_C) - \delta_C S_C - \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta S_C \\ I'_C &= (1-p)\mu_C I_C - \delta_C I_C + \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta I_C. \end{cases} \quad (5.1)$$

### Hipóteses do modelo:

- $\mu_C - \delta_C - \eta < 0$  (taxa de nascimento menos a taxa de mortalidade é menor que a taxa de agente químico),
- $N_C(0)(\mu_C - \delta_C - \eta) + \xi \geq 0$ ,
- $N_B \leq N_C(0)$ .

E temos também que  $N'_C(t) = \xi + (\mu_C - \delta_C - \eta)N_C$ .

O sistema (5.1) é definido na região  $\Sigma = \{(S_B(t), I_B(t), S_C(t), I_C(t)) : 0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq N_B, 0 \leq S_C(t) + I_C(t) \leq N_C(0) - \frac{\xi}{\mu_C - \delta_C - \eta}\}$ .

**Proposição 5.1** *A região  $\Sigma$  é um conjunto positivamente invariante para o sistema (5.1).*

**Demonstração:** Vamos mostrar que se  $(S_B(0), I_B(0), S_C(0), I_C(0)) \in \Sigma$ , então  $(S_B(t), I_B(t), S_C(t), I_C(t)) \in \Sigma$ , para todo  $t \geq 0$ .

De fato, do sistema (5.1) temos

$$\begin{aligned} S'_B + I'_B &= (\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B - I_B) - \lambda_B I_B, \\ &\leq (\mu_B + \alpha_B)N_B - (\mu_B + \alpha_B)(S_B + I_B). \end{aligned}$$

Daí,

$$S'_B + I'_B \leq (\mu_B + \alpha_B)N_B - (\mu_B + \alpha_B)(S_B + I_B). \quad (5.2)$$

Multiplicando ambos os lados da inequação (5.2) pelo fator integrante  $e^{(\mu_B + \alpha_B)t}$ , vem

$$e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(S'_B + I'_B) + e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(\mu_B + \alpha_B)(S_B + I_B) \leq e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(\mu_B + \alpha_B)N_B.$$

Disto segue que

$$\frac{d}{dt} [e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(S_B + I_B)] \leq e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(\mu_B + \alpha_B)N_B.$$

Integrando ambos os lados, da desigualdade anterior

$$\int_0^t \frac{d}{ds} e^{(\mu_B + \alpha_B)s}(S_B(s) + I_B(s))ds \leq \int_0^t e^{(\mu_B + \alpha_B)s}(\mu_B + \alpha_B)N_B ds.$$

Logo,

$$e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(S_B(t) + I_B(t))|_0^t \leq e^{(\mu_B + \alpha_B)t}N_B|_0^t.$$

Desta forma,

$$e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(S_B(t) + I_B(t)) - (S_B(0) + I_B(0)) \leq e^{(\mu_B + \alpha_B)t}N_B - N_B.$$

Assim, pelo fato de  $e^{-(\mu_B + \alpha_B)t} \leq 1, t \geq 0$ , segue que

$$S_B(t) + I_B(t) \leq e^{-(\mu_B + \alpha_B)t}(S_B(0) + I_B(0) - N_B) + N_B.$$

Logo temos que

$$S_B(t) + I_B(t) \leq N_B.$$

Agora mostraremos que  $S_B + I_B \geq 0$ . De fato, do sistema (5.1) temos

$$\begin{aligned} S'_B + I'_B &= (\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B - I_B) - \lambda_B I_B, \\ &\geq (\mu_B + \alpha_B)N_B - (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)(S_B + I_B). \end{aligned}$$

Assim

$$S'_B + I'_B \geq (\mu_B + \alpha_B)N_B - (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)(S_B + I_B). \quad (5.3)$$

Multiplicando ambos os lados da inequação (5.3) pelo fator integrante  $e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}$ , vem

$$\begin{aligned} & e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}(S'_B + I'_B) + e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)(S_B + I_B) \\ & \geq e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}(\mu_B + \alpha_B)N_B. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} [e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}(S_B + I_B)] \geq e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}(\mu_B + \alpha_B)N_B.$$

Integrando ambos os lados, da desigualdade anterior temos

$$\int_0^t \frac{d}{ds} e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)s}(S_B(s) + I_B(s))ds \geq \int_0^t e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)s}(\mu_B + \alpha_B)N_B ds.$$

Logo,

$$e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}(S_B(t) + I_B(t)) - (S_B(0) + I_B(0)) \geq \frac{e^{(\mu_B + \alpha_B)t}(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} (e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} - 1).$$

Desta forma,

$$e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t}(S_B(t) + I_B(t)) - (S_B(0) + I_B(0)) \geq \frac{(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} (e^{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)t} - 1).$$

Assim, pelo fato de  $e^{-(\mu_B + \alpha_B)t} \leq 1, t \geq 0$ , segue que

$$S_B(t) + I_B(t) \geq \frac{(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} (1 - e^{-(\mu_B + \alpha_B)t}) + (S_B(0) + I_B(0))e^{-(\mu_B + \alpha_B)t}.$$

Logo temos que

$$S_B(t) + I_B(t) \geq 0.$$

Mostraremos agora que  $0 \leq S_C(t) + I_C(t) \leq N_C(0) - \frac{\xi}{\mu_C - \delta_C - \eta}$ . Do sistema (5.1),

vem

$$S'_C + I'_C = N'_C = \xi + (\mu_C - \delta_C - \eta)N_C.$$

Multiplicando a equação acima pelo fator integrante  $e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)t}$  temos

$$N'_C e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)t} - N_C(\mu_C - \delta_C - \eta)e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)t} = \xi e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)t}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} [e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)t} N_C] = \xi e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)t}.$$

Integrando ambos os lados, da equação anterior

$$\int_0^t \frac{d}{ds} [e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)s} N_C(s)] ds = \int_0^t \xi e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)s} ds.$$

Desta forma,

$$e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)t} N_C(t) - N_C(0) = \frac{\xi e^{-(\mu_C - \delta_C - \eta)t}}{-(\mu_C - \delta_C - \eta)} + \frac{\xi}{(\mu_C - \delta_C - \eta)},$$

$$N_C(t) = N_C(0)e^{(\mu_C - \delta_C - \eta)t} - \frac{\xi}{(\mu_C - \delta_C - \eta)} + \frac{\xi e^{(\mu_C - \delta_C - \eta)t}}{(\mu_C - \delta_C - \eta)}.$$

Por hipótese que  $N(0)(\mu_C - \delta_C - \eta) + \xi \geq 0$  então  $N_C(t)$  é crescente, para todo  $t \geq 0$ .

Logo  $N_C(t) = S_C(t) + I_C(t) \geq N_C(0) = S_C(0) + I_C(0) \geq 0$ ,

$$N_C(t) \leq N_C(0) - \frac{\xi}{(\mu_C - \delta_C - \eta)}.$$

Portanto a região  $\Sigma$  é um conjunto positivamente invariante. ■

**Teorema 5.1** *Considere o sistema abaixo*

$$\begin{cases} S'_B &= (\mu_B + \alpha_B)R_B - \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} \\ I'_B &= \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \lambda_B I_B \\ R'_B &= \lambda_B I_B - (\mu_B + \alpha_B)R_B \\ S'_C &= \xi + \mu_C(S_C + pI_C) - \delta_C S_C - \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta S_C \\ I'_C &= (1-p)\mu_C I_C - \delta_C I_C + \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta I_C \\ N'_C &= \xi + (\mu_C - \delta_C - \eta)N_C. \end{cases}$$

então o sistema tem uma única solução em  $\bar{\Sigma}$ .

**Demonstração:** O sistema acima definido em  $\bar{\Sigma} = \{(S_B, I_B, R_B, S_C, I_C, N_C) : 0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq N_B, 0 \leq S_C(t) + I_C(t) \leq N_C(0) - \frac{\xi}{\mu_C - \delta_C - \eta}\}$ .

Seja  $F : \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}^6$  dada por:

$$F(t, S_B, I_B, R_B, S_C, I_C, N_C) = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$$

em que  $f_1 = (\mu_B + \alpha_B)R_B - \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C}$ ,  $f_2 = \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \lambda_B I_B$ ,  $f_3 = \lambda_B I_B - (\mu_B + \alpha_B)R_B$ ,  
 $f_4 = \xi + \mu_C(S_C + pI_C) - \delta_C S_C - \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta S_C$ ,  $f_5 = (1-p)\mu_C I_C - \delta_C I_C + \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta I_C$ ,  
 $f_6 = \xi + (\mu_C - \delta_C - \eta)N_C$ .

Devemos mostrar que  $F$  é Lipschitz na segunda variável ou seja

$$\|F(t, u) - F(t, u')\| \leq L\|u - u'\|. \quad (5.4)$$

Assim temos que  $u = (S_B, I_B, R_B, S_C, I_C, N_C)$  então

$$\begin{aligned} & \|u - u'\| \\ &= \sqrt{(S_B - S'_B)^2 + (I_B - I'_B)^2 + (R_B - R'_B)^2 + (S_C - S'_C)^2 + (I_C - I'_C)^2 + (N_C - N'_C)^2} \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
& |f_1(t,u) - f_1(t,u')| \\
= & \left| (\mu_B + \alpha_B)(R_B - R'_B) - \left( \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \frac{\beta_B S'_B I'_C}{N'_C} \right) \right| \\
= & \left| (\mu_B + \alpha_B)(R_B - R'_B) - \beta_B (S_B - S'_B) \frac{I_C}{N_C} - \beta_B S'_B \left( \frac{I_C}{N_C} - \frac{I'_C}{N'_C} \right) \right| \\
= & \left| (\mu_B + \alpha_B)(R_B - R'_B) - \beta_B (S_B - S'_B) \frac{I_C}{N_C} - \beta_B S'_B \left( \frac{I_C - I'_C}{N_C} + \frac{I'_C}{N_C} - \frac{I'_C}{N'_C} \right) \right| \\
\leq & (\mu_B + \alpha_B) |R_B - R'_B| + \beta_B |S_B - S'_B| \frac{I_C}{N_C} + \beta_B \frac{S'_B}{N_C} |I_C - I'_C| \\
& + \beta_B \frac{I'_C S'_B}{N_C N'_C} |N'_C - N_C| \\
\leq & (\mu_B + \alpha_B) |R_B - R'_B| + \beta_B |S_B - S'_B| + \beta_B |I_C - I'_C| + \beta_B |N'_C - N_C| \\
\leq & L_1 (|R_B - R'_B| + |S_B - S'_B| + |I_C - I'_C| + |N'_C - N_C|) \\
\leq & 4L_1 \|u - u'\|
\end{aligned}$$

em que  $L_1 = \max\{(\alpha_B + \mu_B), \beta_B\}$ .

Logo

$$|f_1(t,u) - f_1(t,u')| \leq 4L_1 \|u - u'\|$$

De maneira análoga temos constantes  $L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$  tais que

$$|f_i(t,u) - f_i(t,u')| \leq L_i \|u - u'\|, i = 1,2,3,4,5,6.$$

Usando a norma do máximo, obtemos

$$\|F(t,u) - F(t,u')\| = \max\{|f_1(t,u) - f_1(t,u')|, |f_2(t,u) - f_2(t,u')|, \dots, |f_6(t,u) - f_6(t,u')|\}.$$

Portanto temos que  $F$  é Lipschitz na segunda variável.

■

### 5.1.1 Pontos de Equilíbrio

O sistema (5.1) possui pontos de equilíbrio,  $H_0$  é o ponto livre da doença e  $H_1$  o ponto endêmico. Para obter os pontos de equilíbrio igualamos o sistema (5.1) a 0.

$$\begin{cases} (\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B - I_B) - \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} = 0 \\ \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \lambda_B I_B = 0 \\ \xi + \mu_C(S_C + pI_C) - \delta_C S_C - \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta S_C = 0 \\ (1-p)\mu_C I_C - \delta_C I_C + \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \eta I_C = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Somando a primeira e a segunda equação de (5.5) temos:

$$(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B - I_B) - \lambda_B I_B = 0$$

$$(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B) = (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)I_B$$

$$I_B = \frac{(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B}. \quad (5.6)$$

Somando a terceira e a quarta equação de (5.5) obtemos:

$$\xi + (\mu_C - \delta_C - \eta)N_C = 0$$

$$N_C = \frac{-\xi}{\mu_C - \delta_C - \eta}. \quad (5.7)$$

Da segunda equação obtemos:

$$I_B = \frac{\beta_B S_B I_C}{\lambda_B N_C}. \quad (5.8)$$

Substituindo 5.8 na quarta equação obtemos:

$$I_C(\mu_C - p\mu_C - \delta_C - \eta) + \frac{\beta_C S_C}{N_B} \frac{\beta_B S_B I_C}{\lambda_B N_C} = 0$$

$$I_C[(\mu_C - p\mu_C - \delta_C - \eta) + \frac{\beta_C S_C}{N_B} \frac{\beta_B S_B}{\lambda_B N_C}] = 0. \quad (5.9)$$

Portanto por (5.9) há dois casos:

1. Se  $I_C = 0$  disto temos que  $I_{B_0} = 0$ ,  $S_{C_0} = \frac{-\xi}{\mu_C - \delta_C - \eta}$  e  $S_{B_0} = N_B$ . Logo o ponto livre da doença  $H_0 = (N_B, 0, \frac{-\xi}{\mu_C - \delta_C - \eta}, 0)$ .

2. Se  $I_C \neq 0$

$$(\mu_C - p\mu_C - \delta_C - \eta) + \frac{\beta_C S_C}{N_B} \frac{\beta_B S_B}{\lambda_B N_C} = 0$$

$$S_C S_B = \frac{\lambda_B N_B N_C}{-\beta_C \beta_B} (\mu_C - p\mu_C - \delta_C - \eta). \quad (5.10)$$

Igualando (5.6) e (5.8) e utilizando que  $N_C = S_C + I_C$ , temos:

$$\frac{(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} = \frac{\beta_B S_B (N_C - S_C)}{\lambda_B N_C}$$

$$\frac{(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - \frac{\beta_B S_B}{\lambda_B} = \frac{-\beta_B S_B S_C}{\lambda_B N_C}. \quad (5.11)$$

Substituindo (5.10) em (5.11) temos:

$$\frac{(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - S_B \left( \frac{\mu_B + \alpha_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} + \frac{\beta_B}{\lambda_B} \right) = \frac{\beta_B \lambda_B N_B}{\lambda_B \beta_B \beta_C} (\mu_C - p\mu_C - \delta_C - \eta)$$

$$S_{B_1} = \frac{(\mu_B + \alpha_B)\lambda_B N_B}{(\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \beta_B \lambda_B} + \frac{\beta_B N_B}{R_0} \frac{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)}{(\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \beta_B \lambda_B}. \quad (5.12)$$

Substituindo (5.12) em (5.6) obtemos:

$$I_{B_1} = \frac{(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - \frac{(\mu_B + \alpha_B)S_{B_1}}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B}. \quad (5.13)$$

Substituindo (5.12) em (5.10), obtemos:

$$S_C S_{B_1} = \frac{\lambda_B N_B N_C}{-\beta_C \beta_B} (\mu_C - p\mu_C - \delta_C - \eta)$$

$$S_{C_1} = \frac{-N_B \xi}{R_0 (\mu_C - \delta_C - \eta) S_{B_1}}. \quad (5.14)$$

Substituindo (5.14) e (5.7) temos:

$$I_C = \frac{-\xi}{\mu_C - \delta_C - \eta} + \frac{N_B \xi}{R_0 (\mu_C - \delta_C - \eta) S_{B_1}}$$

$$I_{C_1} = \frac{-\xi (R_0 S_{B_1} - N_B)}{R_0 (\mu_C - \delta_C - \eta) S_{B_1}}. \quad (5.15)$$

Logo o ponto de equilíbrio endêmico  $H_1 = (S_{B_1}, I_{B_1}, S_{C_1}, I_{C_1})$  é dado por:

$$\begin{aligned} S_{B_1} &= \frac{(\mu_B + \alpha_B) \lambda_B N_B}{(\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \beta_B \lambda_B} + \frac{\beta_B N_B}{R_0} \frac{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)}{(\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \beta_B \lambda_B}, \\ I_{B_1} &= \frac{(\mu_B + \alpha_B) N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - \frac{(\mu_B + \alpha_B) S_{B_1}}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B}, \quad S_{C_1} = \frac{-N_B \xi}{R_0 (\mu_C - \delta_C - \eta) S_{B_1}} \\ I_{C_1} &= \frac{-\xi (R_0 S_{B_1} - N_B)}{R_0 (\mu_C - \delta_C - \eta) S_{B_1}}. \end{aligned}$$

### 5.1.2 Razão de Reprodução Básica

Neste modelo obtemos também calculamos  $R_0$  através da matriz Jacobiana pelo método visto em Martcheva (2015). De acordo com o Teorema 3.3 temos que o comportamento do sistema não linear é o mesmo do linear próximo aos pontos de equilíbrio, assim utilizando a linearização temos a matriz Jacobiana para o sistema (5.1):

$$J(S_B(t), I_B(t), S_C(t), I_C(t)) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) - \frac{\beta_B I_C}{N_C} & -(\mu_B + \alpha_B) & \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C^2} & \frac{-N_C \beta_B S_B + \beta_B S_B I_C}{N_C^2} \\ \frac{\beta_B I_C}{N_C} & -\lambda_B & \frac{-\beta_B S_B I_C}{N_C^2} & \frac{N_C \beta_B S_B - \beta_B S_B I_C}{N_C^2} \\ 0 & \frac{-\beta_C S_C}{N_B} & \mu_C - \delta_C - \eta - \frac{\beta_C I_B}{N_B} & p\mu_C \\ 0 & \frac{\beta_C S_C}{N_B} & \frac{\beta_C I_B}{N_B} & (1-p)\mu_C - \delta_C - \eta \end{vmatrix}.$$

Aplicando o ponto de equilíbrio livre da doença na matriz jacobiana:

$$J(H_0) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) & -(\mu_B + \alpha_B) & 0 & \frac{\beta_B N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)}{\xi} \\ 0 & -\lambda_B & 0 & \frac{-\beta_B N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)}{\xi} \\ 0 & \frac{\beta_C \xi}{N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)} & \mu_C - \delta_C - \eta & p\mu_C \\ 0 & \frac{-\beta_C \xi}{N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)} & 0 & (1-p)\mu_C - \delta_C - \eta \end{vmatrix}.$$

Temos que  $\det(J(H_0) - \lambda I_d) = 0$ , assim:

$$\begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda & -(\mu_B + \alpha_B) & 0 & \frac{\beta_B N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)}{\xi} \\ 0 & -\lambda_B - \lambda & 0 & \frac{-\beta_B N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)}{\xi} \\ 0 & \frac{\beta_C \xi}{N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)} & \mu_C - \delta_C - \eta - \lambda & p\mu_C \\ 0 & \frac{-\beta_C \xi}{N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)} & 0 & (1-p)\mu_C - \delta_C - \eta - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda_B - \lambda & 0 & \frac{-\beta_B (\mu_C - \delta_C - \eta)}{\xi} \\ \frac{\beta_C \xi}{N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)} & \mu_C - \delta_C - \eta - \lambda & p\mu_C \\ \frac{-\beta_C \xi}{N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)} & 0 & (1-p)\mu_C - \delta_C - \eta - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)((\mu_C - \delta_C - \eta) - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda_B - \lambda & \frac{-\beta_B N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)}{\xi} \\ \frac{-\beta_C \xi}{N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)} & (1-p)\mu_C - \delta_C - \eta - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda \right) (\mu_C - \delta_C - \eta - \lambda) \left[ (-\lambda_B - \lambda) ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta - \lambda) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\beta_C \beta_B \xi N_B (\mu_C - \delta_C - \eta)}{(\mu_C - \delta_C - \eta) \xi N_B} \right] \\
&= \left( -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda \right) \left( -(\mu_C - \delta_C) - \lambda \right) \left[ \lambda^2 + \lambda (\lambda_B - ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta)) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_B ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta) - \beta_C \beta_B \right] \\
&= \left( -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda \right) \left( -(\mu_C - \delta_C) - \lambda \right) \left[ \lambda^2 + \lambda (\lambda_B - ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta)) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_B ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta) \left[ 1 + \frac{\beta_B \beta_C}{\lambda_B ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta)} \right] \right] = 0.
\end{aligned}$$

Logo o  $R_0 = -\frac{\beta_B \beta_C}{\lambda_B ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta)}$ . Lembrando que por hipótese  $\mu_C - \delta_C - \eta < 0$  então  $R_0 > 0$ .

### 5.1.3 Análise de Estabilidade

**Teorema 5.2** *Se  $R_0 < 1$  então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $H_0$ ) é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Como vimos no calculo do  $R_0$   $\det(J(H_0) - \lambda I_d) = 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
&\det (J(H_0) - \lambda I_d) \\
&= \left( -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda \right) \left( -(\mu_C - \delta_C) - \lambda \right) \left[ \lambda^2 + \lambda (\lambda_B - ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta)) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_B ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta) \left[ 1 + \frac{\beta_B \beta_C}{\lambda_B ((1-p)\mu_C - \delta_C - \eta)} \right] \right] = 0.
\end{aligned}$$

Assim os autovalores são  $\lambda_1 = -(\mu_B + \alpha_B)$ ,  $\lambda_2 = -(\mu_C - \delta_C)$  e  $\lambda_3, \lambda_4$  têm parte real negativa pois a equação quadrática possui apenas coeficientes positivos e por hipótese  $R_0 < 1$ . Portanto como todos autovalores possuem parte real negativa pelo Teorema 3.2 temos que o ponto de equilíbrio livre da doença  $H_0$  é localmente assintoticamente estável. ■

**Teorema 5.3** Se  $R_0 \leq 1$  então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $H_0$ ) é globalmente assintoticamente estável.

**Demonstração:** Considere  $q = \mu_C - \delta_C - \eta$ . Para transladar o ponto de equilíbrio livre da doença para origem, fazemos a seguinte substituição:

$$\begin{aligned} L_B &= N_B - S_B, & L_C &= \frac{-\xi}{q} - S_C, \\ S_B &= N_B - X_B, & S_C &= \frac{-\xi}{q} - L_C, \\ L'_B &= -S'_B, & L'_C &= -S'_C. \end{aligned}$$

Substituindo essas mudanças no sistema (5.1), resulta:

$$\begin{cases} L'_B &= -(\mu_B + \alpha_B)(N_B - N_B + L_B - I_B) + \frac{\beta_B(N_B - L_B)I_C}{N_C} \\ I'_B &= \frac{\beta_B(N_B - L_B)I_C}{N_C} - \lambda_B I_B \\ L'_C &= -\xi - (\mu_C - \delta_C - \eta)\left(\frac{-\xi}{q} - L_C\right) - p\mu_C I_C + \beta_C\left(\frac{-\xi}{q} - L_C\right)\frac{I_B}{N_B} \\ I'_C &= (-p\mu_C + q)I_C + \beta_C\left(\frac{-\xi}{q} - L_C\right)\frac{I_B}{N_B}. \end{cases}$$

Pelo fato de

$$\begin{aligned} \frac{\beta_B(N_B - L_B)I_C}{N_C} &\leq \beta_B I_C, \\ \beta_C\left(\frac{-\xi}{q} - L_C\right)\frac{I_B}{N_B} &\leq \frac{-\beta_C \xi}{q} \frac{I_B}{N_B}, \end{aligned}$$

temos que  $(L_B(t), I_B(t), L_C(t), I_C(t))$  satisfaz o sistema de desigualdades diferenciais

$$\begin{cases} L'_B &\leq -(\mu_B + \alpha_B)L_B + (\mu_B + \alpha_B)I_B + \beta_B I_C \\ I'_B &\leq \beta_B I_C - \lambda_B I_B \\ L'_C &\leq qL_C - p\mu_C I_C - \frac{\beta_C \xi}{q} \frac{I_B}{N_B} \\ I'_C &\leq (-p\mu_C + q)I_C - \frac{\beta_C \xi}{q} \frac{I_B}{N_B}. \end{cases}$$

Por outro lado, seja  $(X(t), Y(t), Z(t), W(t))$  solução do sistema

$$\begin{cases} X' &= -(\mu_B + \alpha_B)X + (\mu_B + \alpha_B)Y + \beta_B W \\ Y' &= \beta_B W_C - \lambda_B Y \\ Z' &= qZ - p\mu_C W - \frac{\beta_C \xi}{q} \frac{Y}{N_B} \\ W' &= (-p\mu_C + q)W - \frac{\beta_C \xi}{q} \frac{Y}{N_B}, \end{cases}$$

com condições iniciais  $(X(t_0), Y(t_0), Z(t_0), W(t_0)) = (X_0, Y_0, Z_0, W_0) \in \Sigma$ . Os autovalores do sistema acima são dados pelo determinante da seguinte matriz

$$J(X(t), Y(t), Z(t), W(t)) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) & (\mu_B + \alpha_B) & 0 & \beta_B \\ 0 & -\lambda_B & 0 & \beta_B \\ 0 & \frac{-\beta_C \xi}{q N_B} & q & -p\mu_C \\ 0 & \frac{-\beta_C \xi}{q N_B} & 0 & -p\mu_C + q \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \det(J - \lambda I_d) \\
&= \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda & (\mu_B + \alpha_B) & 0 & \beta_B \\ 0 & -\lambda_B - \lambda & 0 & \beta_B \\ 0 & \frac{-\beta_C \xi}{qN_B} & q - \lambda & -p\mu_C \\ 0 & \frac{-\beta_C \xi}{qN_B} & 0 & -p\mu_C + q - \lambda \end{vmatrix} \\
&= -(\mu_B + \alpha_B) - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda_B - \lambda & 0 & \beta_B \\ \frac{-\beta_C \xi}{N_B q} & q - \lambda & -p\mu_C \\ \frac{-\beta_C \xi}{N_B q} & 0 & -p\mu_C + q - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(q - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda_B - \lambda & \beta_B \\ \frac{-\beta_C \xi}{N_B q} & -p\mu_C + q \end{vmatrix} \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(q - \lambda) [(-\lambda_B - \lambda)(-p\mu_C + q) + \frac{\beta_C \beta_B \xi}{qN_B}] \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(-\mu_C - \delta_C - \lambda) [\lambda^2 + \lambda(\lambda_B - (-p\mu_C + q)) - \lambda_B(-p\mu_C + q) \\
&\quad + \frac{\beta_C \beta_B \xi}{qN_B}] \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(-\mu_C - \delta_C - \lambda) [\lambda^2 + \lambda(\lambda_B - (-p\mu_C + q)) - \lambda_B(-p\mu_C + q) \\
&\quad + \frac{\beta_C \beta_B \xi}{qN_B} - \beta_B \beta_C + \beta_B \beta_C] \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(-\mu_C - \delta_C - \lambda) [\lambda^2 + \lambda(\lambda_B - (-p\mu_C + q)) \\
&\quad - \lambda_B(-p\mu_C + q)[1 - R_0] + \beta_B \beta_C (1 - \frac{\xi}{qN_B})].
\end{aligned}$$

Logo temos que os autovalores  $\lambda_1 = -(\mu_B + \alpha_B)$ ,  $\lambda_2 = -(\mu_C - \delta_C)$  e  $\lambda_3, \lambda_4$  também possui parte real negativa pois a equação quadrática possui todos os coeficientes positivos se  $R_0 \leq 1$ , portanto concluímos pelo Teorema 3.2 que  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$ .

Pelo princípio da comparação, dado pelo Teorema 3.6, temos que as trajetórias  $(L_B(t), I_B(t), L_C, I_C(t))$  convergem para  $(0,0,0,0)$ , disto segue que  $(S_B(t), I_B(t), S_C, I_C(t))$  convergem para o ponto de equilíbrio livre da doença  $H_0$ . ■

### 5.1.4 Simulação Numérica

Para realizar as simulações numéricas para o modelo exponencial foram utilizados os parâmetros fixos  $\xi = 200$  e  $\eta = 0,0012$  vistos em Lashari e Zaman (2010) e também parâmetros fixos dados pela Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros para simulação numérica da doença Babesiose bovina do modelo exponencial

<i>Parâmetros</i>	$\mu_B$	$\mu_C$	$\delta_C$	$\lambda_B$	$\alpha_B$	$p$
<i>Valores</i>	0,0002999	0,001609	0,0006	0,00265	0,001	0,1

Fonte: Adaptado dos valores disponíveis em Aranda et al. (2012).

Vamos considerar a população total de bovinos  $N_B = 10000$  e como condição inicial a população de bovinos suscetíveis  $S_B(0) = 4050$ , população de bovinos infectados  $I_B(0) = 2050$ , população total de carrapatos  $N_C(0) = 14000$ , população de carrapatos suscetíveis  $S_C(0) = 10000$  e população de carrapatos infectados  $I_C(0) = 4000$  em todos os casos simulados.

Primeiramente foi realizado a separação de populações, gráficos somente da população de bovinos e gráficos somente da população de carrapatos, para melhor visualização.

Aqui nós simulamos para população de bovinos dois casos extremos, um caso em que a transmissão da Babesia é desacelerada com baixa transmissão horizontal,  $\beta_B$  e  $\beta_C$ , considerando  $R < 1$  e o tempo máximo  $t = 8000$  dias, Figura 14 e um caso contrário com alta transmissão da doença, considerando  $R > 1$ , Figura 15.

Note que na Figura 14 próximo de 2000 dias não há bovinos infectados, todos os bovinos são considerados suscetíveis, logo há a extinção da doença como é esperado por considerar a razão de reprodução básica,  $R_0 < 1$ . Agora na Figura 10 nos primeiros dias há um aumento na população de suscetíveis mas aproximadamente a partir de 500 dias a população de suscetíveis começa a diminuir enquanto a população de infectados só aumenta assim a partir de 1000 dias há uma mudança a população de infectados ultrapassa a população de suscetíveis e essa mudança permanece contínua, como é esperado pois consideramos  $R_0 > 1$  o que ocorre uma epidemia .

Simulando dois casos parecidos considerando  $R_0$  próximo de 1,  $R_0 = 0,9$  e  $R_0 = 1,1$ , Figura 16 e Figura 17, respectivamente. E as taxas de transmissão horizontal da Babesiose com valores próximos,  $\beta_B$  e  $\beta_C$ , e o tempo máximo de 8000 dias.

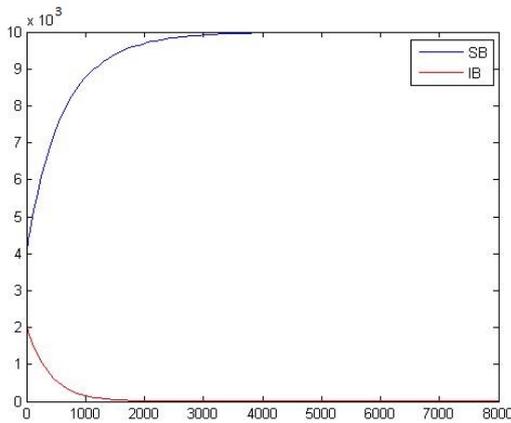


Figura 14 – Dinâmica da população de bovinos  $R_0 = 0,01$ ,  $\beta_B = 0,000159$ ,  $\beta_C = 0,00009$ .

Fonte: Da autora.

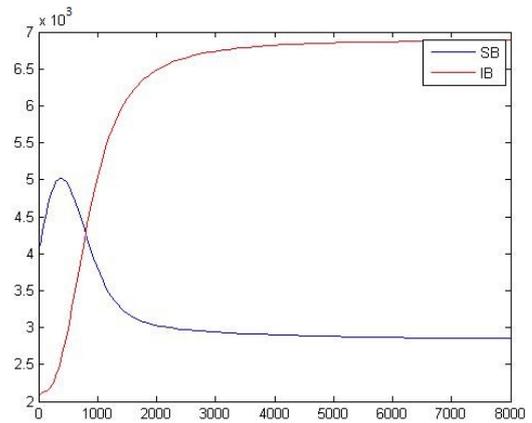


Figura 15 – Dinâmica da população de bovinos  $R_0 = 48$ ,  $\beta_B = 0,007$ ,  $\beta_C = 0,0064$ .

Fonte: Da autora.

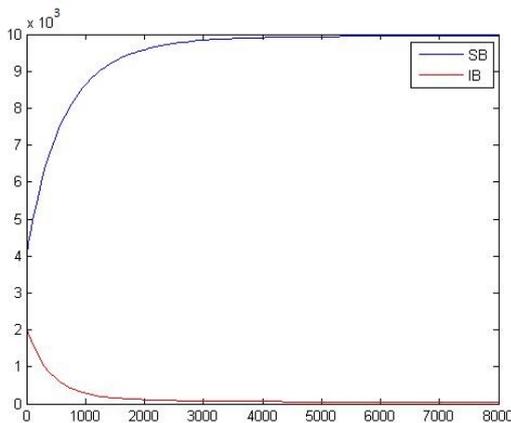


Figura 16 – Dinâmica da população de bovinos  $R_0 = 0,9$ ,  $\beta_B = 0,000999$ ,  $\beta_C = 0,000908$ .

Fonte: Da autora.

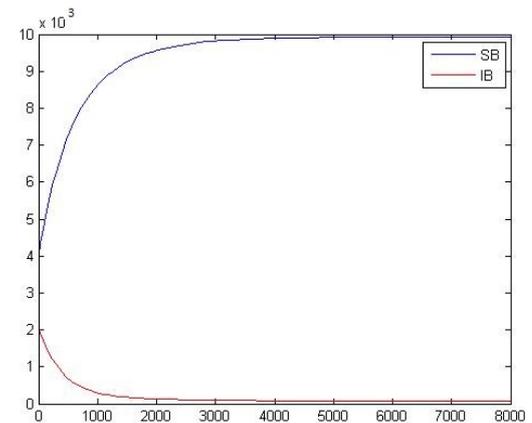


Figura 17 – Dinâmica da população de bovinos  $R_0 = 0,9$ ,  $\beta_B = 0,00108$ ,  $\beta_C = 0,000999$ .

Fonte: Da autora.

Note que na Figura 11 a população de bovinos suscetíveis aumenta constantemente enquanto a população de infectados diminui. E a partir de 4000 dias a população de infectados fica muito próxima de 0, os bovinos são suscetíveis ficam próximo da população total, como esperado pois  $R_0 < 1$ . O comportamento na Figura 17 é parecido.

Agora simulamos os mesmos casos anteriores no entanto para população de carrapatos.

Note que na Figura 18, com  $R < 1$ , desde o início a população de carrapatos infectados permanece próxima de 0, logo a população de carrapatos suscetíveis se aproxima da população total. Agora na Figura 19, com  $R_0 = 48 > 1$ , próximo de 1000 dias a população de infectados ultrapassa a de suscetíveis, a população de suscetíveis permanece constante próximo de 100000 carrapatos e a população de infectados fica próxima da população total.

Agora no caso em que  $R_0$  é bem próximo de 1,  $R_0 = 0,9$  Figura 20 e  $R_0 = 1,1$  Figura

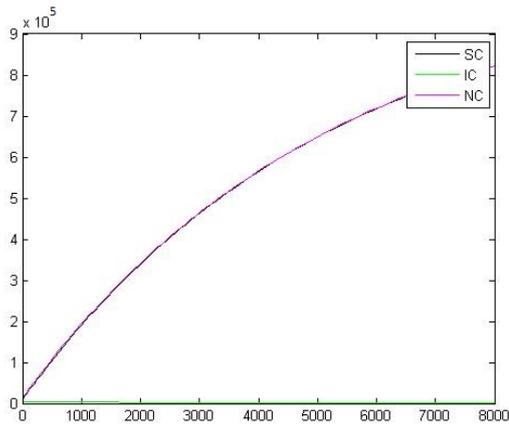


Figura 18 – Dinâmica da população de carrapatos  $R_0 = 0,01$ ,  $\beta_B = 0,000159$ ,  $\beta_C = 0,00009$ .

Fonte: Da autora.

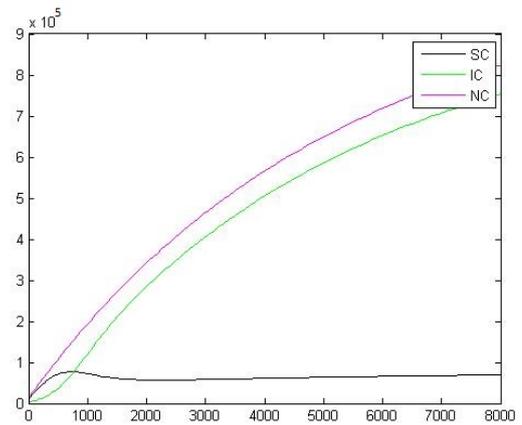


Figura 19 – Dinâmica da população de carrapatos  $R_0 = 48$ ,  $\beta_B = 0,007$ ,  $\beta_C = 0,0064$ .

Fonte: Da autora.

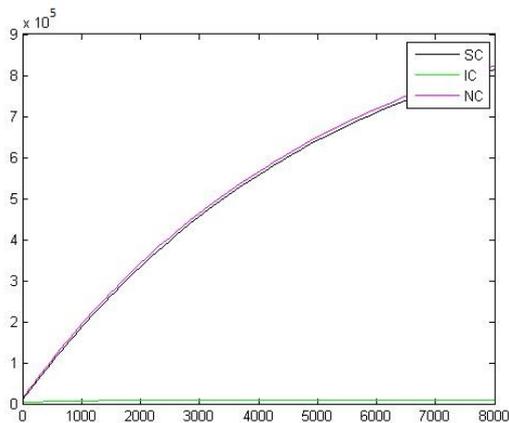


Figura 20 – Dinâmica da população de carrapatos  $R_0 = 0,9$ ,  $\beta_B = 0,000999$ ,  $\beta_C = 0,000908$ .

Fonte: Da autora.

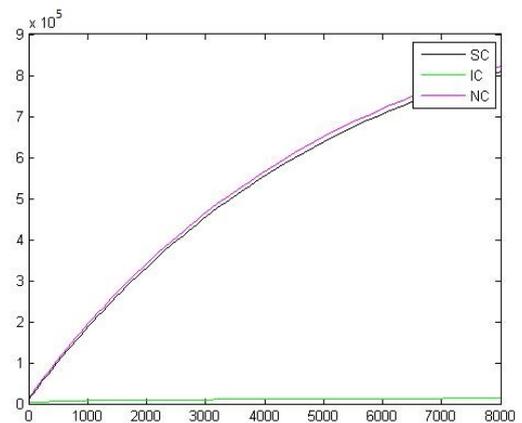


Figura 21 – Dinâmica da população de carrapatos  $R_0 = 1,1$ ,  $\beta_B = 0,00108$ ,  $\beta_C = 0,000999$ .

Fonte: Da autora.

21 o comportamento é praticamente o mesmo a população de infectados fica bem próxima de 0 e a população de suscetíveis fica muito próxima da população total.

Agora gráficos envolvendo as duas populações nos mesmos casos, no entanto com tempo máximo de 1000 dias.

Na Figura 22 com  $R_0 = 0,01$  é fácil ver que a população de infectados de bovinos infectados se aproxima de 0 ao longo do tempo. A população de carrapatos infectados fica próxima de 0, e a população de bovinos suscetíveis fica próxima de 10000. Agora a população de carrapatos infectados ficam próximos de 0 e a população de carrapatos suscetíveis fica bem próxima da população total, lembrando que a população de carrapatos é crescente como pode ser visto no gráfico.

Na Figura 23, com  $R_0 = 48$  nos primeiros dias as populações de suscetíveis são mai-

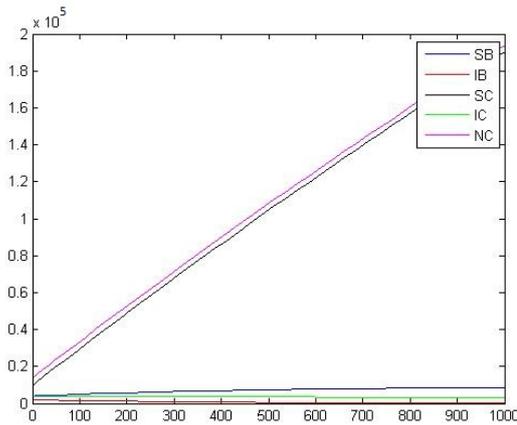


Figura 22 – Dinâmica das populações  
 $R_0 = 0,01$ ,  $\beta_B = 0,000159$ ,  $\beta_C = 0,00009$ .

Fonte: Da autora.

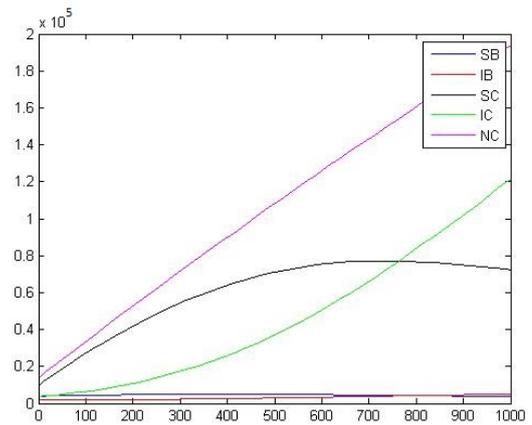


Figura 23 – Dinâmica das populações  
 $R_0 = 48$ ,  $\beta_B = 0,007$ ,  $\beta_C = 0,0064$ .

Fonte: Da autora.

ores do que infectados no entanto próximo de 800 dias a população de carrapatos infectados ultrapassa a população de suscetíveis e o mesmo ocorre com a população de bovinos, porém é nítido que a quantidade de carrapatos é bem maior que a de bovinos.

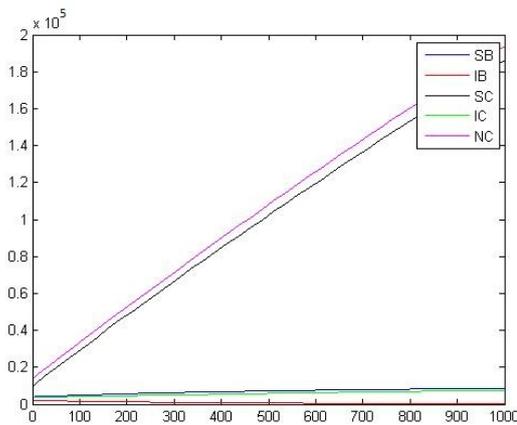


Figura 24 – Dinâmica das populações quando  
 $R_0 = 0,9$ ,  $\beta_B = 0,000999$ ,  $\beta_C = 0,000908$ .

Fonte: Da autora.

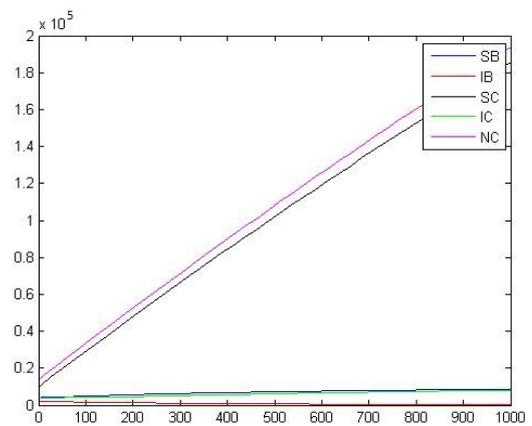


Figura 25 – Dinâmica das populações  
 $R_0 = 1,1$ ,  $\beta_B = 0,00108$ ,  $\beta_C = 0,000999$ .

Fonte: Da autora.

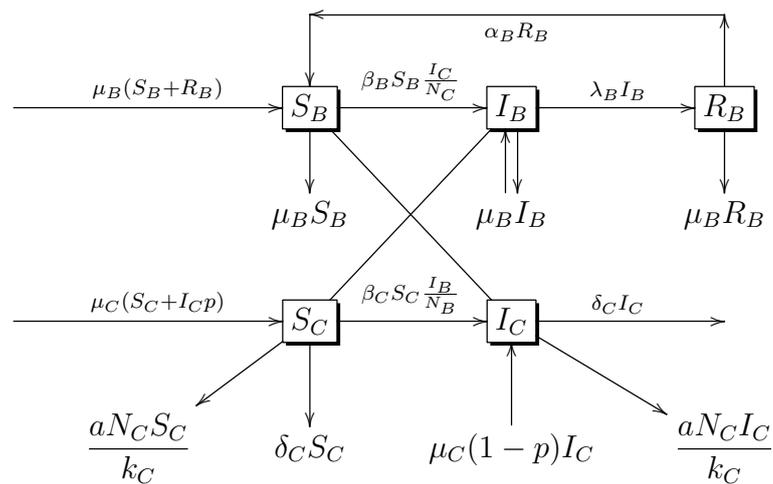
Nos casos com  $R_0$  próximo de 1,  $R_0 = 0,9$  Figura 24 e  $R_0 = 1,1$  Figura 25, o comportamento é parecido, próximo de 600 dias a população de bovinos infectados se aproxima de 0, a população de bovinos suscetíveis tem praticamente a mesma quantidade que a população de carrapatos infectados por volta de 1000, enquanto a população de carrapatos suscetíveis aumenta gradativamente ficando próximo a população total.

Também calculamos o valor do ponto endêmico considerando a razão de reprodução básica  $R_0 = 1,1$  e  $R_0 = 48$  e obtemos esses valores para as populações,  $S_B = 9244$ ,  $I_B =$

628,  $S_C = 1029779$ ,  $I_C = 17431$ ,  $S_B = 507$ ,  $I_B = 7885$ ,  $S_C = 430396$ ,  $I_C = 616724$ , respectivamente.

## 5.2 MODELO LOKTA-VOLTERRA

Agora para o modelo da Babesiose vamos acrescentar uma taxa de capacidade de suporte de acordo com o modelo Lokta Volterra. Utilizando as definições e pressuposições anteriores do modelo de Babesiose, considerando a população de carrapatos não constante ao longo do tempo, considerando também as hipóteses que  $k_C \geq \frac{aN(0)}{\mu_C - \delta_C}$  e  $a \geq \mu_C - \delta_C$  obtemos o seguinte diagrama que descreve a dinâmica da doença Babesiose:



De acordo com o diagrama obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve o modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_B = \mu_B(S_B + R_B) + \alpha_B R_B - \mu_B S_B - \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} \\ I'_B = \mu_B I_B + \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \mu_B I_B - \lambda_B I_B \\ R'_B = \lambda_B I_B - (\mu_B + \alpha_B) R_B \\ S'_C = \mu_C(S_C + p I_C) - \delta_C S_C - \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \frac{a S_C N_C}{k_C} \\ I'_C = (1-p)\mu_C I_C - \delta_C I_C + \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \frac{a I_C N_C}{k_C} \end{array} \right.$$

Simplificando o sistema obtemos um sistema equivalente:

$$\begin{cases} S'_B &= (\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B - I_B) - \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} \\ I'_B &= \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \lambda_B I_B \\ S'_C &= \mu_C(S_C + pI_C) - \delta_C S_C - \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \frac{aS_C N_C}{k_C} \\ I'_C &= (1-p)\mu_C I_C - \delta_C I_C + \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \frac{aI_C N_C}{k_C} \end{cases} \quad (5.16)$$

em que  $S_B, I_B, R_B, S_C$  e  $I_C$  são funções de  $t$  temos também que:

$$N'_C(t) = \mu_C N_C - \delta_C N_C - \frac{aN_C^2}{k_C} = N_C[\mu_C - \delta_C - \frac{aN_C}{k_C}].$$

O sistema é definido na região:

$$\Omega = \{(S_B(t), I_B(t), S_C(t), I_C(t)) : 0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq N_B(t), 0 \leq S_C(t) + I_C(t) \leq k_C\}.$$

**Proposição 5.2** *O conjunto delimitado pela região  $\Omega = \{(S_B(t), I_B(t), S_C(t), I_C(t)) : 0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq N_B, 0 \leq S_C(t) + I_C(t) \leq k_C\}$  é positivamente invariante para o sistema (5.16).*

**Demonstração:** Como foi provado no modelo exponencial da doença Babesiose que:

$$0 \leq S_B(t) + I_B(t) \leq N_B.$$

Mostraremos agora que  $0 \leq S_C(t) + I_C(t) \leq k_C$ . Do sistema (5.16), vem

$$S'_C + I'_C = N'_C = (\mu_C - \delta_C)N_C(t) - \frac{aN_C^2(t)}{k_C}.$$

Daí,

$$\frac{1}{N_C^2} N'_C - \frac{(\mu_C - \delta_C)}{N_C} = \frac{-a}{k_C}. \quad (5.17)$$

Multiplicando a equação (5.17) pelo fator integrante  $e^{(\mu_C - \delta_C)t}$  temos

$$\frac{1}{N_C^2} N'_C e^{(\mu_C - \delta_C)t} - \frac{(\mu_C - \delta_C)}{N_C} e^{(\mu_C - \delta_C)t} = \frac{-a}{k_C} e^{(\mu_C - \delta_C)t}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{-e^{(\mu_C - \delta_C)t}}{N_C} \right] = \frac{-ae^{(\mu_C - \delta_C)t}}{k_C}.$$

Integrando ambos os lados, da equação anterior

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left[ \frac{e^{(\mu_C - \delta_C)s}}{N_C(s)} \right] ds = \int_0^t \frac{ae^{(\mu_C - \delta_C)s}}{k_C} ds.$$

Desta forma,

$$\frac{e^{(\mu_C - \delta_C)t}}{N_C(t)} - \frac{1}{N_C(0)} = \frac{ae^{(\mu_C - \delta_C)t}}{(\mu_C - \delta_C)k_C} - \frac{a}{(\mu_C - \delta_C)k_C},$$

$$\frac{e^{(\mu_C - \delta_C)t}}{N_C(t)} = \frac{N_C(0)a(e^{(\mu_C - \delta_C)t} - 1) + (\mu_C - \delta_C)k_C}{N_C(0)(\mu_C - \delta_C)k_C},$$

$$N_C(t) = \frac{e^{(\mu_C - \delta_C)t}N_C(0)(\mu_C - \delta_C)k_C}{N_C(0)a(e^{(\mu_C - \delta_C)t} - 1) + (\mu_C - \delta_C)k_C},$$

o que mostra que  $N_C(t) \geq 0$ , para todo  $t \geq 0$ . Reescrevendo a expressão anterior:

$$N_C(t) = \frac{N_C(0)(\mu_C - \delta_C)k_C}{N_C(0)a\left(1 - \frac{1}{e^{(\mu_C - \delta_C)t}}\right) + \frac{(\mu_C - \delta_C)k_C}{e^{(\mu_C - \delta_C)t}}}.$$

E tomando limite  $t \rightarrow \infty$ , obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_C(t) = \frac{N(0)(\mu_C - \delta_C)k_C}{aN(0)} = \frac{(\mu_C - \delta_C)k_C}{a} \leq k_C.$$

Por outro lado note que  $N_C(t)$  é crescente. De fato:

$$N'_C(t) = \frac{e^{(\mu_C - \delta_C)t}N_C(0)(\mu_C - \delta_C)^2k_C[(\mu_C - \delta_C)k_C - N_C(0)a]}{[N_C(0)a(e^{(\mu_C - \delta_C)t} - 1) + (\mu_C - \delta_C)k_C]^2}.$$

Assim,  $N_C(s) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} N_C(t) \leq k_C$ , para todo  $t \geq 0$ .

Portanto a região  $\Omega$  é um conjunto positivamente invariante.



A prova de existência de solução do sistema (5.16) é de maneira análoga a que foi apresentada no modelo exponencial, Teorema 5.1.

### 5.2.1 Pontos de Equilíbrio

O sistema (5.16) possui pontos de equilíbrio,  $E_0$  é o ponto livre da doença e  $E_1$  o ponto endêmico. Para obter os pontos de equilíbrio vamos igualar o sistema (5.16) a 0, ou seja,  $S'_B = 0$ ,  $I'_B = 0$ ,  $S'_C = 0$  e  $I'_C = 0$ .

$$\begin{cases} (\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B - I_B) - \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} & = 0 \\ \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C} - \lambda_B I_B & = 0 \\ \mu_C(S_C + pI_C) - \delta_C S_C - \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \frac{aS_C N_C}{k_C} & = 0 \\ (1-p)\mu_C I_C - \delta_C I_C + \frac{\beta_C S_C I_B}{N_B} - \frac{aI_C N_C}{k_C} & = 0. \end{cases}$$

Somando a primeira e a segunda equação do sistema acima temos:

$$(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B - I_B) - \lambda_B I_B = 0.$$

Logo, temos que:

$$I_B = \frac{(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B}. \quad (5.18)$$

Somando a terceira e a quarta equação do sistema anterior obtemos:

$$N_C(\mu_C - \delta_C) - \frac{aN_C^2}{k_C} = 0.$$

Disto obtemos:

$$N_C = \frac{(\mu_C - \delta_C)k_C}{a}. \quad (5.19)$$

Da segunda equação temos:

$$I_B = \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C \lambda_B}. \quad (5.20)$$

Substituindo (5.19) e (5.20) na quarta equação obtemos:

$$I_C \left( \mu_C - \delta_C - p\mu_C - \frac{a(\mu_C - \delta_C)k_C}{ak_C} \right) + \frac{\beta_C S_C \beta_B S_B I_C a}{N_B (\mu_C - \delta_C) k_C \lambda_B} = 0$$

$$I_C \left( -\mu_C p + \frac{\beta_C S_C \beta_B S_B a}{N_B (\mu_C - \delta_C) k_C \lambda_B} \right) = 0. \quad (5.21)$$

Logo, em (5.21) há duas possibilidades

1. Se  $I_C = 0$ , resulta que  $I_{B_0} = 0$ ,  $S_{C_0} = \frac{(\mu_C - \delta_C)k_C}{a}$  e  $S_{B_0} = N_B$ . Logo o ponto livre da doença  $E_0 = (N_B, 0, \frac{(\mu_C - \delta_C)k_C}{a}, 0)$ .
2. Se  $I_C \neq 0$ , temos:

$$-\mu_C p + \frac{\beta_B S_B a \beta_C S_C}{k_C (\mu_C - \delta_C) N_B \lambda_B} = 0$$

$$S_C S_B = \frac{\lambda_B \mu_C p N_B k_C (\mu_C - \delta_C)}{\beta_C a \beta_B}. \quad (5.22)$$

Igualando (5.18) e (5.20), utilizando que  $N_C = S_C + I_C$  temos:

$$\frac{(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} = \frac{S_B \beta_B (N_C - S_C)}{\lambda_B N_C},$$

$$\frac{(\mu_B + \alpha_B)(N_B - S_B)}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - \frac{\beta_B S_B}{\lambda_B} = -\frac{\beta_B S_B S_C}{\lambda_B N_C} \quad (5.23)$$

Substituindo (5.22) em (5.23) obtemos:

$$\frac{(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - S_B \left( \frac{\mu_B + \alpha_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} + \frac{\beta_B}{\lambda_B} \right) = -\frac{\beta_B \mu_C p N_B \lambda_B}{\lambda_B \beta_B \beta_C},$$

$$\frac{(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - S_B \left( \frac{(\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \lambda_B\beta_B}{(\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)\lambda_B} \right) = -\frac{\beta_B\mu_C p N_B \lambda_B}{\lambda_B\beta_B\beta_C},$$

$$S_{B_1} = \frac{(\mu_B + \alpha_B)\lambda_B N_B}{(\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \lambda_B\beta_B} + \frac{\beta_B N_B (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)}{R_0((\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \lambda_B\beta_B)}. \quad (5.24)$$

Substituindo (5.24) em (5.18), temos:

$$I_{B_1} = \frac{(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - \frac{(\mu_B + \alpha_B)S_{B_1}}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B}. \quad (5.25)$$

Substituindo (5.24) em (5.22), obtemos:

$$S_C S_{B_1} = \frac{\lambda_B \mu_C p N_B k_C (\mu_C - \delta_C)}{\beta_C a \beta_B},$$

$$S_{C_1} = \frac{N_B k_C (\mu_C - \delta_C)}{a R_0 S_{B_1}}. \quad (5.26)$$

Sabemos que  $N_C = I_C + S_C$ , assim:

$$I_C = \frac{k_C (\mu_C - \delta_C)}{a} - \frac{N_B k_C (\mu_C - \delta_C)}{a R_0 S_{B_1}},$$

$$I_{C_1} = \frac{k_C (\mu_C - \delta_C)}{a} \left[ 1 - \frac{N_B}{R_0 S_{B_1}} \right]. \quad (5.27)$$

Logo, o ponto endêmico é  $E_1 = (S_{B_1}, I_{B_1}, S_{C_1}, I_{C_1})$  é dado por:

$$\begin{aligned} S_{B_1} &= \frac{(\mu_B + \alpha_B)\lambda_B N_B}{(\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \lambda_B\beta_B} + \frac{\beta_B N_B (\mu_B + \alpha_B + \lambda_B)}{R_0((\mu_B + \alpha_B)(\lambda_B + \beta_B) + \lambda_B\beta_B)}, \\ I_{B_1} &= \frac{(\mu_B + \alpha_B)N_B}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B} - \frac{(\mu_B + \alpha_B)S_{B_1}}{\mu_B + \alpha_B + \lambda_B}, \quad S_{C_1} = \frac{N_B k_C (\mu_C - \delta_C)}{a R_0 S_{B_1}}, \\ I_{C_1} &= \frac{k_C (\mu_C - \delta_C)}{a} \left[ 1 - \frac{N_B}{R_0 S_{B_1}} \right]. \end{aligned}$$

### 5.2.2 Razão de Reprodução Básica

Neste modelo da doença Babesiose com equação de Lokta Volterra vamos calcular a razão de reprodução básica através da matriz Jacobiana pelo método visto em Martcheva (2015). De acordo com o Teorema (3.3) temos que o comportamento do sistema não linear é o mesmo do linear próximo aos pontos de equilíbrio, assim utilizando a linearização temos a matriz Jacobiana para o sistema (5.16) abaixo:

$$J(S_B(t), I_B(t), S_C(t), I_C(t)) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{sendo } a_{11} &= -(\mu_B + \alpha_B) - \frac{\beta_B I_C}{N_C}, & a_{12} &= -(\mu_B + \alpha_B), & a_{13} &= \frac{\beta_B S_B I_C}{N_C^2}, \\ a_{14} &= \frac{-N_C \beta_B S_B + \beta_B S_B I_C}{N_C^2}, & a_{21} &= \frac{\beta_B I_C}{N_C}, & a_{22} &= -\lambda_B, & a_{23} &= -\frac{\beta_B S_B I_C}{N_C^2}, \\ a_{24} &= \frac{N_C \beta_B S_B - \beta_B S_B I_C}{N_C^2}, & a_{32} &= \frac{-\beta_C S_C}{N_B}, & a_{33} &= \mu_C - \delta_C - \frac{\beta_C I_B}{N_B} - \frac{2a S_C}{k_C} - \frac{a I_C}{k_C}, \\ a_{34} &= p\mu_C - \frac{a S_C}{k_C}, & a_{42} &= \frac{\beta_C S_C}{N_B}, & a_{43} &= \frac{\beta_C I_B}{N_B} - \frac{a I_C}{k_C}, & a_{44} &= (1-p)\mu_C - \delta_C - \frac{2a I_C}{k_C} - \frac{a S_C}{k_C}. \end{aligned}$$

Logo,

$$J(E_0) = \begin{vmatrix} -(\mu_B + \alpha_B) & -(\mu_B + \alpha_B) & 0 & \frac{-\beta_B N_B a}{(\mu_C - \delta_C) k_C} \\ 0 & -\lambda_B & 0 & \frac{\beta_B N_B a}{(\mu_C - \delta_C) k_C} \\ 0 & \frac{-\beta_C (\mu_C - \delta_C) k_C}{N_B a} & -(\mu_C - \delta_C) & (p-1)\mu_C + \delta_C \\ 0 & \frac{\beta_C (\mu_C - \delta_C) k_C}{N_B a} & 0 & -p\mu_C \end{vmatrix}.$$

Temos que  $\det(J(E_0) - \lambda I_d) = 0$ , assim:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix}
-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda & -(\mu_B + \alpha_B) & 0 & \frac{-\beta_B N_B a}{(\mu_C - \delta_C) k_C} \\
0 & -\lambda_B - \lambda & 0 & \frac{\beta_B N_B a}{(\mu_C - \delta_C) k_C} \\
0 & \frac{-\beta_C (\mu_C - \delta_C) k_C}{N_B a} & -(\mu_C - \delta_C) - \lambda & (p-1)\mu_C + \delta_C \\
0 & \frac{\beta_C (\mu_C - \delta_C) k_C}{N_B a} & 0 & -p\mu_C - \lambda
\end{vmatrix} \\
&= [-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda] \begin{vmatrix}
-\lambda_B - \lambda & 0 & \frac{\beta_B N_B a}{(\mu_C - \delta_C) k_C} \\
\frac{-\beta_C (\mu_C - \delta_C) k_C}{N_B a} & -(\mu_C - \delta_C) - \lambda & (p-1)\mu_C + \delta_C \\
\frac{\beta_C (\mu_C - \delta_C) k_C}{N_B a} & 0 & -p\mu_C - \lambda
\end{vmatrix} \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(-(\mu_C - \delta_C) - \lambda) \begin{vmatrix}
-\lambda_B - \lambda & \frac{\beta_B N_B a}{(\mu_C - \delta_C) k_C} \\
\frac{-\beta_C (\mu_C - \delta_C) k_C}{N_B a} & (p-1)\mu_C + \delta_C
\end{vmatrix} \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(-(\mu_C - \delta_C) - \lambda) \left[ (-\lambda_B - \lambda)(-p\mu_C - \lambda) - \frac{-\beta_C (\mu_C - \delta_C) k_C}{N_B a} \frac{\beta_B N_B a}{(\mu_C - \delta_C) k_C} \right] \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(-(\mu_C - \delta_C) - \lambda) [\lambda_B p \mu_C + \lambda \lambda_B + \lambda p \mu_C + \lambda^2 - \beta_B \beta_C] \\
&= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(-(\mu_C - \delta_C) - \lambda) \left[ \lambda^2 + \lambda(\lambda_B + p\mu_C) + \lambda_B p \mu_C \left[ 1 - \frac{\beta_B \beta_C}{\lambda_B p \mu_C} \right] \right] = 0
\end{aligned}$$

Portanto, a razão de reprodução básica é  $R_0 = \frac{\beta_B \beta_C}{\lambda_B p \mu_C}$ .

### 5.2.3 Análise de Estabilidade

**Teorema 5.4** *Se  $R_0 < 1$  então o ponto de equilíbrio livre da doença ( $E_0$ ) é localmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Como vimos no cálculo do  $R_0$  temos que:

$$\begin{aligned} & \det (J(E_0) - \lambda I_d) \\ &= (-(\mu_B + \alpha_B) - \lambda)(-(\mu_C - \delta_C) - \lambda)[\lambda^2 + \lambda(\lambda_B + p\mu_C) + \lambda_B p \mu_C [1 - \frac{\beta_B \beta_C}{\lambda_B p \mu_C}]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo os autovalores são  $\lambda_1 = -(\mu_B + \alpha_B)$ ,  $\lambda_2 = -(\mu_C - \delta_C)$  e  $\lambda_3, \lambda_4$  possuem parte real negativa pois a equação quadrática possuem todos os coeficientes positivos.

Como a parte real de todos autovalores é negativa, pelo Teorema 3.2 temos que o ponto de equilíbrio livre da doença  $E_0$  é localmente assintoticamente estável. ■

#### 5.2.4 Simulação Numérica

Para realizar as as simulações numéricas para o modelo Lokta-Volterra foram utilizados as mesmas condições iniciais do modelo exponencial, utilizamos também os parâmetros fixos  $a = 0,00108$  e  $k_C = 17000$  e também os parâmetros dados pela Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros para simulação numérica da doença Babesiose bovina do modelo Lokta Volterra

Parâmetros	$\mu_B$	$\mu_C$	$\delta_C$	$\lambda_B$	$\alpha_B$	$p$
Valores	0,0002999	0,001609	0,0006	0,00265	0,001	0,1

Fonte: Adaptado dos valores disponíveis em Aranda et al. (2012).

A razão de reprodução básica  $R_0$  e os parâmetros  $\beta_B$  e  $\beta_C$  vão variar de acordo com cada caso. Vamos considerar a população total de bovinos  $N_B = 10000$  e como condição inicial a população de bovinos suscetíveis  $S_B(0) = 4050$ , população de bovinos infectados  $I_B(0) = 2050$ , população total de carrapatos  $N_C(0) = 14000$ , população de carrapatos suscetíveis  $S_C(0) = 10000$  e população de carrapatos infectados  $I_C(0) = 4000$  em todos os casos simulados.

Nesta seção também foi apresentado os gráficos de cada população separadamente e em seguida gráficos envolvendo as duas populações, bovinos e carrapatos, igual a da seção anterior.

Aqui nós simulamos para população de bovinos dois casos extremos, um caso em que a transmissão da Babesia é desacelerada com baixa transmissão horizontal,  $\beta_B$  e  $\beta_C$ , considerando  $R < 1$  e o tempo máximo  $t = 8000$  dias, Figura 26 e um caso contrário com alta transmissão da doença, considerando  $R > 1$ , Figura 27.

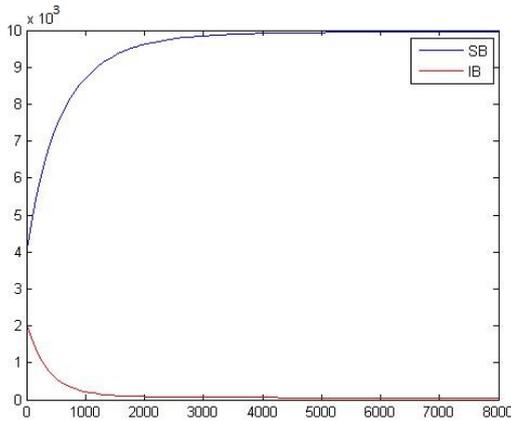


Figura 26 – Dinâmica da população de bovinos  $R_0 = 0,01$ ,  $\beta_B = 0,0001$ ,  $\beta_C = 0,00006$ .

Fonte: Da autora.

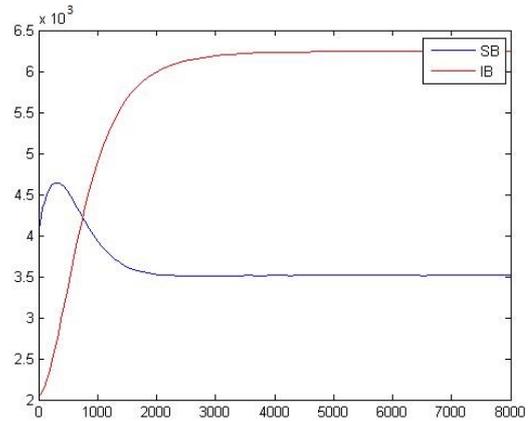


Figura 27 – Dinâmica da população de bovinos  $R_0 = 48$ ,  $\beta_B = 0,005$ ,  $\beta_C = 0,0041$ .

Fonte: Da autora.

Na Figura 26 a população de bovinos infectados fica bem próximo de 0 ao longo dos dias, os bovinos suscetíveis chegam a 10000, considerando a razão de reprodução básica,  $R_0 < 1$ . Agora na Figura 27 nos primeiros dias há um aumento na população de suscetíveis mas aproximadamente a partir de 500 dias a população de suscetíveis começa a diminuir enquanto a população de infectados só aumenta assim próximo de 1000 dias há uma mudança a população de infectados ultrapassa a população de suscetíveis e essa mudança permanece contínua, suscetíveis chegando a 3500 e infectados a 6250, como é esperado pois consideramos  $R_0 > 1$  o que ocorre uma epidemia.

Simulando dois casos parecidos considerando  $R_0$  próximo de 1,  $R_0 = 0,9$  e  $R_0 = 1,1$ , Figura 11 e Figura 17, respectivamente. E as taxas de transmissão horizontal da Babesiose com valores próximos,  $\beta_B$  e  $\beta_C$ , e o tempo máximo de 8000 dias.

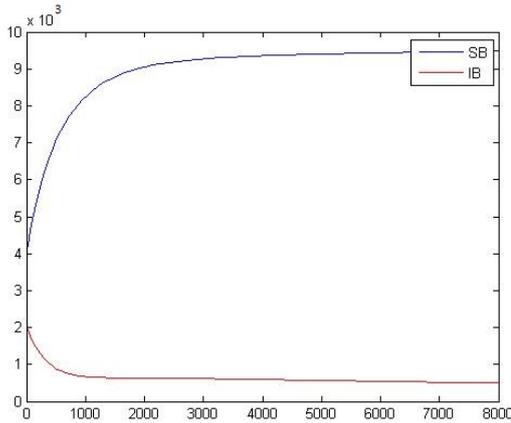


Figura 28 – Dinâmica da população de bovinos  $R_0 = 0,9$ ,  $\beta_B = 0,0007$ ,  $\beta_C = 0,00051$ .

Fonte: Da autora.

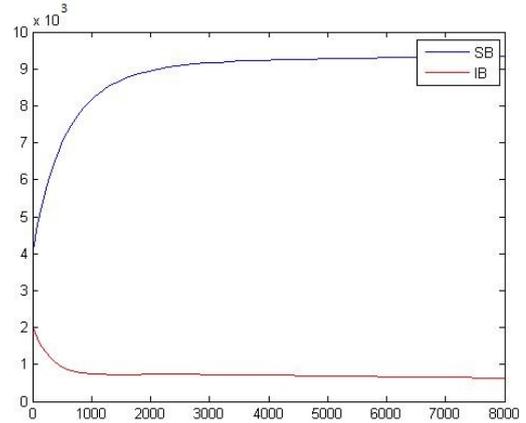


Figura 29 – Dinâmica da população de bovinos  $R_0 = 1,1$ ,  $\beta_B = 0,0008$ ,  $\beta_C = 0,0006$ .

Fonte: Da autora.

Note que na Figura 28 e na Figura 29 o comportamento é parecido, a população de suscetíveis aumenta enquanto a população de infectados diminui, porém vale ressaltar que na figura 28 a população de suscetíveis chega a 9500 bovinos e a população de infectados chega a 1500 bovinos e na Figura 29 a população de infectados é um pouco maior e a de suscetíveis um pouco menor que a Figura 28.

Agora simulamos os mesmos casos anteriores no entanto para população de carrapatos.

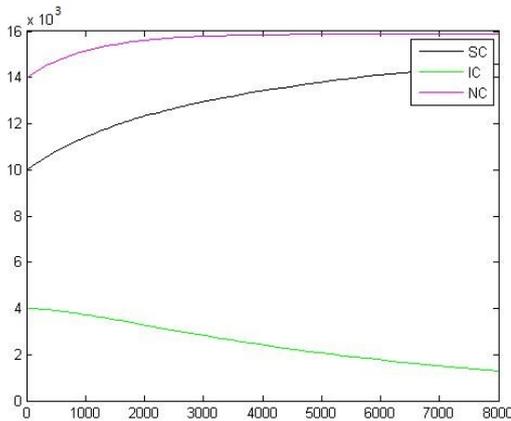


Figura 30 – Dinâmica da população de carrapatos  $R_0 = 0,01$ ,  $\beta_B = 0,0001$ ,  $\beta_C = 0,00006$ .

Fonte: Da autora.

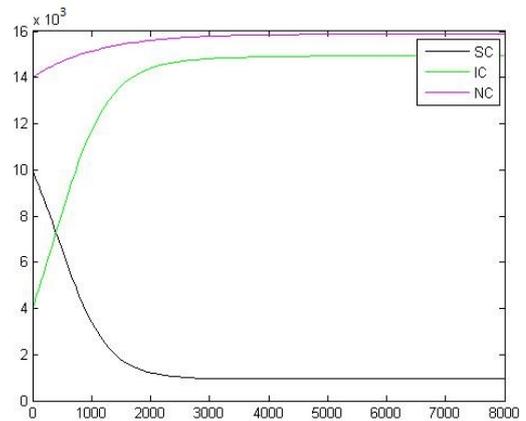


Figura 31 – Dinâmica da população de carrapatos  $R_0 = 48$ ,  $\beta_B = 0,005$ ,  $\beta_C = 0,0041$ .

Fonte: Da autora.

Note que na Figura 30, com  $R < 1$ , a população de carrapatos infectados diminui ao longo do tempo, a população de carrapatos suscetíveis se aproxima da população total, lembrando que a população total não ultrapassa o parâmetro  $k_C$  que é a capacidade de suporte. Agora na Figura 31, com  $R_0 = 48 > 1$ , desde o início a população de infectados cresce en-

quanto a população de suscetíveis apenas decresce, a população de infectados fica próxima da população total.

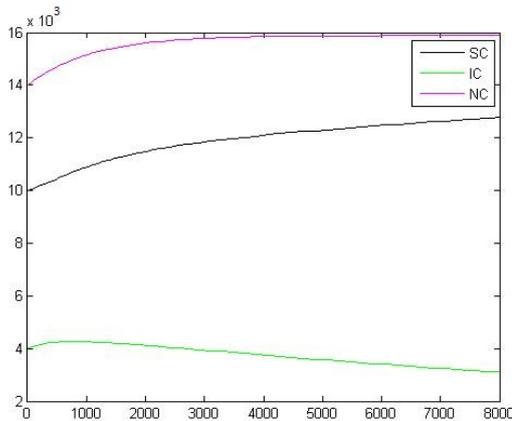


Figura 32 – Dinâmica da população de carrapatos  $R_0 = 0,9$ ,  $\beta_B = 0,0007$ ,  $\beta_C = 0,00057$ .

Fonte: Da autora.

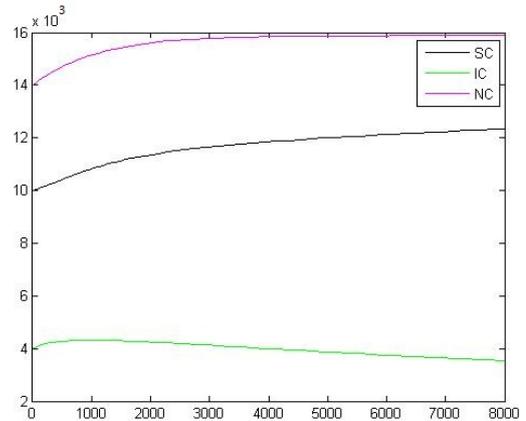


Figura 33 – Dinâmica da população de carrapatos  $R_0 = 1,1$ ,  $\beta_B = 0,0008$ ,  $\beta_C = 0,0006$ .

Fonte: Da autora.

Agora no caso em que  $R_0$  é bem próximo de 1,  $R_0 = 0,9$  Figura 32 e  $R_0 = 1,1$  Figura 33 o comportamento é praticamente o mesmo, a população de infectados decresce levemente enquanto a população de suscetíveis cresce vagarosamente ao longo do tempo e em 8000 dias ainda está distante da população total.

Simulando as duas populações, bovinos e carrapatos, exatamente nos mesmos casos anteriores, com razão de reprodução básica  $R_0 < 1$ ,  $R_0 > 1$  e  $R_0$  próximo de 1.

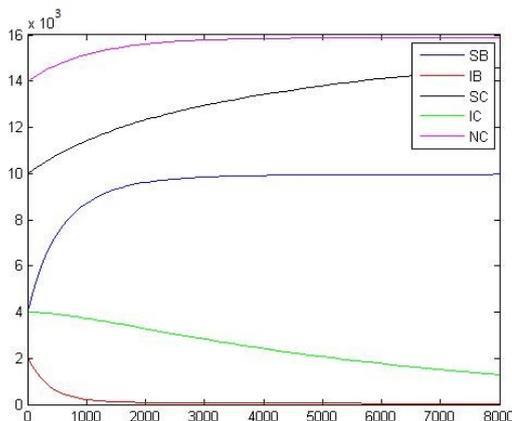


Figura 34 – Dinâmica das duas populações de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $\beta_B = 0,0001$ ,  $\beta_C = 0,00006$ .

Fonte: Da autora.

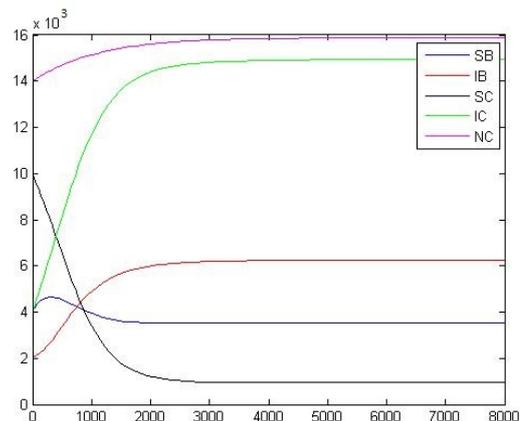


Figura 35 – Dinâmica das duas populações de bovinos quando  $R_0 = 48$ ,  $\beta_B = 0,005$ ,  $\beta_C = 0,0041$ .

Fonte: Da autora.

Note que na Figura 34 a população de bovinos infectados se aproxima de 0, enquanto a de suscetíveis cresce e depois estabiliza, como é esperado pois  $R_0 < 1$  então a doença é extinta.

Agora a população de carrapatos, os infectados decrescem ao longo do tempo e os suscetíveis crescem se aproximando da população total.

Na Figura 35 as populações de infectados crescem nos primeiros 2000 dias e depois estabilizam, a população de carrapatos infectados se aproxima da população total. Enquanto as populações de suscetíveis decrescem e depois também estabilizam.

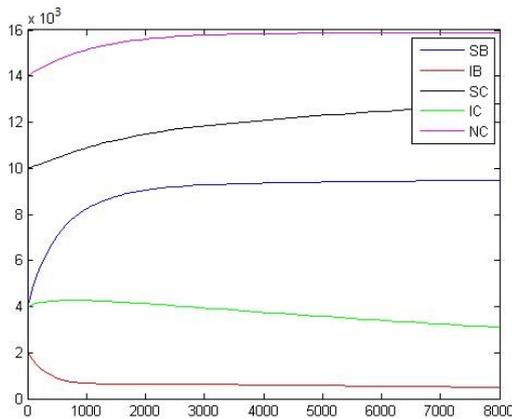


Figura 36 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9$ ,  $\beta_B = 0,0007$ ,  $\beta_C = 0,00057$ .

Fonte: Da autora.

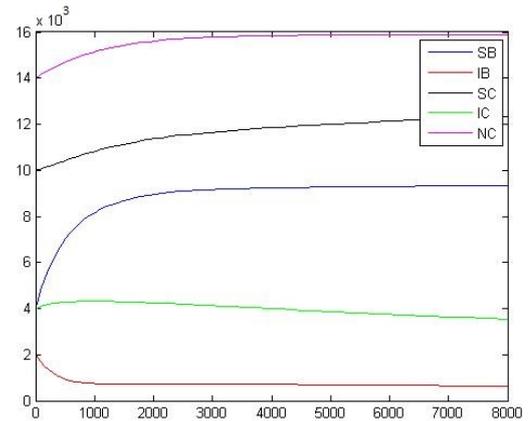


Figura 37 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1$ ,  $\beta_B = 0,0008$ ,  $\beta_C = 0,0006$ .

Fonte: Da autora.

Nos casos com  $R_0$  próximo de 1,  $R_0 = 0,9$  Figura 36 e  $R_0 = 1,1$  Figura 37, o comportamento é parecido, a população de bovinos infectados decresce rapidamente nos primeiros 1000 dias e depois continua a decrescer vagarosamente enquanto os suscetíveis tem o comportamento inverso, cresce. Agora a população de carrapatos infectados decresce lentamente e os suscetíveis crescem também lentamente ao longo do tempo.

Também calculamos o valor do ponto endêmico considerando a razão de reprodução básica  $R_0 = 1,1$  e  $R_0 = 48$  e obtemos esses valores para as populações,  $S_B = 9287$ ,  $I_B = 592$ ,  $S_C = 15547$ ,  $I_C = 335$ ,  $S_B = 621$ ,  $I_B = 7790$ ,  $S_C = 533$ ,  $I_C = 10557$ , respectivamente. Lembrando que a população de carrapatos não ultrapassa a capacidade de suporte que é de 17000.

## 6 RESULTADOS

Neste trabalho foram propostos dois modelos para a dinâmica da transmissão da doença Babesiose, generalizando o modelo visto em Aranda et al. (2012) e tendo como referência o modelo de Abatih et al. (2014), utilizando a população de carrapato não constante. Foram propostos dois modelos, um modelo do tipo exponencial e um modelo do tipo Lokta-Volterra com capacidade de suporte. Nesses modelos foram exibidos os pontos de equilíbrio, a razão de reprodução básica e feito a análise de estabilidade local do ponto livre da doença em ambos os modelos, e também a estabilidade global do ponto livre da doença do modelo exponencial, sempre considerando a população de carrapatos não constante. Foram feitas simulações numéricas para os dois modelos fixando os dados iniciais e alguns parâmetros, e variando a razão de reprodução básica, os parâmetros de taxa de transmissão horizontal e o tempo. Podemos notar que o modelo exponencial se estabiliza mais rápido do que o modelo de Lokta-Volterra.

## REFERÊNCIAS

- ABATI, E. et al. Mathematical analysis of the transmission dynamics of brucellosis among bison. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, Stuttgart, v. 38, n. 17, p. 3818-3832, 2014.
- ACHA, P. N.; SZYFRES, B. **Zoonosis y enfermedades transmissibles comunes al hombre y a los animales**. 3. ed. Washington: Organización Panamericana de La Salud, 2001.
- ARANDA, D. F. et al. A mathematical model for Babesiosis disease in bovine and tick populations. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, Stuttgart, v. 35, n. 3, p. 249-256, 2012.
- BARREIRA, L.; VALLS, C. **Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- BLOOD, D. C.; RADOSTITS, O. M. **Clínica Veterinária**. 7. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1991.
- BRAUER, F., NOHEL J. **Qualitative Theory of Differential Equations**. Nova York: Dover Publications, 1989.
- BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno** 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- CALLOW, L. L.; HOYTE, H. M. D. The separation of Babesia bigemina from Babesia argentina and Theileria mutans. **Australian veterinary Journal**, Brunswick v. 37, p. 381-390, 1961.
- CAMPERO C.M. Brucelosis en toros: una revisión. **Revista de Medicina Veterinaria**, Buenos Aires, v. 74, p. 8-14, 1993.
- CHOSEWOOD, L. C.; WILSON, D. E. **Biosafety in microbiological and biomedical laboratories**. Washington: US Government Printing Office, 2007.
- CORBEL M. J. et al. **Brucellosis in humans and animals**. Geneva: WHO Press, 2006.
- CRAWFORD R.P. et al. Epidemiology and surveillance. In: Nielsen K.; Duncan J.R. **Animal Brucellosis**. Boca Raton: CRC Press, 1990. cap. 7, p.131-151.
- EAGLESOME M. D.; GARCIA M. M. Microbial agents associated with bovine genital tract infection and semen. Part I. Brucella abortus, Leptospira, Campylobacter fetus and Trichomonas foetus. **Veterinary Bulletin**, Farnham Royal, v. 62, p. 743-775, 1992.
- EMBRAPA. **Gado de corte divulga, carrapato de boi prejuízos e controle**. 2000. Disponível em: <http://old.cnpgc.embrapa.br/publicacoes/divulga/GCD42.html> Acesso em:

31/08/2016.

FARIAS N. A. R. **Diagnóstico e Controle da Tristeza Parasitária Bovina**. Guaíba, Rio Grande do Sul: Editora Agropecuária, 1995.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

FURLONG, J.; MARTINS, J. R. S.; PRATA, M. C. A. Controle estratégico do carrapato bovino. **A Hora Veterinária**, Porto Alegre, v. 23, n. 137, p. 53-54, 2004.

FURLONG, J.; EVANS, D. Epidemiologia do carrapato *Boophilus microplus*: necessidade de uma abordagem compreensível para seu estudo realístico. In: SEMINÁRIO BRASILEIRO DE PARASITOLOGIA VETERINÁRIA, 7, SIMPÓSIO SOBRE A MOSCA-DE-CHIFRES *Haematobia irritans*, 2, 1991, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Colégio Brasileiro de Parasitologia Veterinária, 1991. p. 48-50.

GOMES, A. O carrapato do boi *Boophilus*, ciclo, biologia, epidemiologia, patogenicidade e controle. In: KESSLER, R. H.; SCHENK, M. A. M. **Carrapato, tristeza parasitária e tripanossomose dos bovinos**. Campo Grande: Embrapa Gado de Corte, 1998. cap.1, p.9-44.

GORVEL, J. P.; MORENO, E. Brucella intracellular life: from invasion to intracellular replication. **Veterinary Microbiology**, Amsterdam, v. 90, p. 281-297, 2002.

HIRSH, D. C.; ZEE, Y. C. **Microbiologia Veterinária**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2003.

HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. **Evolutionary games and population dynamics**. Cambridge University Press, 1998.

IBGE. **Censo Agropecuário 2006. Agricultura Familiar. Brasil, Grandes Regiões e Unidades da Federação**. IBGE, 2009.

KESSLER, R. H.; SCHENK, M. A. M. **Carrapato, tristeza parasitária e tripanossomose dos bovinos**. Campo Grande: Embrapa Gado de Corte, 1998.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.

KIKUGAWA, M. M. **Tristeza Parasitária Bovina (Babesiose x Anaplasiose)**. 2009. 41f. Trabalho de Conclusão de Curso (Medicina Veterinária) - Faculdades Metropolitanas Unidas, São Paulo, 2009.

LASHARI, A. A.; ZAMAN G. Global dynamics of vector-borne diseases with horizontal transmission in host population. **Computers & Mathematics with Applications**, New York, v. 61, n. 4, p. 745-754, 2011.

LEMONS, A. A. Principais enfermidades de bovinos de Corte do Mato Grosso do Sul: reconhecimento e diagnóstico. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul,

1998.

LIMA, L. E. **Curso de Análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Projeto Euclides, 2014. v. 2.

MAHONEY, D. F.; MIRRE, G. B. A note on the transformation of *Babesia bovis* (syn *B. argentina*) by the one host tick *Boophilus microphus*. **Research in veterinary science**, London, v. 26, p. 253-254, 1979.

MARQUES, D. C. **Criação de bovinos**. 7. ed. Belo Horizonte: Consultoria Veterinária e Publicações, 2003.

MARTCHEVA, M. **An Introduction to Mathematical Epidemiology**. New York: Springer, 2015.

NICOLETTI P. The epidemiology of bovine brucellosis. **Advances in Veterinary Science and Comparative Medicine**, San Diego, v. 24, p. 69-98, 1980.

OLASCOAGA, C. R. C. Diagnóstico serológico de la brucelosis. **Zoonosis**, Buenos Aires, v. 18, p. 107-141, 1976.

PAULIN L. M.; FERREIRA J. S. **O Combate à Brucelose Bovina: situação brasileira**. Jaboticabal: Funep, 2003.

PEREIRA, D. C; SOUZA, L. R. G.; BAFFI, A. M. Carrapatos de bovinos: método de controle e mecanismos de resistência e acaricidas. **Documentos**, Planaltina, v. 276, p. 1-28, 2010.

POESTER, F. P. et al. Diagnóstico da brucelose bovina. **Cadernos Técnicos de Veterinária e Zootecnia**, Belo Horizonte, n. 47, p. 13-29, 2005.

REBHUN, W. C. **Doenças do gado leiteiro**. São Paulo: Roca, 2000.

RIBEIRO, M. G. et. al. Aglutininas anti-*Brucella abortus* no soro e em secreção de bursite cervical em equinos. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, Belo Horizonte, v. 55, n. 1, P. 99-110 2003.

SAMARTINO L. E.; ENRIGHT F. M. Patogenesis of abortion of bovine brucellosis. **Comparative Immunology, Microbiology and Infectious Diseases**, Oxford, v. 16, p. 95-101, 1993.

SCHLESINGER, S. **Onde pastar? O gado bovino no Brasil**. Rio de Janeiro: FASE, 2010.

SILVA F. L. et al. Brucelose Bovina. **Cadernos Técnicos de Veterinária e Zootecnia**, Belo Horizonte, n. 47, p. 1-12, 2005.

SMITH, B. P. **Tratado de Medicina Interna de Grandes Animais.**, São Paulo: Manole LTDA, 1993.

STRIGFELLOW D.A; SEIDEL S. M. **Manual da Sociedade Internacional de Transferência de Embriões**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Transferência de Embriões, 1999.

THOEN, C. O. ET. AL. **Pathogenesis of bacterial infections in animals**. 2. ed. Ames: Iowa State University Press, p. 236-247, 1993.

WRAY, C. Survival and spread of pathogenic bacteria of veterinary importance within the environment. **Veterinary Bulletin**, Farnham Royal, v. 45, p. 543-550, 1975.

XAVIER, M. N. et al. Pathology, immunohistochemistry and bacteriology of tissues and milk of cows and fetuses experimentally infected with *Brucella abortus*. **Journal of Comparative Pathology**, Edinburgh, v. 140, p. 149-157, 2009.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A - Gráficos do Modelo Exponencial

Agora nesse apêndice vamos apresentar todos os gráficos simulados neste trabalho, para o modelo exponencial. Vamos considerar a população total de bovinos  $N_B = 10000$  e como condição inicial a população de bovinos suscetíveis  $S_B(0) = 4050$ , população de bovinos infectados  $I_B(0) = 2050$ , população total de carrapatos  $N_C(0) = 14000$ , população de carrapatos suscetíveis  $S_C(0) = 10000$  e população de carrapatos infectados  $I_C(0) = 4000$  em todos os casos simulados. Para realizar as simulações numéricas para o modelo exponencial foram utilizados os parâmetros fixos  $\xi = 200$  e  $\eta = 0,0012$  vistos em Lashari e Zaman (2010) e também parâmetros fixos dados pela Tabela 5.

Tabela 5 – Parâmetros para simulação numérica do Modelo Exponencial da doença Babesiose Bovina .

Parâmetros	$\mu_B$	$\mu_C$	$\lambda_B$	$\alpha_B$	$p$	$\delta_C$
Valores	0,0002999	0,001609	0,00265	0,001	0,1	0,0006

Fonte: Adaptado dos valores disponíveis em Aranda et al. (2012).

Os gráficos a seguir representam a população de bovinos com razão de reprodução básica  $R_0 = 0,01$  e taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,000159$  e  $\beta_C = 0,00009$  com o tempo máximo variando de 200 a 30000.

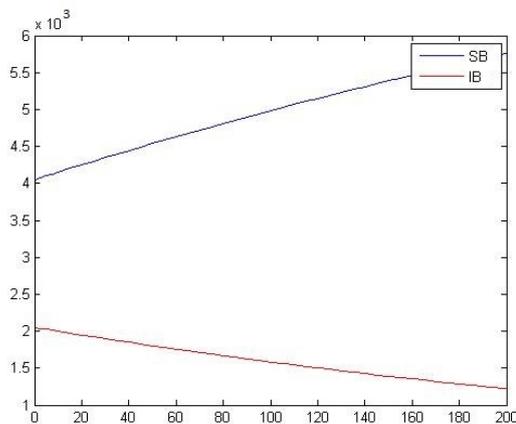


Figura 38 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

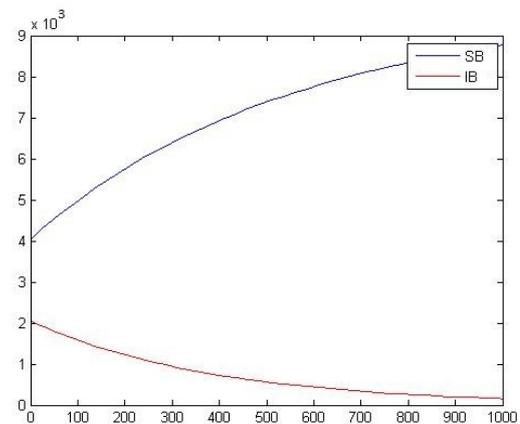


Figura 39 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

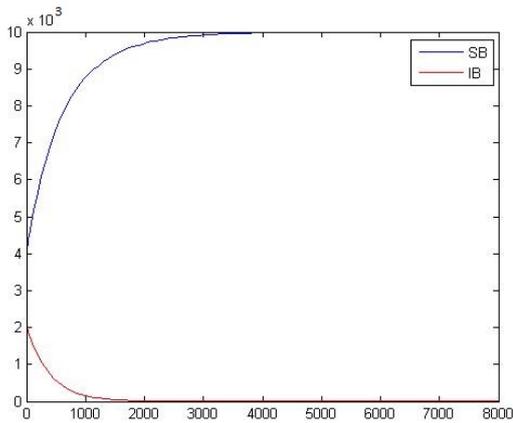


Figura 40 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

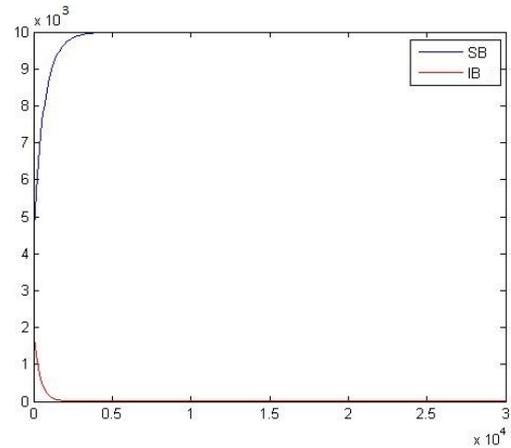


Figura 41 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

Note que na Figura 38 há o crescimento da população de suscetíveis e o decréscimo da população de infectados, na Figura 39 a população de infectados já está próxima de 0. Agora na Figura 40 a partir 1000 dias a população de infectados se aproxima mais de 0 e a população de suscetíveis estabiliza a partir 3000 dias, como é esperado pois  $R_0 < 1$ . Logo há extinção da doença, assim na Figura 41 o comportamento permanece o mesmo.

Os gráficos a seguir representam a população de bovinos com razão de reprodução básica  $R_0 = 0,9$  e taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,000999$  e  $\beta_C = 0,000908$  com o tempo máximo variando de 200 a 200000.

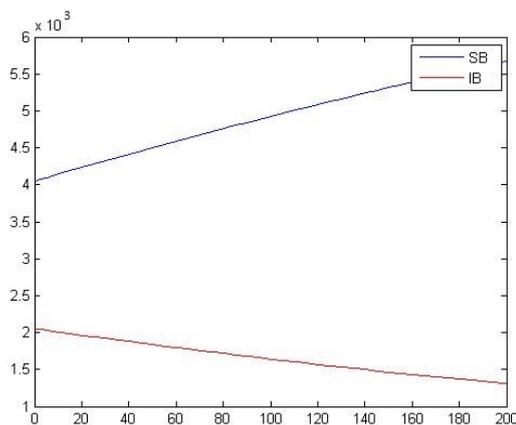


Figura 42 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

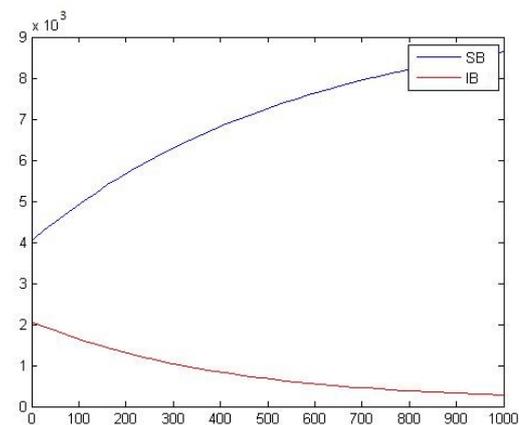


Figura 43 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

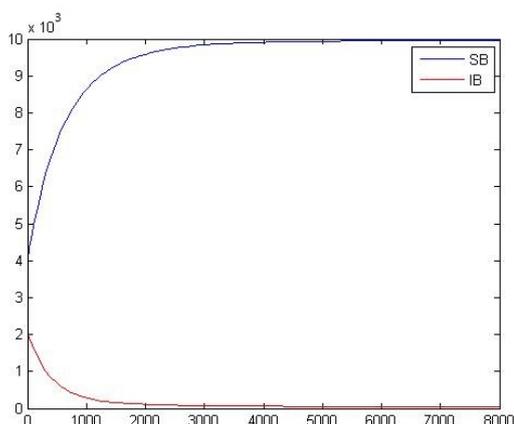


Figura 44 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

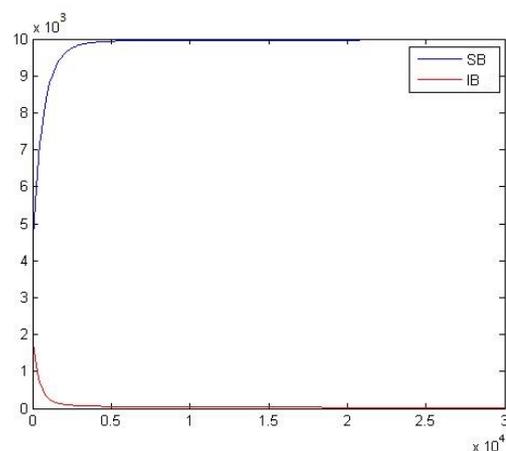


Figura 45 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 42 e 43 a população de suscetíveis cresce enquanto a população de infectados decresce. Na Figura 44 vemos que a partir 5000 dias há a estabilidade na população de suscetíveis e a população de infectados se aproxima de 0 a partir dos 4000 dias. Na Figura 45 a população de infectados fica muito próxima de 0 aos 20000 dias como é esperado pois  $R_0 < 1$ .

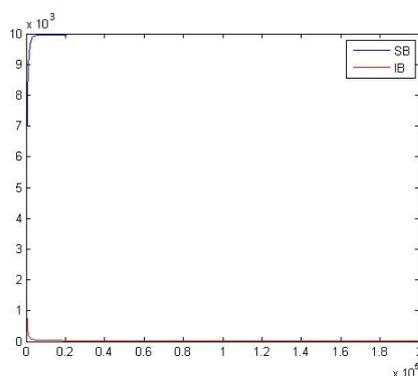


Figura 46 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 200000$ .

Fonte: Da autora.

Agora os gráficos a seguir apresentam a população de bovinos com razão de reprodução básica  $R_0 = 1,1$  e taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,00108$  e  $\beta_C = 0,000999$  com o tempo máximo variando de 200 a 200000.

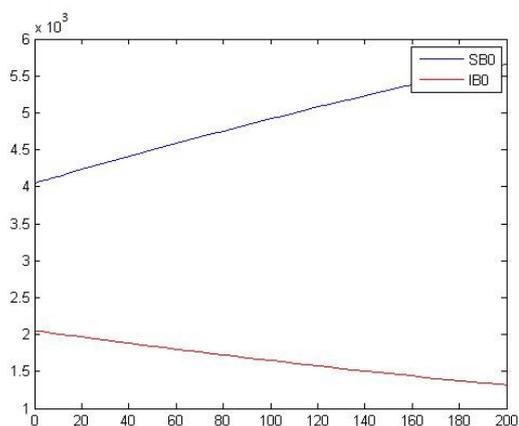


Figura 47 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

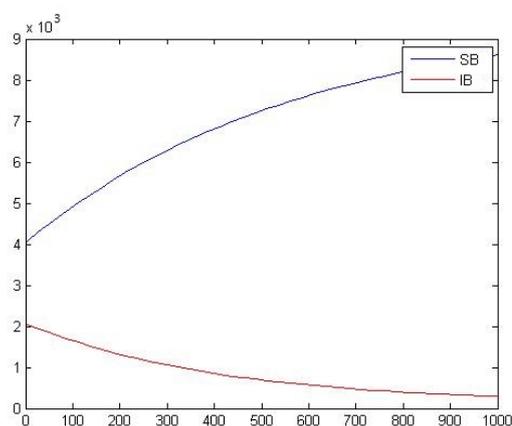


Figura 48 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

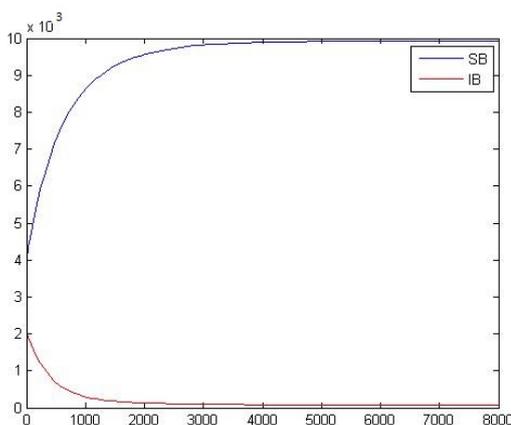


Figura 49 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

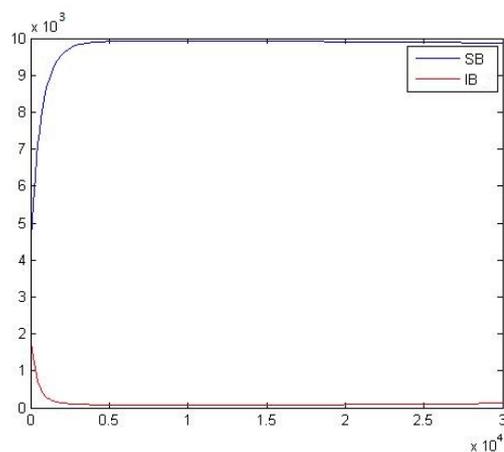


Figura 50 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

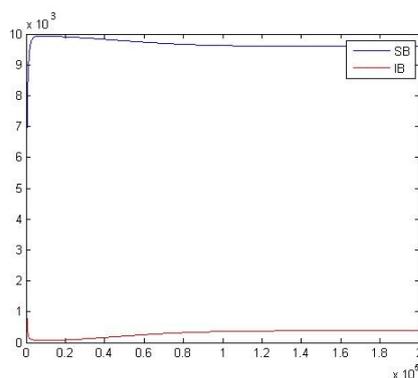


Figura 51 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 47 e 48 a população de suscetíveis cresce enquanto a de infectados decresce. Na Figura 49 vemos que a partir de 4000 dias a população de suscetíveis estabiliza enquanto a

de infectados se aproxima de 0. Na Figura 50 próximo aos 20000 dias a população de suscetíveis decresce lentamente enquanto a de infectados cresce. E na Figura 51 continua o mesmo comportamento dos dias finais da Figura anterior o que é esperado pois  $R_0 = 1,1$  Considerando  $R_0 = 48$  e taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,007$  e  $\beta_C = 0.0064$  com o tempo máximo variando de 200 a 30000.

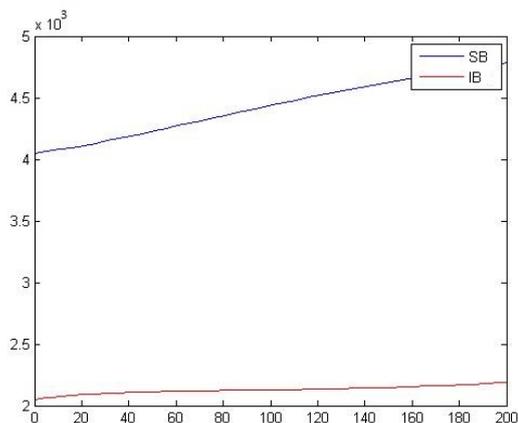


Figura 52 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 48, t = 200$ .

Fonte: Da autora.

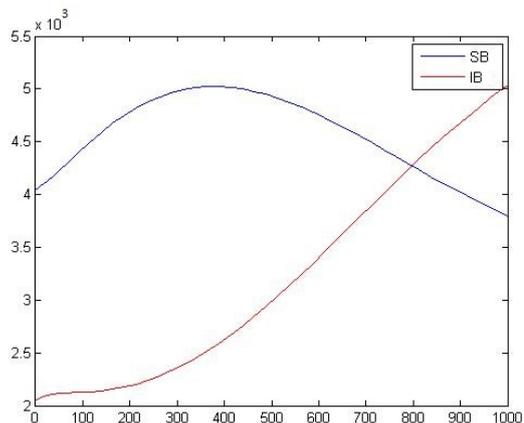


Figura 53 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 48, t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

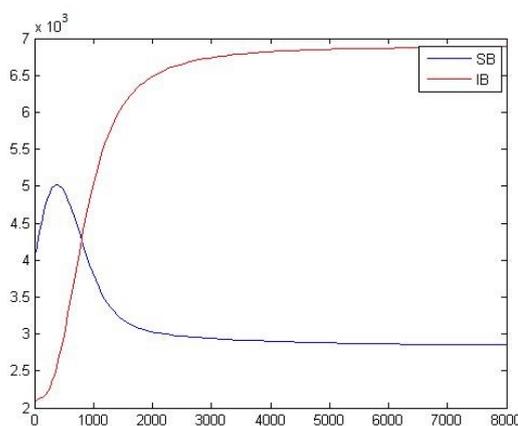


Figura 54 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 48, t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

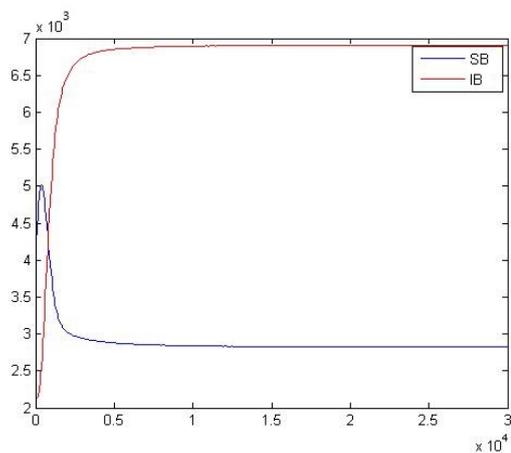


Figura 55 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 48, t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

Na Figura 52 temos que tanto a população infectado quanto de suscetíveis estão crescendo, e na Figura 53 a população de infectados continua crescendo mas a população de suscetíveis perto dos 400 dias começa a decrescer, aos 800 dias a população de infectados ultrapassa a de suscetíveis. Agora na Figura 54 a população de infectados continua crescendo e a população de suscetíveis decrescendo, como é esperado pois  $R_0 > 1$ . Vemos que na Figura 55 a partir de 10000 dias as populações se estabilizam.

Agora veremos gráficos que representam a população de carrapatos com os mesmos casos simulados anteriormente. Primeiramente vamos apresentar gráficos com razão de reprodução básica  $R_0 = 0,01$  e taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,000159$  e  $\beta_C = 0.00009$  com o tempo máximo variando de 200 a 30000.

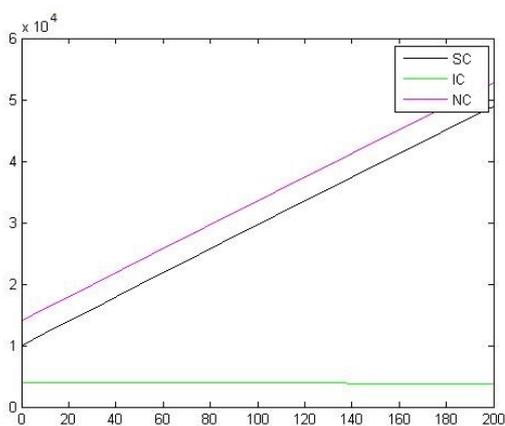


Figura 56 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

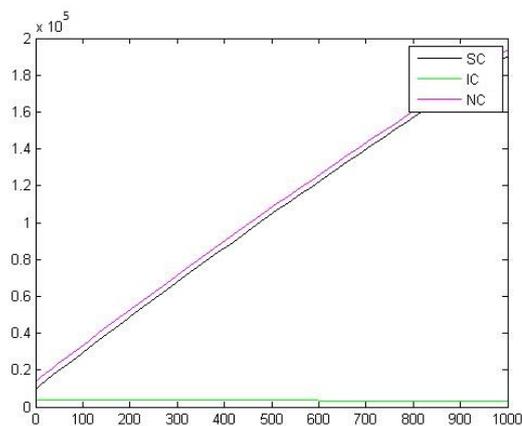


Figura 57 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

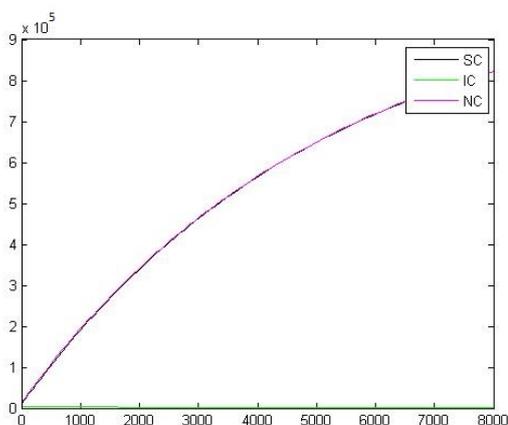


Figura 58 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

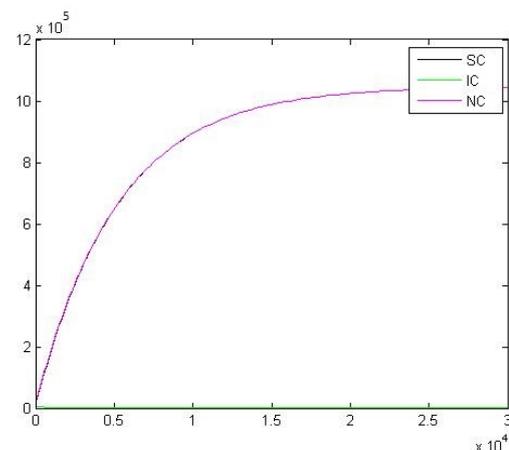


Figura 59 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 56 e 57 a população de infectados decresce e população de suscetíveis cresce se aproximando da população total. Na Figura 58 a população de infectados fica muito próximo de 0 aos 2000 dias e a população de suscetíveis se aproxima mais da população total, como o esperado pois  $R_0 < 1$ . Na Figura 59 ambas populações se estabilizam.

Agora vamos apresentar gráficos com razão de reprodução básica  $R_0 = 0,9$  e taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,000999$  e  $\beta_C = 0.000908$  com o tempo máximo variando de 200 a 200000.

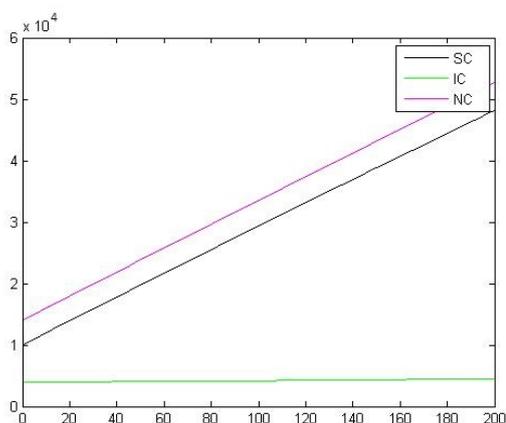


Figura 60 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

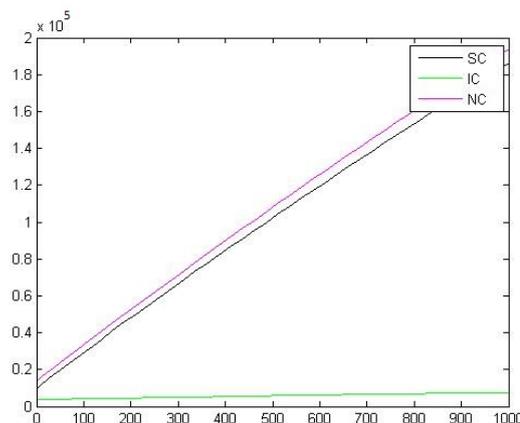


Figura 61 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

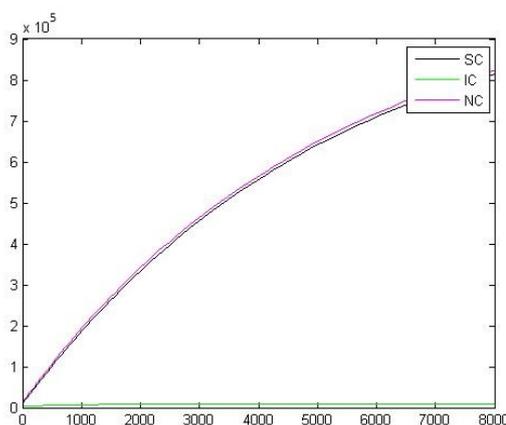


Figura 62 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

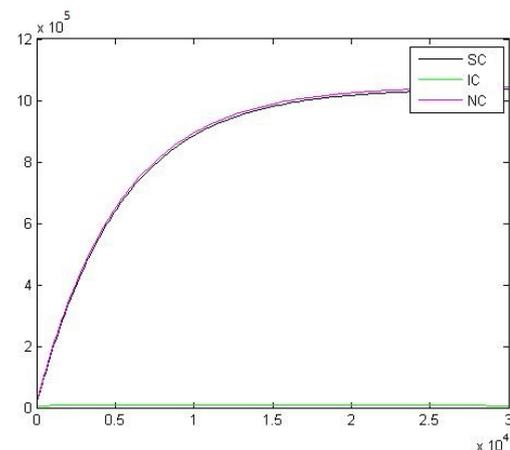


Figura 63 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 60, 61 e 62 ambas populações estão crescendo. Na Figura 63 próximo a 30000 dias a população de infectados decresce aproximando de 0 enquanto a de suscetíveis se aproxima da total. Na Figura 64 próximo a 100000 dias a população de infectados continua se aproximando de 0 enquanto a de suscetíveis aproxima da população total, como o esperado pois  $R_0 < 1$ .

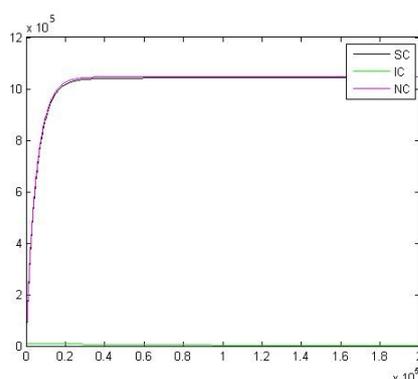


Figura 64 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 200000$ .

Vamos apresentar gráficos com razão de reprodução básica  $R_0 = 1,1$  e taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,00108$  e  $\beta_C = 0,000999$  com o tempo máximo variando de 200 a 200000.

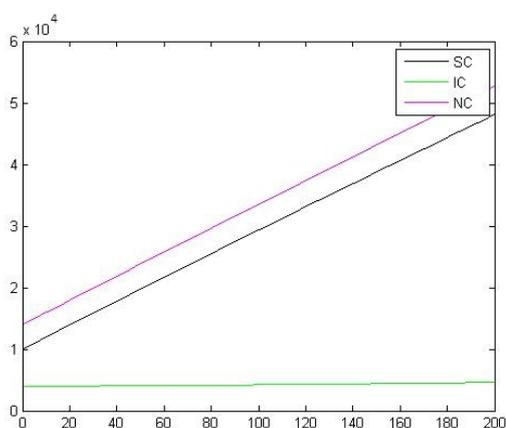


Figura 65 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

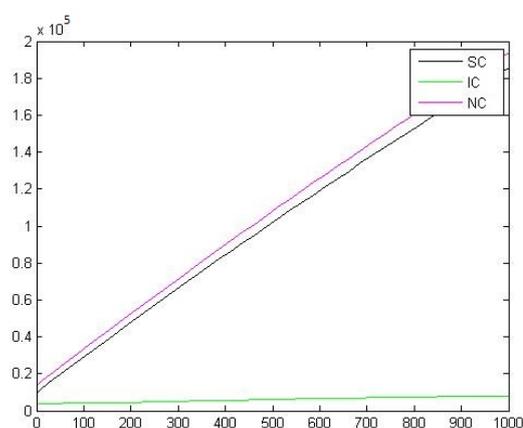


Figura 66 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

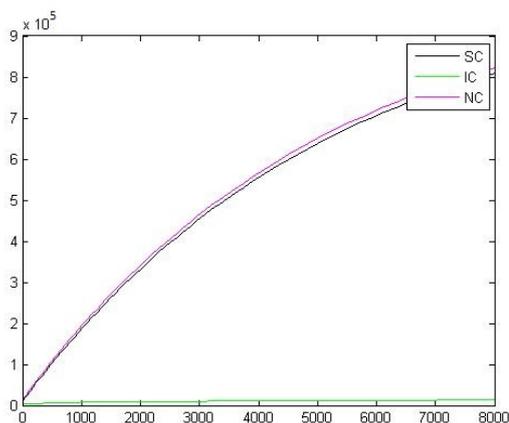


Figura 67 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

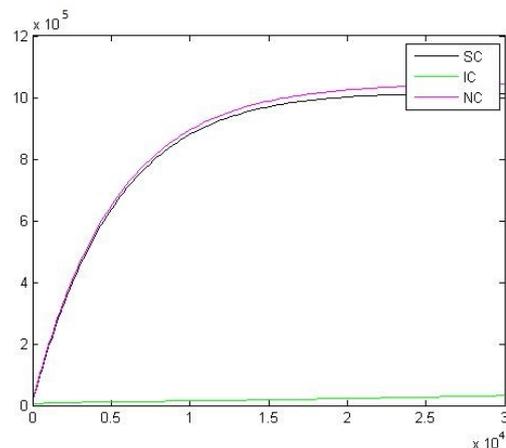


Figura 68 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

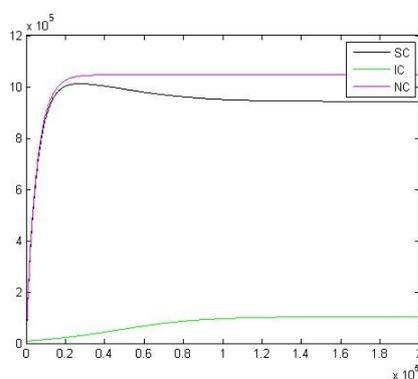


Figura 69 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200000$ .

Fonte: Da autora.

Em todas as Figuras com  $R_0 = 1,1$  vemos que a população de infectados cresce lentamente, mas a população de suscetíveis cresce nas Figuras 65, 66, 67, 68 porém na Figura 69 a partir de 40000 dias a população de suscetíveis começa a decrescer, como esperado pois  $R_0 > 1$ .

Veremos agora gráficos com razão de reprodução básica  $R_0 = 1,1$  e taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,007$  e  $\beta_C = 0,0064$  com o tempo máximo variando de 200 a 30000.

Na Figura 70 todas as populações estão crescendo, agora na Figura 71 a população começa decrescer próximo aos 800 dias e a população de infectados ultrapassa de suscetíveis. Nas Figuras 72 e 73 a população de suscetíveis estabiliza enquanto a população de infectados fica próxima a população total, pois  $R_0 > 1$ .

Vejamos agora os gráficos com as duas populações, colocamos dois gráficos em apenas um só, também com os mesmos casos estudados anteriormente. Casos com  $R_0 = 0,01$ ,  $R_0 = 0,9$ ,  $R_0 = 1,1$  e  $R_0 = 48$  e o tempo máximo  $t = 200$ ,  $t = 1000$ ,  $t = 8000$  e  $t = 30000$ .

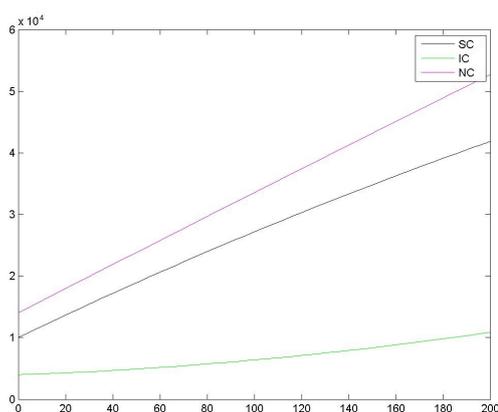


Figura 70 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

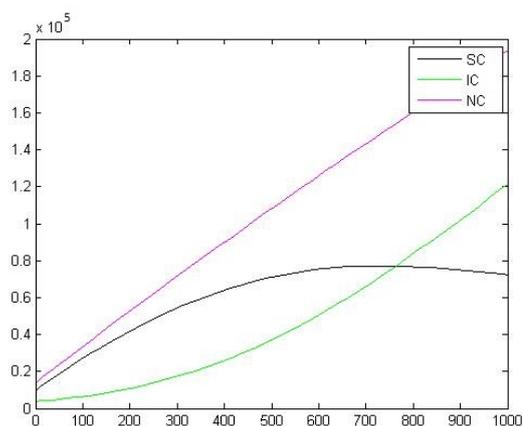


Figura 71 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

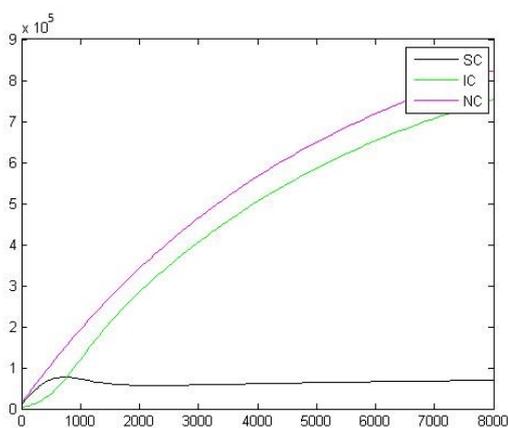


Figura 72 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

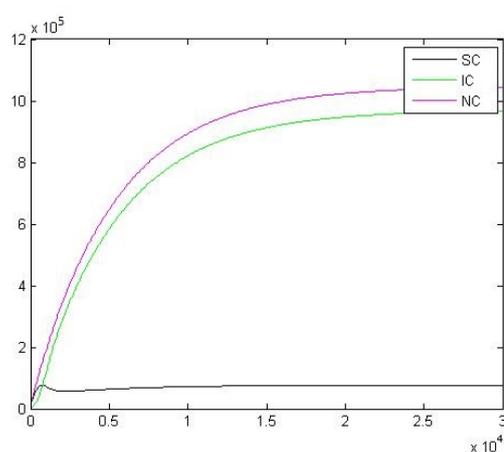


Figura 73 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

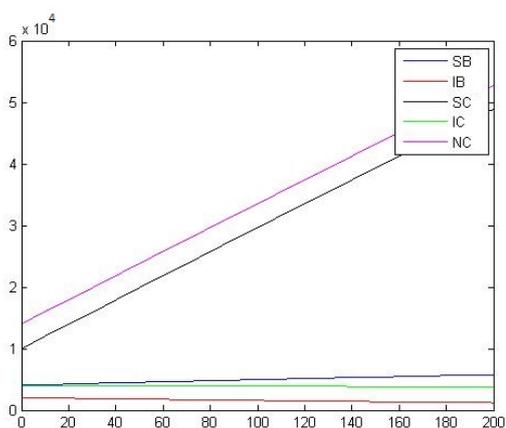


Figura 74 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

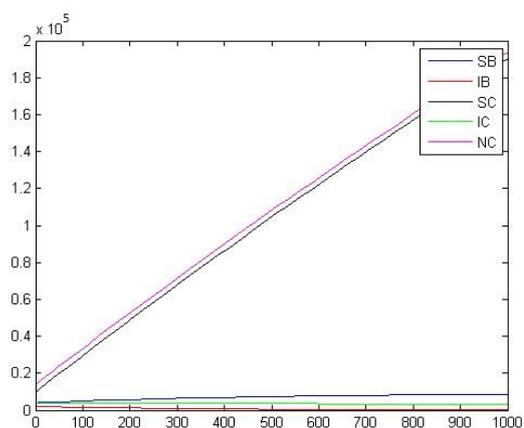


Figura 75 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

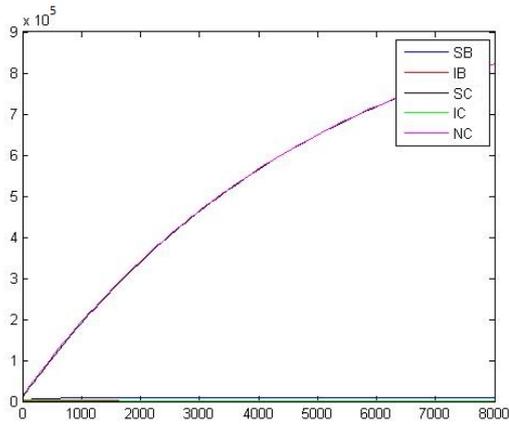


Figura 76 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,01, t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

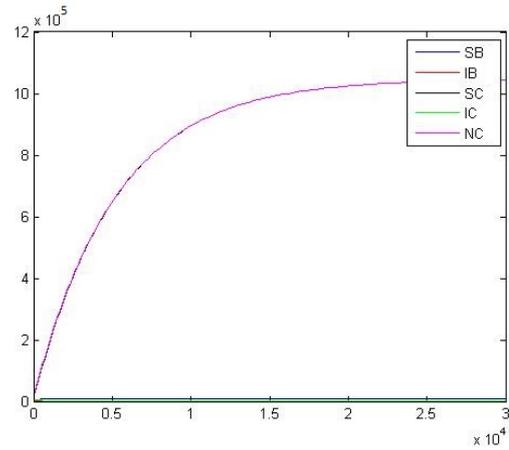


Figura 77 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,01, t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

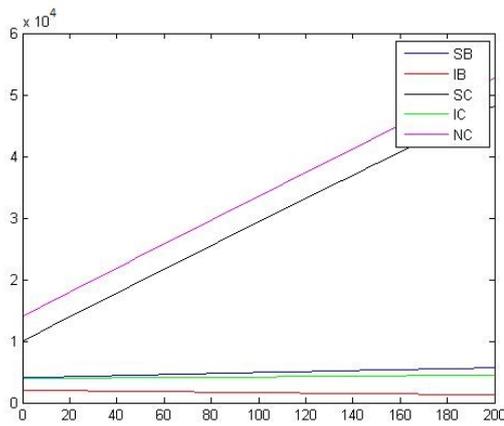


Figura 78 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9, t = 200$ .

Fonte: Da autora.

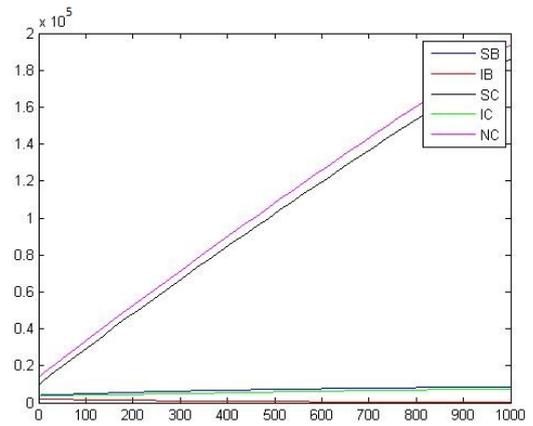


Figura 79 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9, t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

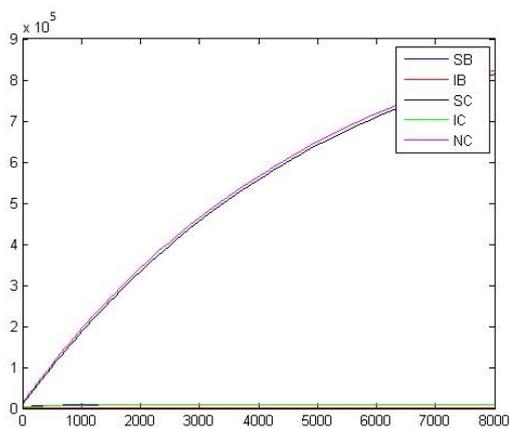


Figura 80 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

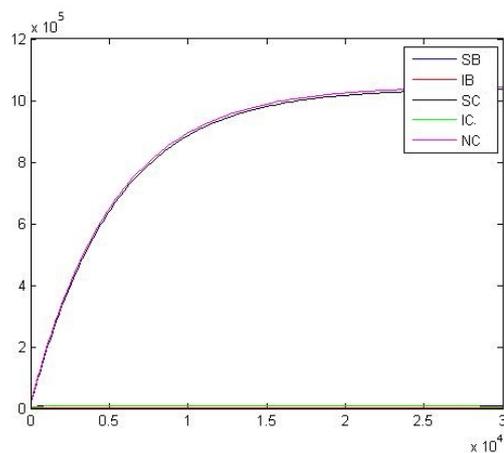


Figura 81 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

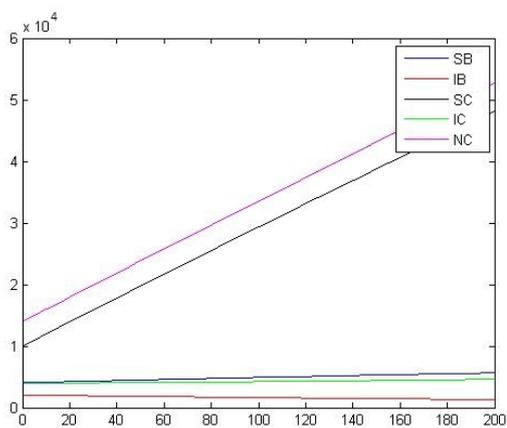


Figura 82 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

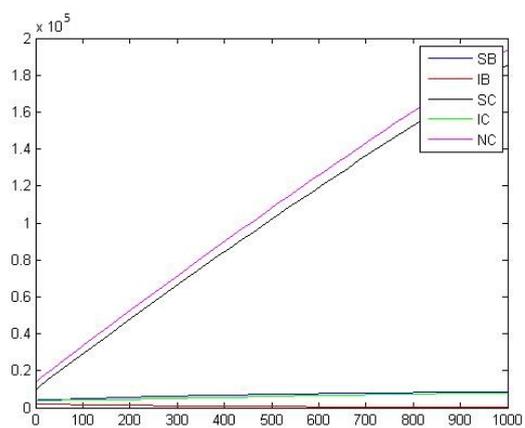


Figura 83 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

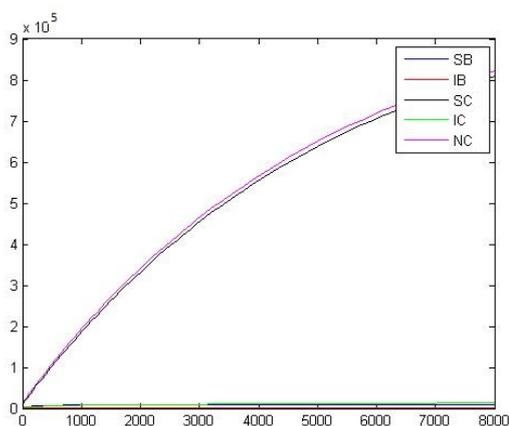


Figura 84 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

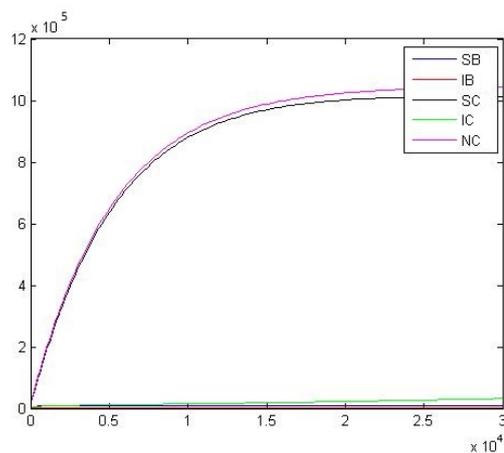


Figura 85 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

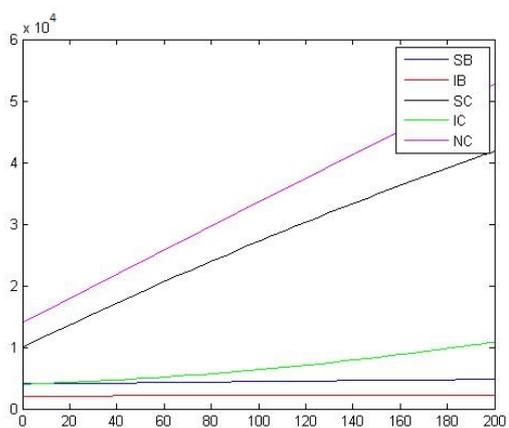


Figura 86 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

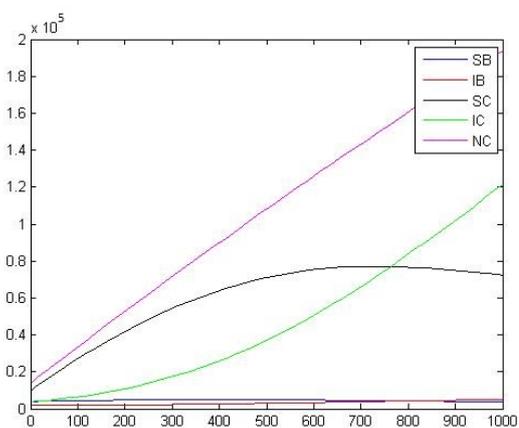


Figura 87 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

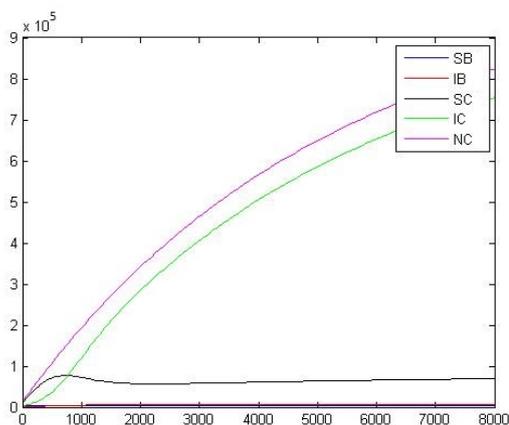


Figura 88 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

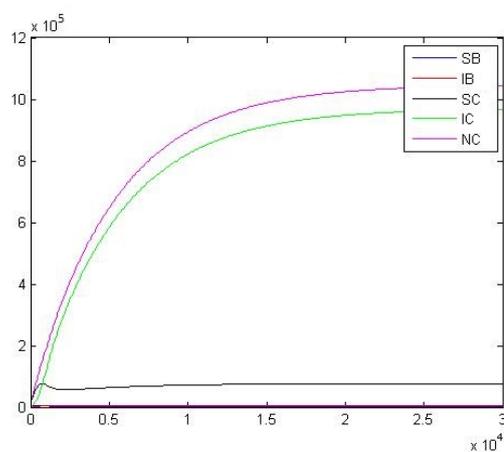


Figura 89 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

## APÊNDICE B - Gráficos do Modelo Lokta-Volterra

Agora para realizar as simulações numéricas para o modelo Lokta-Volterra foram utilizados as mesmas condições iniciais do modelo exponencial, utilizamos também os parâmetros fixos  $a = 0,00108$  e  $k_C = 17000$  e também os parâmetros dados pela Tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros para simulação numérica da doença Babesiose bovina do modelo Lokta Volterra

Parâmetros	$\mu_B$	$\mu_C$	$\delta_C$	$\lambda_B$	$\alpha_B$	$p$
Valores	0,0002999	0,001609	0,0006	0,00265	0,001	0,1

Fonte: Adaptado dos valores disponíveis em Aranda et al. (2012).

Primeiramente veremos gráficos representando apenas a população de bovinos, nos primeiros gráficos consideramos  $R_0 = 0,01$  e o tempo máximo variando de 200 a 30000 dias, para isso as taxas de transmissão por contato, transmissão horizontal, foram  $\beta_B = 0,0001$   $\beta_C = 0,00006$ .

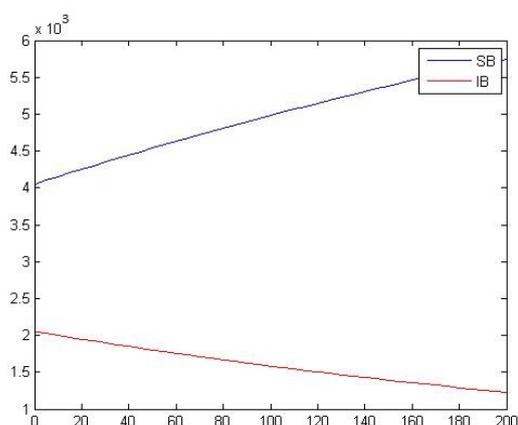


Figura 90 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

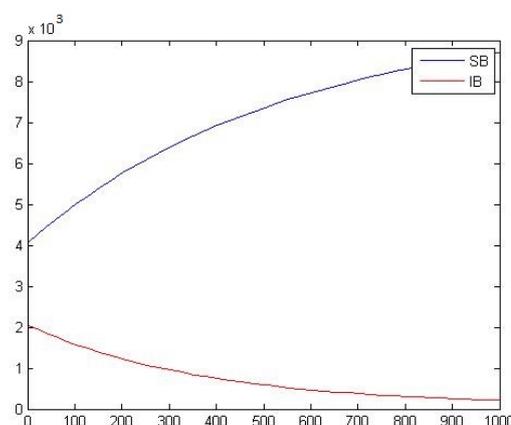


Figura 91 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 90 e 91 podemos observar o crescimento da população de suscetíveis e o decréscimo da população de carrapatos. Na Figura 92 a população de infectados se aproxima de 0 e próximo de 5000 dias se estabiliza, como esperado pois  $R_0 < 1$ , a população de suscetíveis também se estabiliza e na Figura 93 ambas populações permanecem estabilizadas.

Agora veremos gráficos para o caso com razão de reprodução básica  $R_0 = 0,9$ , utilizando a taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,000159$  e  $\beta_C = 0,00009$  com o tempo máximo

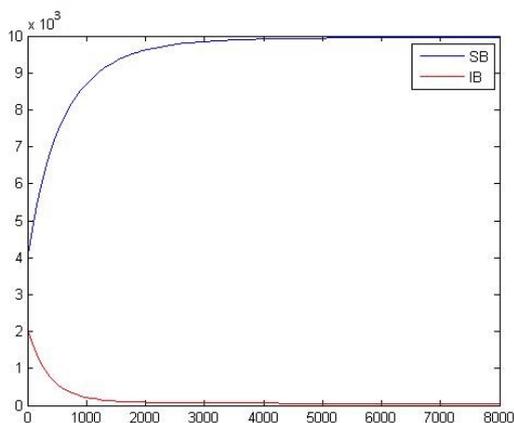


Figura 92 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

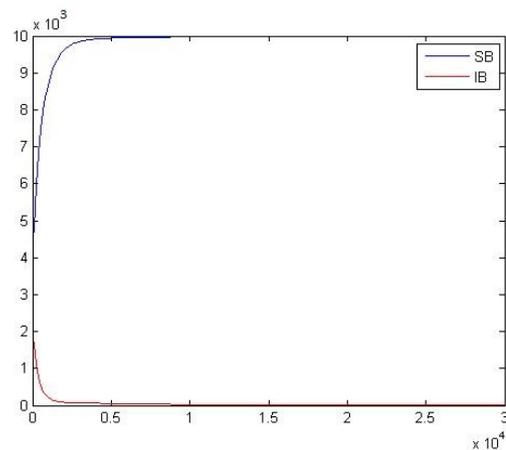


Figura 93 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

variando de 200 a 200000 dias.

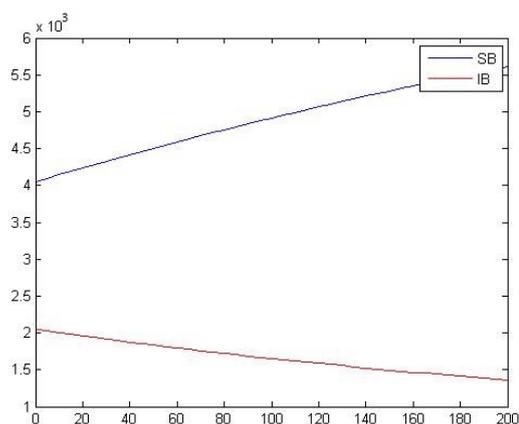


Figura 94 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

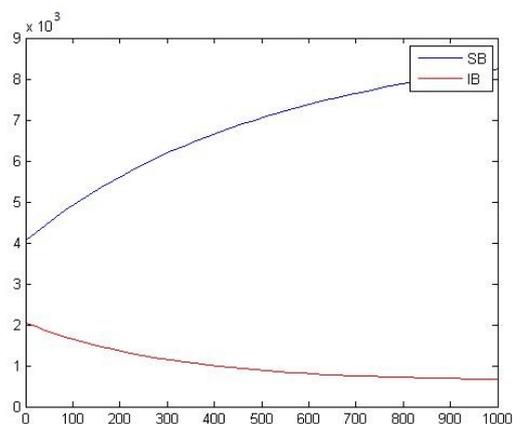


Figura 95 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

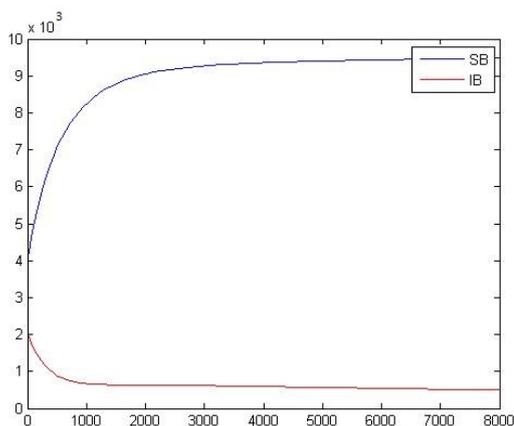


Figura 96 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

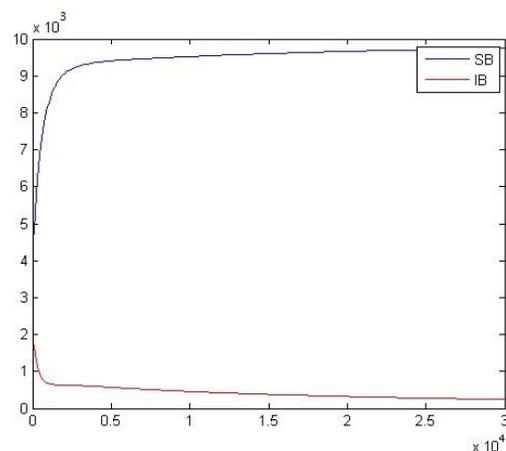


Figura 97 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

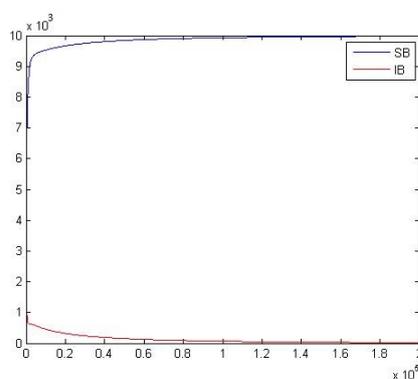


Figura 98 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 200000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 94, 95, 96, 97 podemos notar que a população de suscetíveis cresce enquanto a população de infectados decresce. E na Figura 98 a partir de 160000 a população de infectados se aproxima de 0, como esperado pois  $R_0 < 1$ , e a população de suscetíveis se estabiliza.

Vejamos agora gráficos com  $R_0 = 1,1$  casos com taxa de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,0008$  e  $\beta_C = 0,0006$  com tempo máximo variando de 200 a 200000 dias.

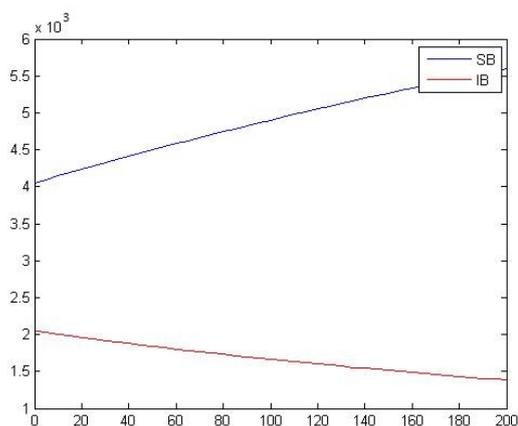


Figura 99 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

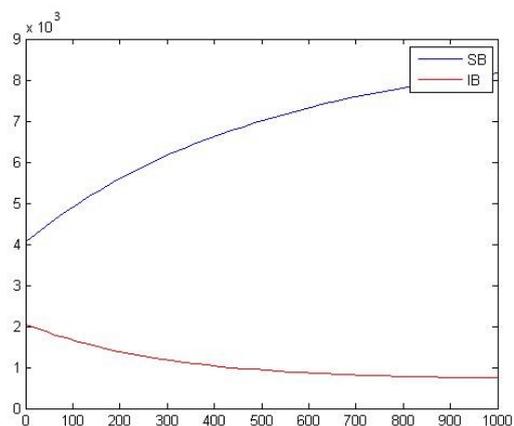


Figura 100 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

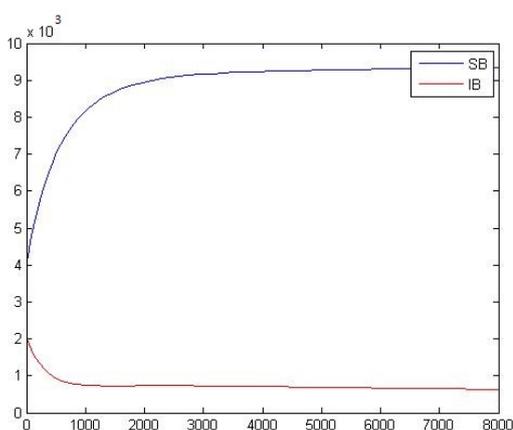


Figura 101 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

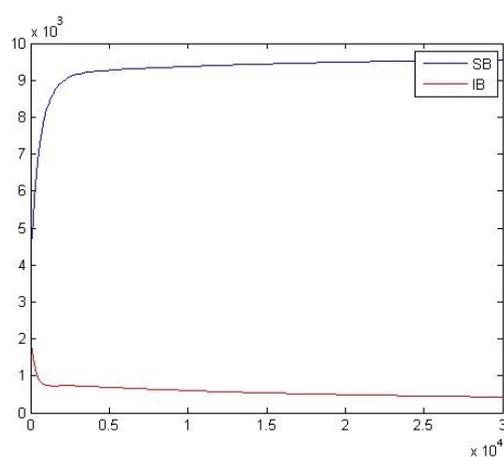


Figura 102 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

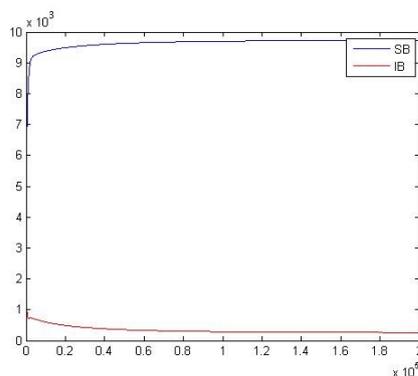


Figura 103 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200000$ .

Fonte: Da autora.

Em todas as Figuras com  $R_0 = 1,1$  da população de bovinos a população suscetível cresce enquanto a população de infectados decresce se aproximando de 0.

Agora veremos o caso em que a razão de reprodução básica é  $R_0 = 48$ , para isso temos as taxas de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,005$  e  $\beta_C = 0,0041$  com tempo máximo variando de 200 a 30000 dias.

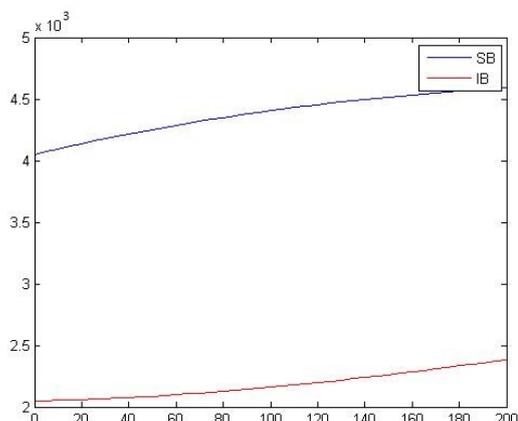


Figura 104 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

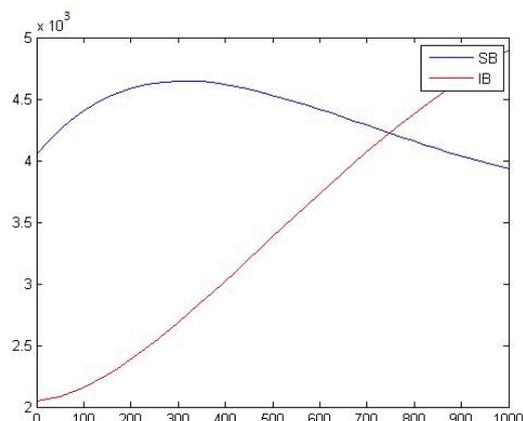


Figura 105 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

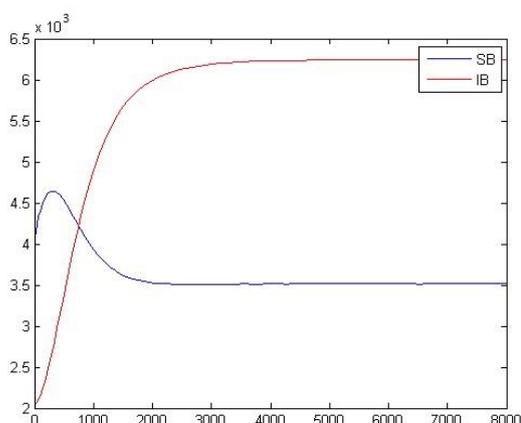


Figura 106 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

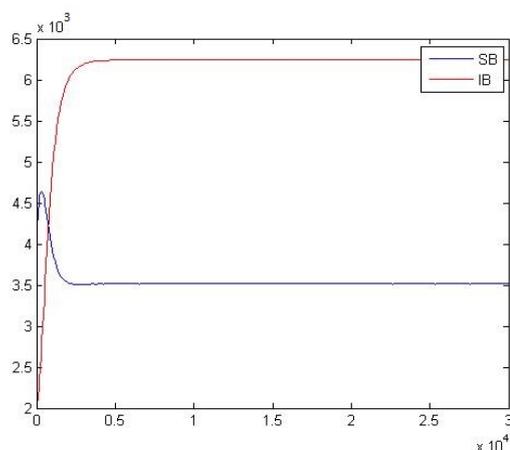


Figura 107 – Dinâmica da população de bovinos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

Na Figura 104 ambas populações crescem, mas na Figura 105 a população de suscetíveis a partir dos 300 dias começa a decrescer enquanto a população de infectados continua crescendo e próximo a 800 dias a população de infectados ultrapassa a de suscetíveis. Na Figura 106 próximo a 2000 dias ambas populações se estabilizam.

Nos próximos gráficos veremos o comportamento da população de carrapatos. Vejamos primeiro para o caso em que a razão de reprodução básica  $R_0 = 0,01$  com taxas de transmissão horizontal  $\beta_B = 0,0001$  e  $\beta_C = 0,00006$  e o tempo máximo variando de 200 a 30000 dias.

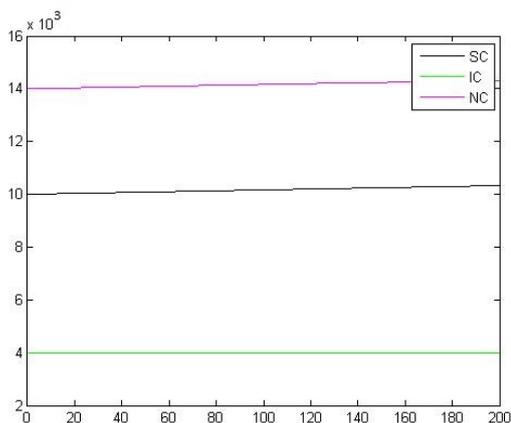


Figura 108 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

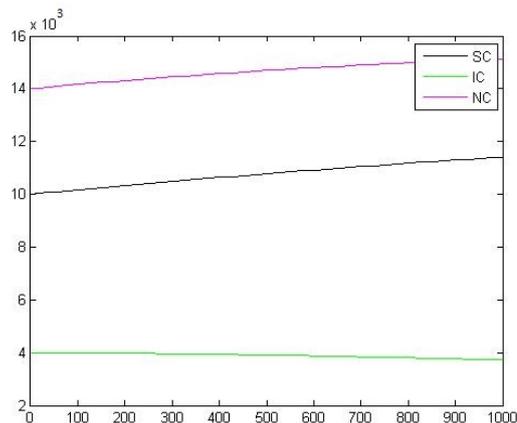


Figura 109 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

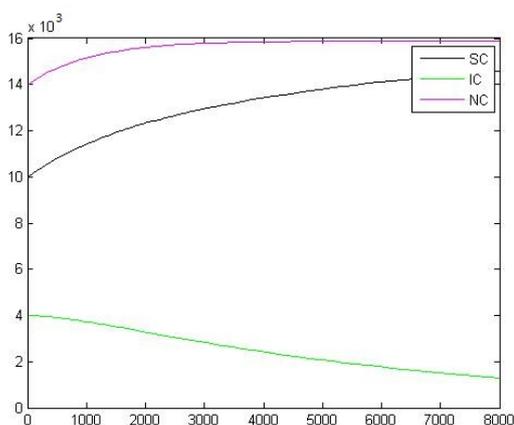


Figura 110 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

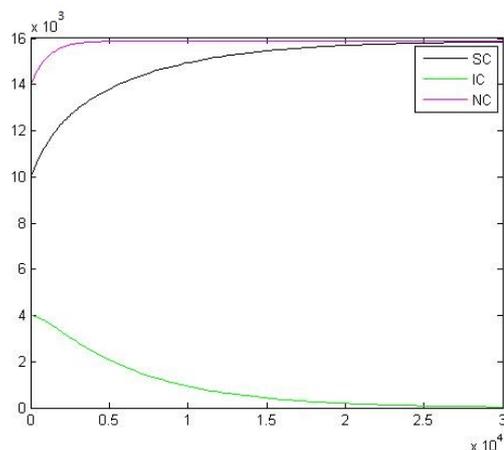


Figura 111 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 108, 109 e 110 a população de suscetíveis cresce enquanto a população de infectados decresce e na Figura 111 próximo aos 30000 dias temos que a população de infectados se aproxima de 0 e a população de suscetíveis se aproxima da população total, como esperado pois  $R_0 < 1$ .

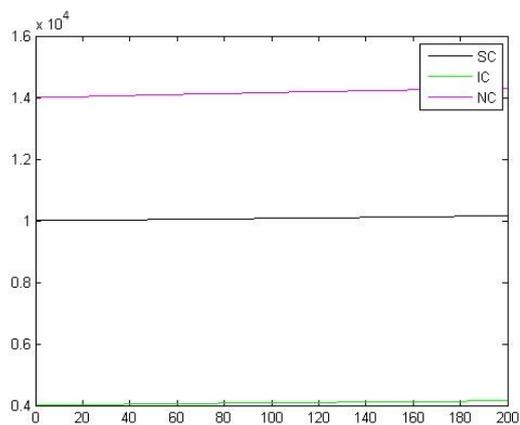


Figura 112 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

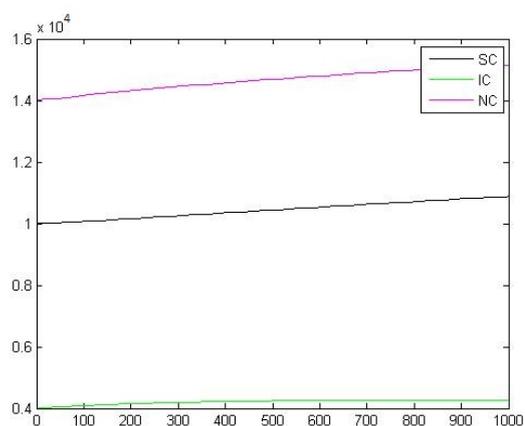


Figura 113 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

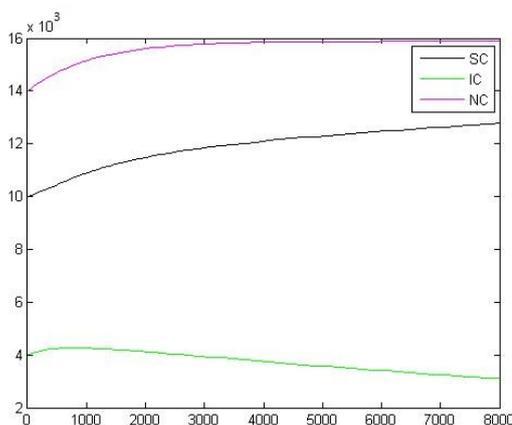


Figura 114 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

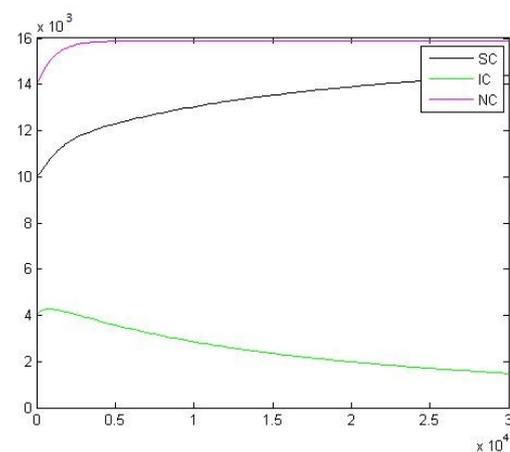


Figura 115 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

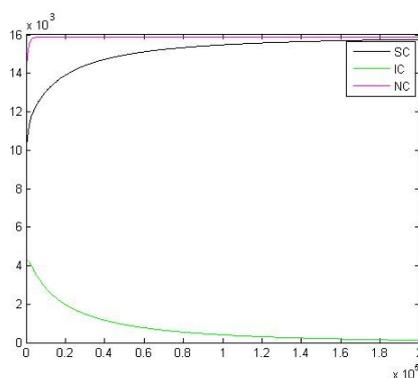


Figura 116 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 0,9$ ,  $t = 200000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 112 e 113 ambas populações crescem, mas na figura 114 podemos observar que depois de 1000 dias a população de infectados começa a decrescer e na Figura 115 a população de infectados continua decrescendo. Na Figura 116 a população de infectados se aproxima de 0 e a população de suscetíveis fica muito próxima a população total.

Agora veremos para o caso em que  $R_0 = 1,1$  com taxas de transmissão por contato  $\beta_B = 0,0008$  e  $\beta_C = 0,0006$  com o tempo máximo variando de 200 a 200000 dias.

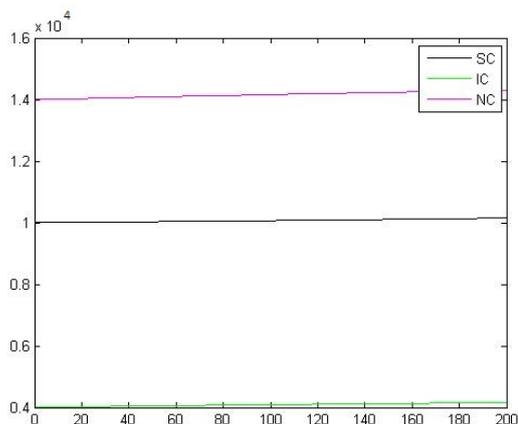


Figura 117 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

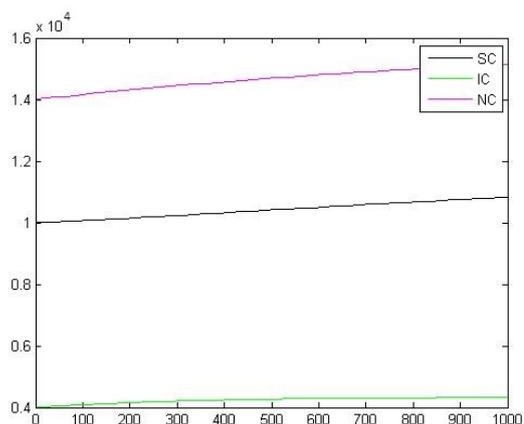


Figura 118 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

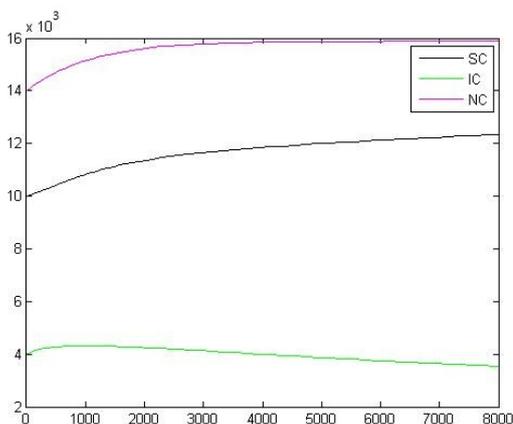


Figura 119 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

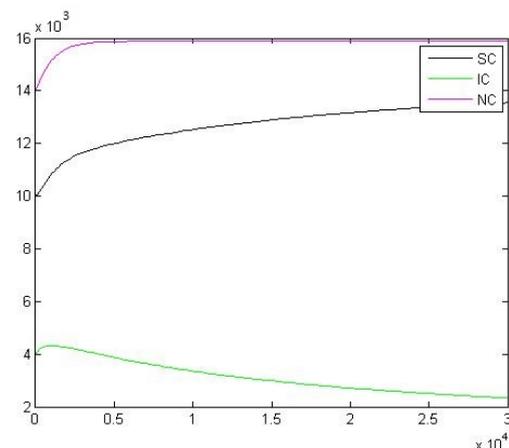


Figura 120 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

Nas Figuras 117 e 118 ambas populações crescem, agora nas figuras 119 e 120 a população de suscetíveis continua a crescer no entanto a de infectados começa a decrescer. Na Figura 121 vemos a estabilidade das duas populações.

Agora vejamos o caso em que a razão de reprodução básica  $R_0 = 48$  com taxas de

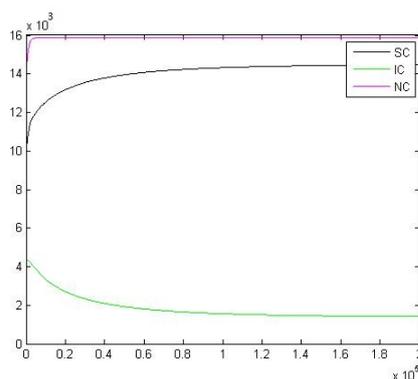


Figura 121 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 1,1$ ,  $t = 200000$ .

Fonte: Da autora.

transmissão horizontal  $\beta_B = 0,005$  e  $\beta_C = 0,0041$  com o tempo máximo variando de 200 a 30000 dias.

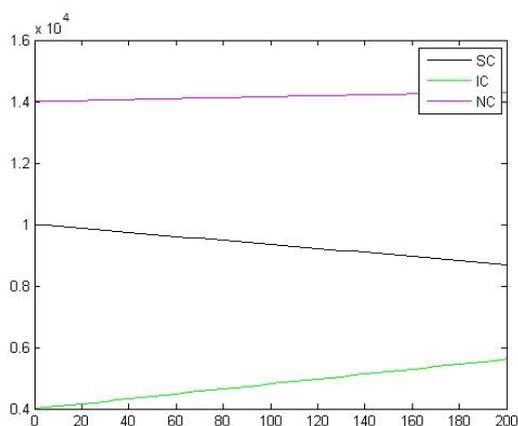


Figura 122 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 200$ .

Fonte: Da autora.

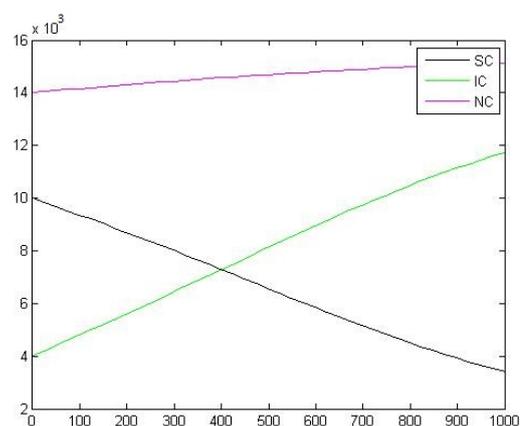


Figura 123 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

Na Figura 122 temos que a população de suscetíveis decresce e a população de infectados cresce, já na Figura 123 podemos ver que próximo aos 400 dias a população de infectados ultrapassa a população de suscetíveis. E na Figura 124 a população de suscetíveis continua decrescendo enquanto a de infectados continua crescendo e a partir de 3000 dias ambas se estabiliza, a população de infectados bem próxima da população total.

Os gráficos a seguir apresentam as duas populações juntas, exatamente nos mesmos casos citados anteriormente. Casos com  $R_0 = 0,01$ ,  $R_0 = 0,9$ ,  $R_0 = 1,1$  e  $R_0 = 48$  e o tempo máximo  $t = 200$ ,  $t = 1000$ ,  $t = 8000$  e  $t = 30000$ .

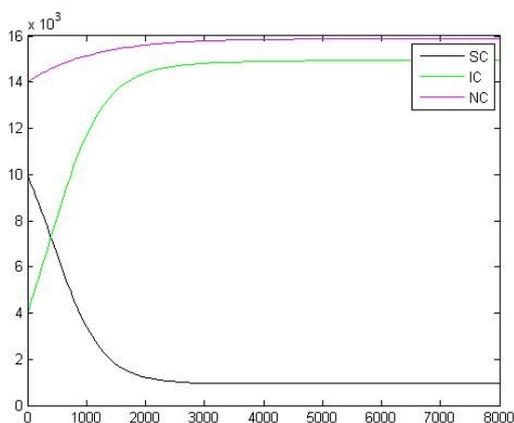


Figura 124 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

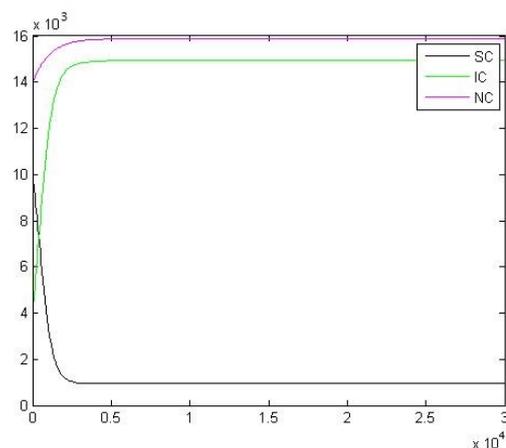


Figura 125 – Dinâmica da população de carrapatos quando  $R_0 = 48$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

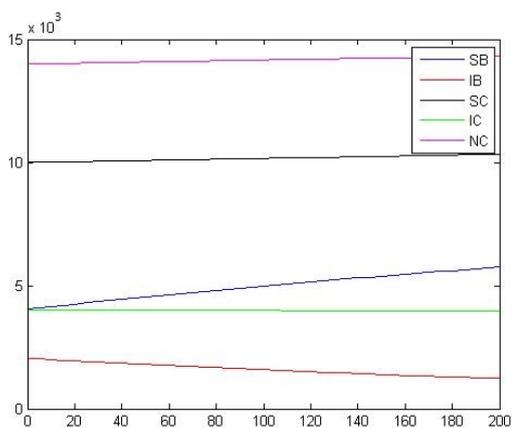


Figura 126 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 200$

Fonte: Da autora.

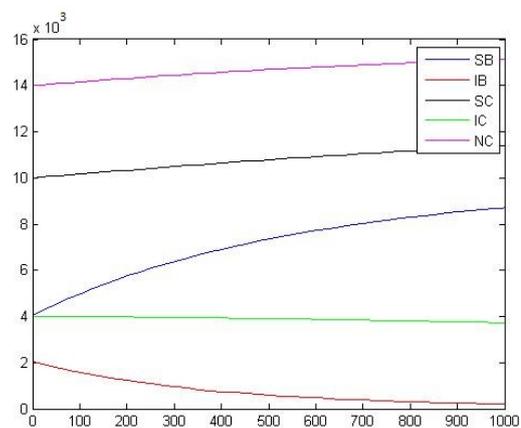


Figura 127 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

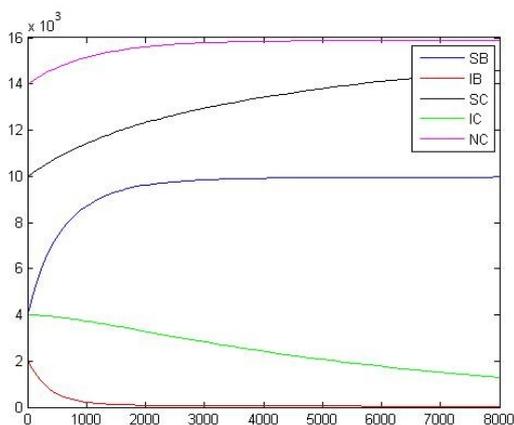


Figura 128 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

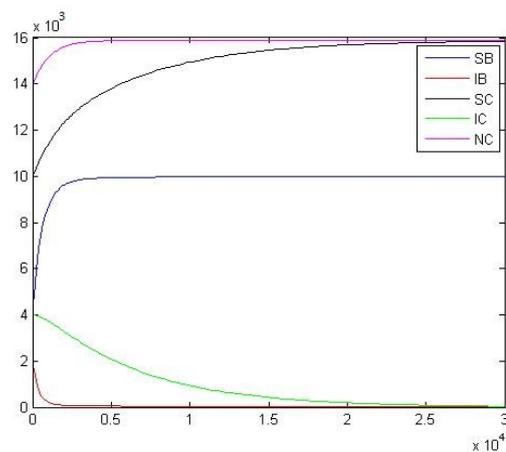


Figura 129 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,01$ ,  $t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

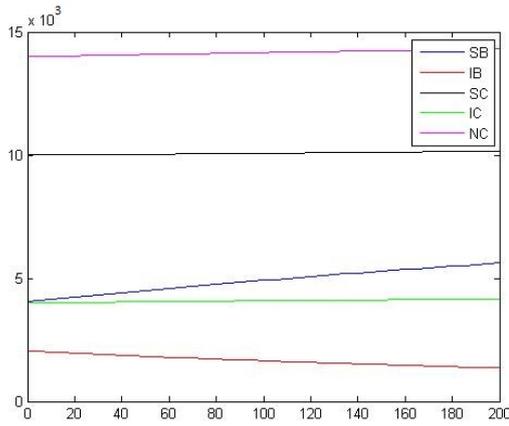


Figura 130 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9, t = 200$ .

Fonte: Da autora.

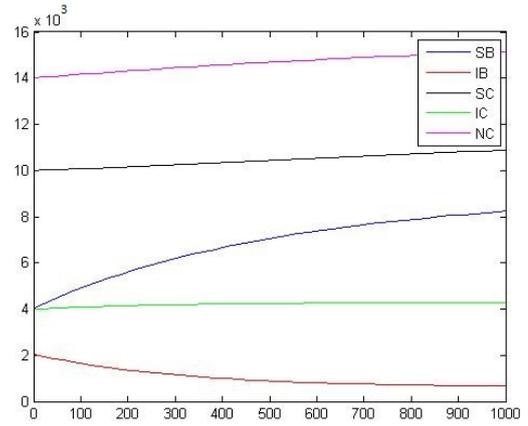


Figura 131 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9, t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

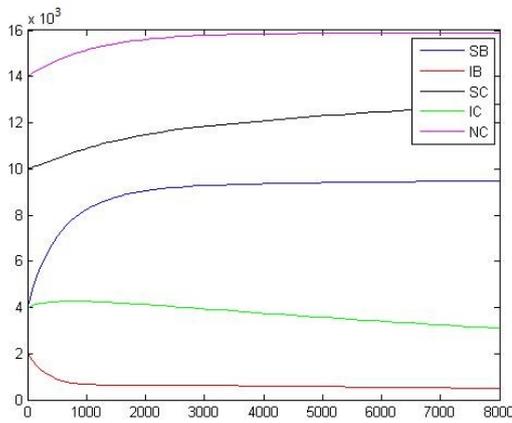


Figura 132 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9, t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

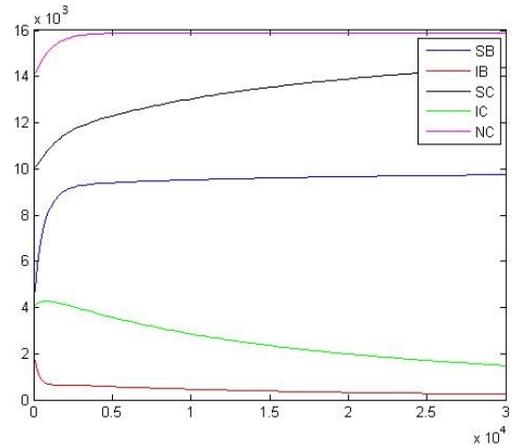


Figura 133 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 0,9, t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

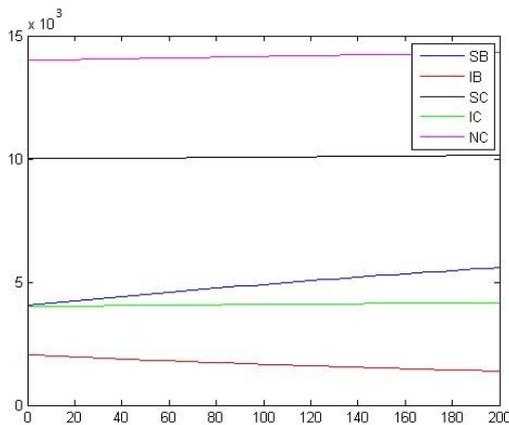


Figura 134 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1, t = 200$ .

Fonte: Da autora.

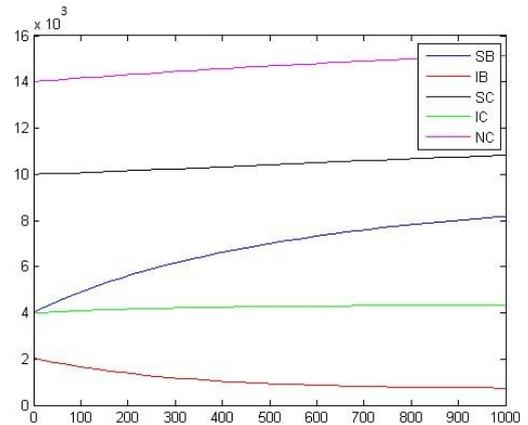


Figura 135 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1, t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

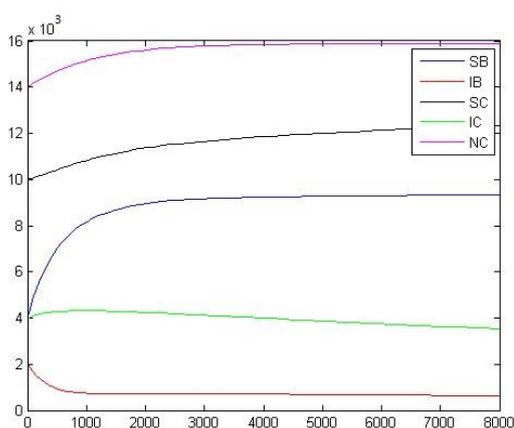


Figura 136 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1, t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

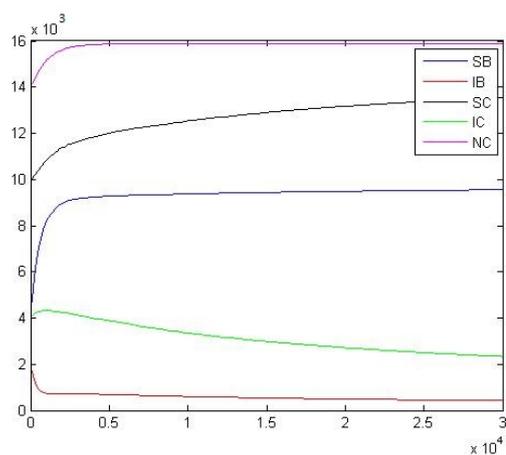


Figura 137 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 1,1, t = 30000$ .

Fonte: Da autora.

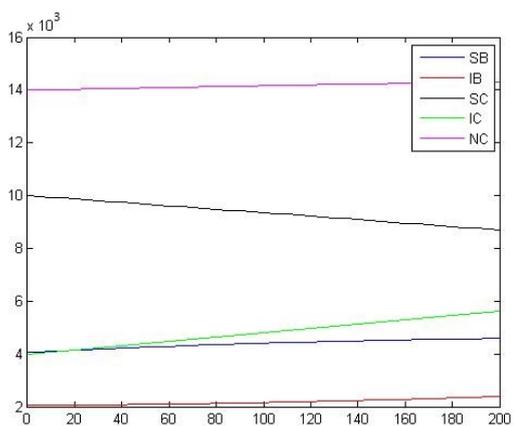


Figura 138 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 48, t = 200$ .

Fonte: Da autora.

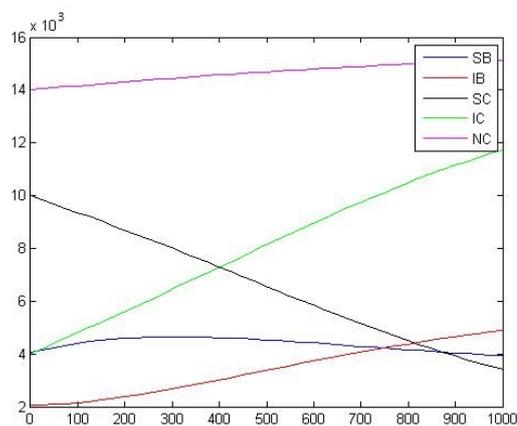


Figura 139 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 48, t = 1000$ .

Fonte: Da autora.

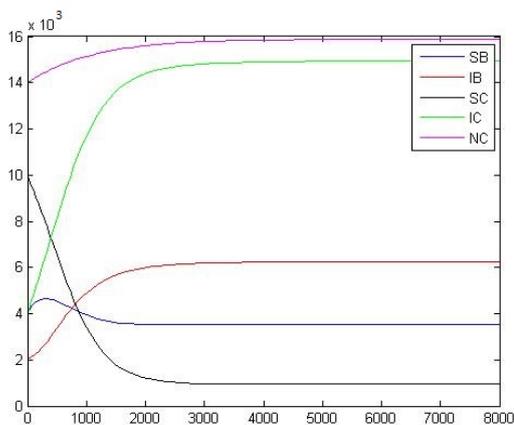


Figura 140 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 48, t = 8000$ .

Fonte: Da autora.

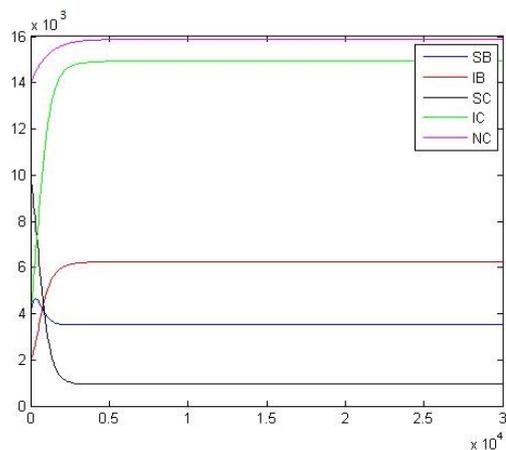


Figura 141 – Dinâmica das duas populações quando  $R_0 = 48, t = 30000$ .

Fonte: Da autora.